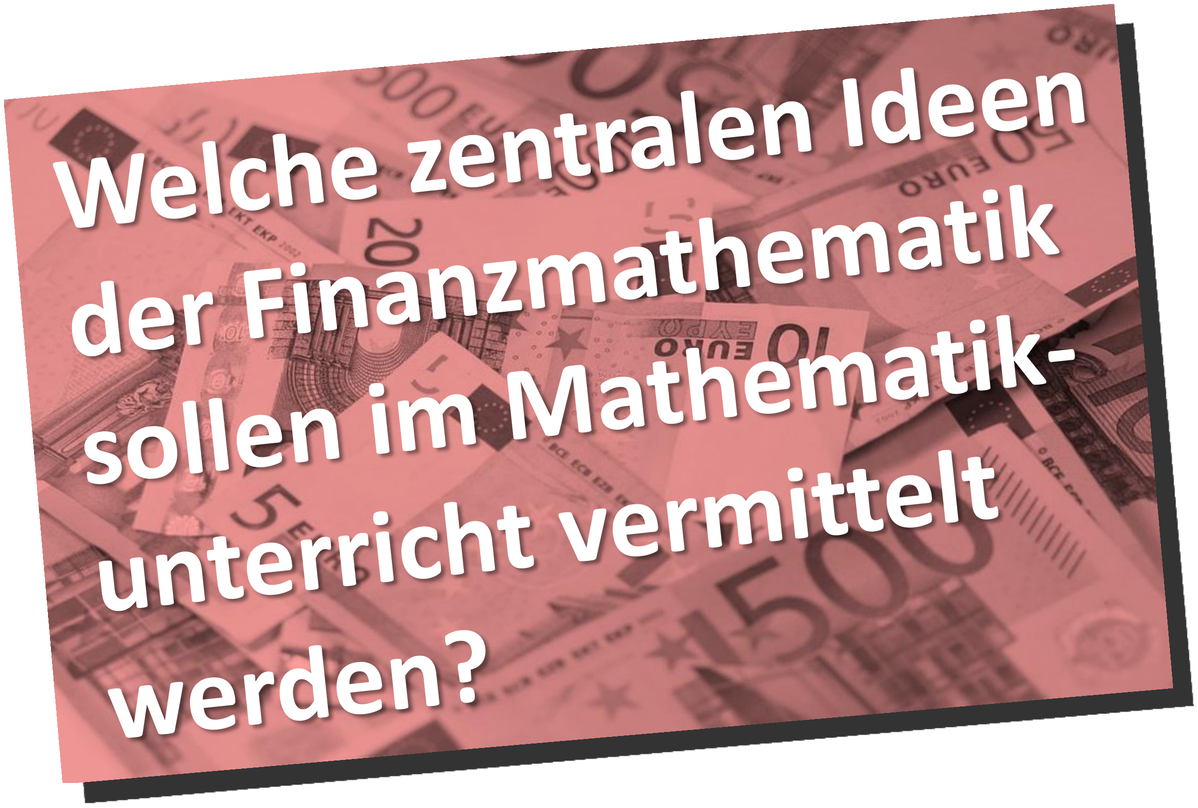
Welche zentralen Ideen der Finanzmathematik sollen im Mathematik-unterricht vermittelt werden?



Christian Dorner

Finanzbildung – Pressemeldungen

Österreichs Jugendliche tun sich schwer, mit Geld umzugehen. Fast jeder dritte Schüler betrachtet es heutzutage als normal, Schulden zu machen. Bei der Schuldnerberatung sind 14 Prozent der Klienten zum Zeitpunkt der Erstberatung 25 Jahre oder jünger. (orf.at, 29.11.2013)

Geld ist unser täglicher Begleiter. Mehrmals pro Tag haben wir mit den Münzen und Scheinen Kontakt oder benützen Karten mit Zahlungs-funktionen. Wirklich Ahnung vom Geld haben aber nur wenige, zeigt eine US-Studie (derstandard.at, 26.9.2014)

WU-Studie: Blankes Konto und kaum Finanzwissen bei Jugendlichen (diepresse.com, 13.12.2017)

Ich bin fast 18 und hab keine Ahnung von Steuern, Mie oder Versicherungen. Ab ich kann 'ne Gedichtsana schreiben. In 4 Sprachen (derstandard.at, 15.1.2015)

Und dennoch wird es als selbstverständlich erachtet, dass jeder die Fähigkeit erlernt hat, mit seinem Geld richtig hauszuhalten. Eine grobe Fehleinschätzung, wie eine Erhebung der Arbeiterkammer (AK) und des Vereins für Konsumenteninformation (VKI) zeigt. (derstandard.at, 7.1.2018)

UNI GRAZ
Christian Dorner
Finanzmathematik

Finanzbildung – Studien

- **Angenommen, Sie haben 100 $ auf einem Sparbuch und der Zinssatz beträgt 2 Prozent pro Jahr. Wie groß ist der Geldbetrag auf dem Sparbuch nach 5 Jahren?**

  Antwortmöglichkeiten: mehr als 102 $, exakt 102 $, weniger als 102 $, weiß nicht, keine Antwort.

- **Stellen Sie sich vor, der Zinssatz bei Ihrem Konto beträgt 1 Prozent pro Jahr und die Inflation beträgt 2 Prozent pro Jahr. Können Sie nach einem Jahr:**

  Antwortmöglichkeiten: mehr, genauso viel, weniger mit dem Geld auf diesem Konto kaufen, weiß nicht, keine Antwort.

- **Denken Sie, ist die folgende Aussage richtig oder falsch? „Der Kauf einer einzigen Aktie liefert in der Regel eine sicherere Rendite als die Investition in einen Aktienfond.“**

  Antwortmöglichkeiten: wahr, falsch, weiß nicht, keine Antwort.

(Lusardi/Mitchell, 2014, S. 10, übersetzt)

Finanzbildung – Studien

1. **Fünf Brüder bekommen 1.000 EUR geschenkt. Wenn sie das Geld gleichmäßig teilen müssen, wie viel erhält dann jeder?**

2. **Wenn die Brüder dann ein Jahr warten müssen, bevor sie ihren Anteil erhalten und die Inflationsrate beträgt konstant 2%, können sie sich dann mit dem Geldbetrag**

   a) mehr kaufen, als sie es heute können,

   b) genauso viel kaufen oder

   c) weniger kaufen, als sie es heute können?

   Antwort viele Probanden: „Es hängt davon ab, was sie sich kaufen wollen!“

3. **Sie leihen einem Freund abends 25 EUR und er gibt Ihnen am nächsten Tag 25 EUR zurück. Wie viele Zinsen hat er auf diesen Kredit gezahlt?**

(Silgoner/Weber, 2016, S. 41, Auswahl)

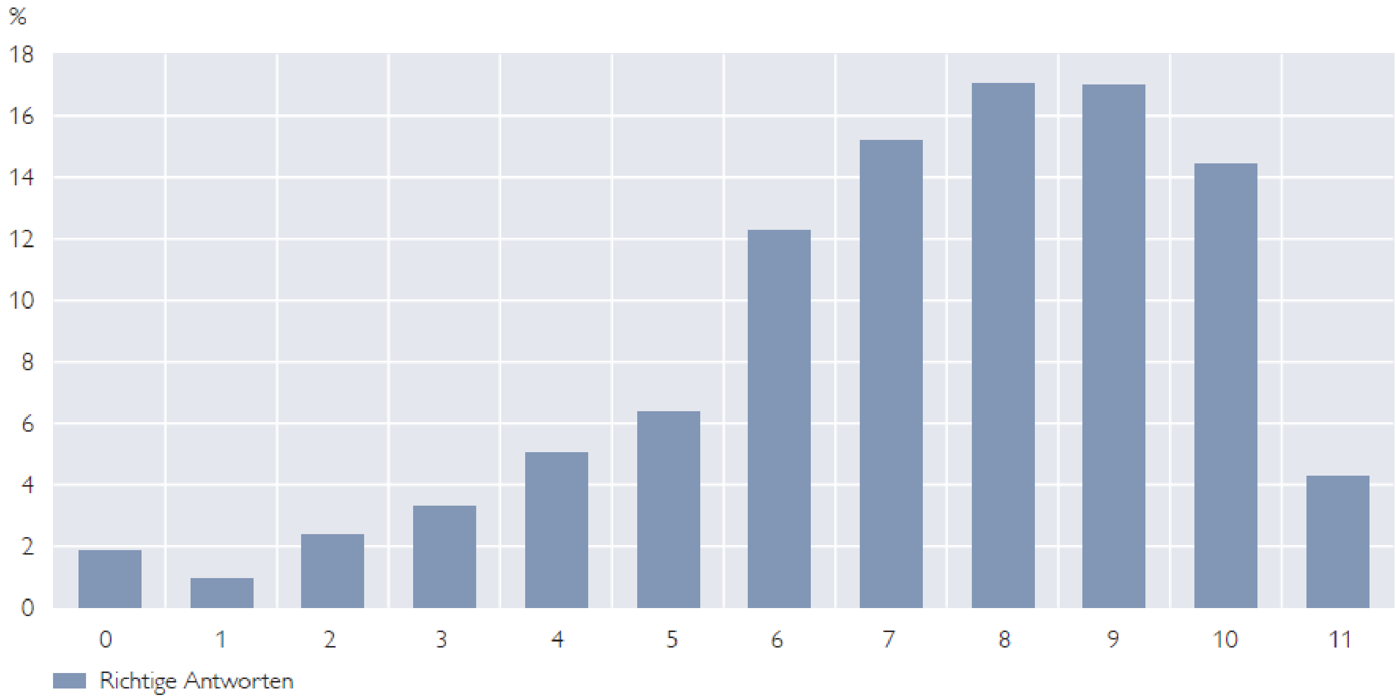
Finanzbildung – Studien

4. **Stellen Sie sich vor, Sie haben einen Kredit in Schweizer Franken aufgenommen und der Euro wertet gegenüber dem Schweizer Franken ab. Was meinen Sie, müssen Sie dann in Euro**
   a) mehr,
   b) genau so viel, oder
   c) weniger zurückzahlen als vorher?
5. **Wenn die Zinsen steigen, was passiert dann üblicherweise mit dem Kurs von Anleihen?**
   a) der Kurs steigt
   b) der Kurs fällt
   c) der Kurs bleibt gleich
   d) es gibt keinen Zusammenhang zwischen dem Kurs von Anleihen und dem Zinssatz
6. **Ist die folgende Aussage richtig oder falsch? Eine Geldanlage mit hoher Rendite ist wahrscheinlich sehr risikoreich.**

(Silgoner/Weber, 2016, S. 41, Auswahl)

Finanzbildung – Ergebnisse

Anteil der Befragten die x Fragen richtig beantworten konnten



Quelle: OeNB.

Anmerkung: Anzahl der Befragten: 1.994.

(Quelle: Silgoner/Weber, 2016, S. 42)

Finanzbildung und Mathematik

- Schätzen
- Grundrechnungsarten
- Prozentrechnung (Bruchrechnung)
- Stochastik
- Optimierung

Lehrplan – Sek I

- 1.4. Arbeiten mit Modellen, Statistik
  - direkte Proportionalitäten erkennen (zB Warenmenge-Geld, Zeit-Weg)
- 3.4. Arbeiten mit Modellen, Statistik
  - lineare Wachstums- und Abnahmeprozesse mit verschiedenen Annahmen unter Zuhilfenahme von elektronischen Rechenhilfsmitteln untersuchen können (zB Zinssätze)

Lehrplan – Sek II

AHS		HTL Cluster 1-5		HUM Cluster 6		HLFS Cluster 7		HAK Cluster 8		BAfEP - BASOP Cluster 9		
LP	sRP	LP	sDP	LP	sDP	LP	sDP	LP	sDP	LP	sDP	
	KK	X	BKA Teil A	X	BKA BKB Teil A Teil B	X	BKA BKB Teil A	X	BKA BKB Teil A Teil B		BKA Teil A	**Zinsrechnung**
				X	BKB Teil B	X	BKB Teil B	X	BKB Teil B			**Rentenrechnung**
				X	BKB Teil B	X	BKB	X	BKB Teil B			**Schuldentilgung**
								X	BKB Teil B			**Investitionsrechnung**
	KK		BKA Teil A Teil B (1, 3, 4, 5)	X	BKA BKB Teil A Teil B	X	BKA BKB Teil A Teil B	X	BKA BKB Teil A Teil B		BKA Teil A	**Kosten- und Preistheorie**

x … wird im Lehrplan erwähnt
KK … wird im Kontextkatalog erwähnt

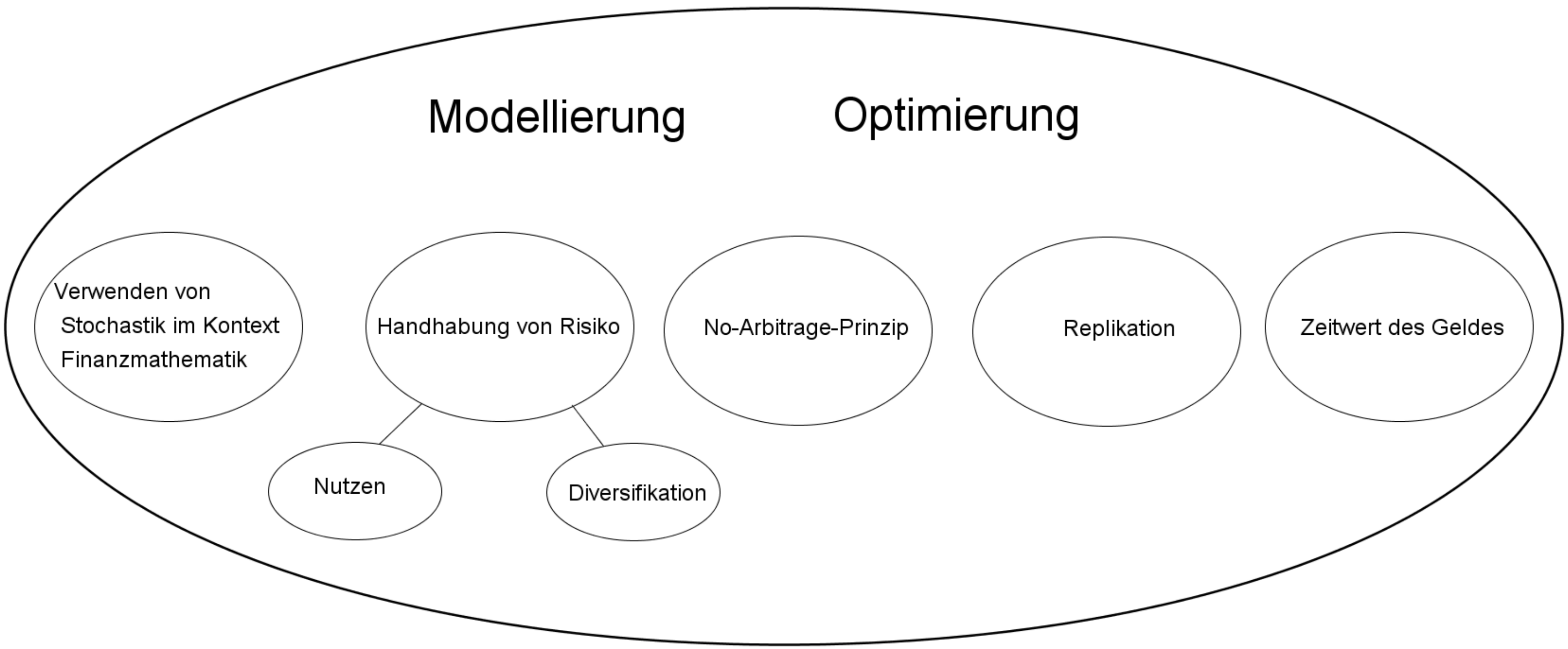
BKA bzw. BKB … wird im Begriffekatalog Teil A bzw. Teil B erwähnt
Teil A bzw. Teil B … wird im Kompetenzkatalog Teil A bzw. Teil B erwähnt

UNI GRAZ

Christian Dorner
Finanzmathematik

(Quelle: Dorner, 2017, S. 48)

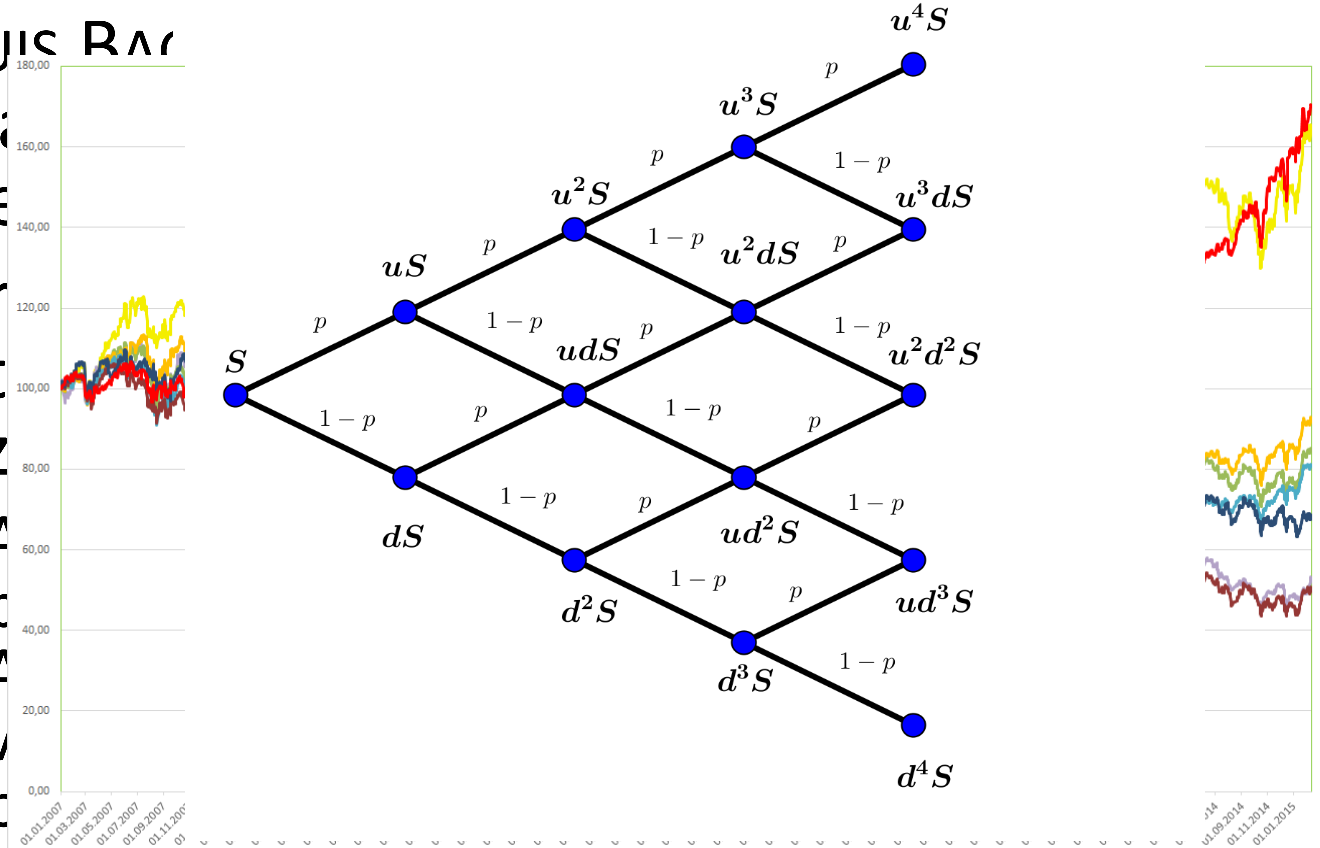
Zentrale Ideen der Finanzmathematik



(Quelle: Dorner, 2017, S. 73)

Verwenden von Stochastik im Kontext FM

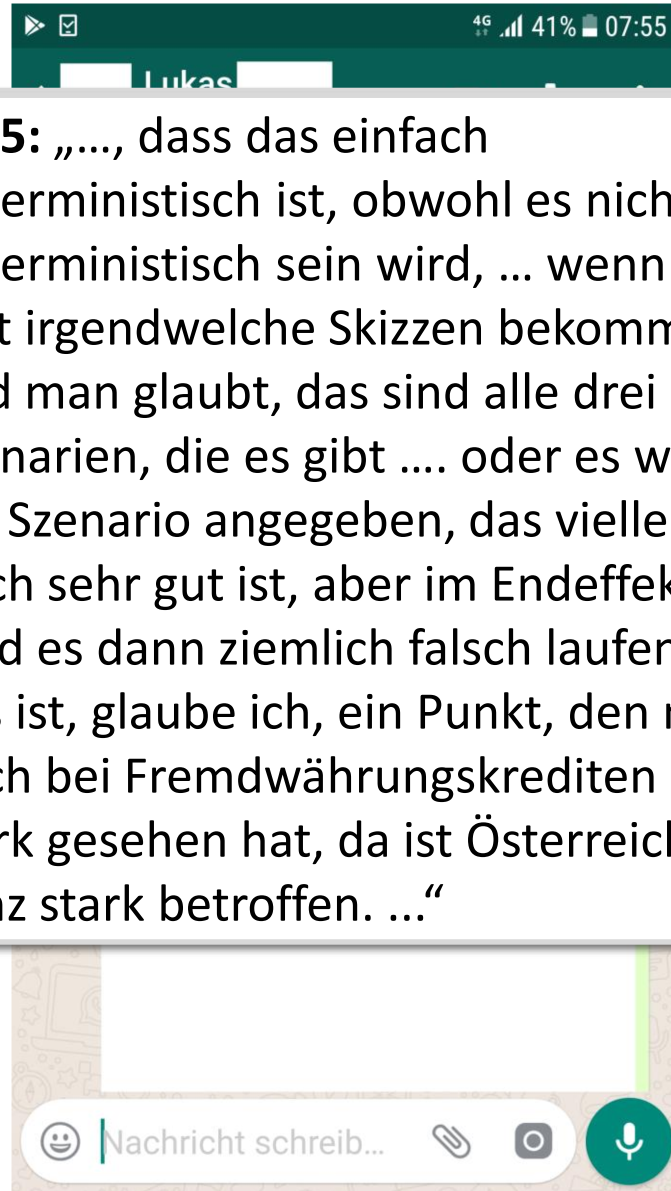
- Louis Ba…
  Fina… …er
  rele…
- Vor…
  det…
  anz…
  – A… …che,
    p…
    A… …cht
    v… …isse
    p…



(Quelle: http://www.financeblog.at/category/aktien/page/4/)

(Quelle: Dorner, 2017, S. 81)

Verwenden von Stochastik im Kontext FM



FM5: „…, dass das einfach deterministisch ist, obwohl es nicht deterministisch sein wird, … wenn man halt irgendwelche Skizzen bekommt … und man glaubt, das sind alle drei Szenarien, die es gibt …. oder es wird ein Szenario angegeben, das vielleicht noch sehr gut ist, aber im Endeffekt wird es dann ziemlich falsch laufen, also das ist, glaube ich, ein Punkt, den man auch bei Fremdwährungskrediten ganz stark gesehen hat, da ist Österreich ganz stark betroffen. ...“

Handhabung von Risiko

- Mesopotamien bis Basel III
- Risikobehaftete Situationen erkennen
-
-

FM1: „... meine Tante möchte auf Nummer sicher gehen, und deswegen hat sie Gold gekauft."

CD: „Richtiges Gold oder Papiergold?"

FM1: „Papiergold natürlich, und ja, auch ein Freund von mir hat Gold und Öl gekauft, um sich abzusichern und beide sind ganz stark gegen Spekulationen. Natürlich ist das genau Spekulation, wenn man Gold und Öl kauft."

No-Arbitrage-Prinzip

- Risikoloses Gewinnen von Geld
- Arbitrage wird in mathematischen Modellen ausgeschlossen: „There is no free lunch at the market!“

Definition 8. (free lunch) The process S admits a free lunch, if there is a random variable $f \in L^\infty_+(\Sigma, F, \mathbf{P})$ with $P[f > 0] > 0$ and a net $(f_\alpha)_{\alpha \in I} = (g_\alpha - h_\alpha)_{\alpha \in I}$ such $g_\alpha = \int_0^T H_T^\alpha dS_t$, for some admissible trading strategy H^α, $h_\alpha \geq 0$ and $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ converges to f in the weak-star topology of $L^\infty(\Sigma, F, \mathbf{P})$. (Kreps, 1981 zitiert nach Schachermayer, 2008, S. 20)

- Verankerung in der alltäglichen Sprache:
  - „Nichts ist umsonst“
  - „Von Nichts kommt Nichts“
  - „Ohne Fleiß kein Preis“

Replikation

- Ein Prinzip zur Bepreisung von Finanztiteln
- Die Idee der Replikation: Black, Merton* und Scholes*
  (*Träger des Alfred-Nobel-Gedächtnispreises für Wirtschaftswissenschaften)

FM3: „… als dritten Strang würde ich schon die Black, Merton, Scholes, die Idee der

$$c(t, S(t)) = S(t) \cdot N\left(\frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot(T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}\right)$$

$$- K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N\left(\frac{\log\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot(T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}\right)$$

es hat enorme Konsequenzen gehabt.“

Zeitwert des Geldes

- Prinzip des Auf- und Abzinsens kommt
  - in der Finanzmathematik nahezu überall vor
  - im Alltag überall vor
    - Sparbuch
    - Kredite
    - Nachrichten
    - Österreichs Jugendliche haben Probleme im Umgang mit Geld
- Momentan … , …
- Inflation

FM6: „Zinsen sind ja allgegenwärtig, vom normalen Konto bis zum Sparbuch, das jedes Kind schon hat“

Auswahlkriterien schulrelevanter Themen der Finanzmathematik

Kriterien für guten (anwendungsorientierten) Mathematikunterricht nach Blum, Jablonka und Winter

- Formale Aspekte
- Eignung
- Authentizität
- Mathematische Aspekte

Aktienkurse und der Zufall

FM6: „… da gibt es, was Aktienhandel anbelangt, den Kahneman mit Thinking Fast and Slow und da gibt es ein recht gutes Kapitel und ein recht lustiges Kapitel, wo sie Experimente gemacht haben, sozusagen Aktienhandel per

Erfolg von diesem Zufallshandel genau gleich wie die Investmentbanker, die mit ausgeklügeltsten Strategien und hochbezahlten Posten und Boni und allem Drum und Dran nach irgendwas handeln, steigen eben um keinen Deut besser aus, weil eben diese Zufallskomponente von Preis- und Aktienentwicklung wahnsinnig unterschätzt wird.“

(Quelle: Dorner, 2017, S. 190)

„Der Begriff ‚Zufall‘ soll im Unterricht thematisiert werden. Dabei soll das Vorverständnis der Schülerinnen und Schüler und die Bedeutungsvielfalt des Begriffes berücksichtigt werden.“

(DÖHRMANN, 2004, S. 60)

Unterrichtssequenz: Kredite und Risiko

- Kredite und Tilgungspläne sind Teil des Mathematikunterrichts.
- Die Aufgaben vermitteln meist einen statischen Eindruck.
- Dynamiken, Risiken werden kaum thematisiert.

Arbeitsblatt 1

- Deterministische Sichtweise
- Betrachtung immer aus der Sicht des/der Kreditnehmers/in
- Einfache Dynamiken

(Quelle: Dorner, 2017, S. 226, verändert)

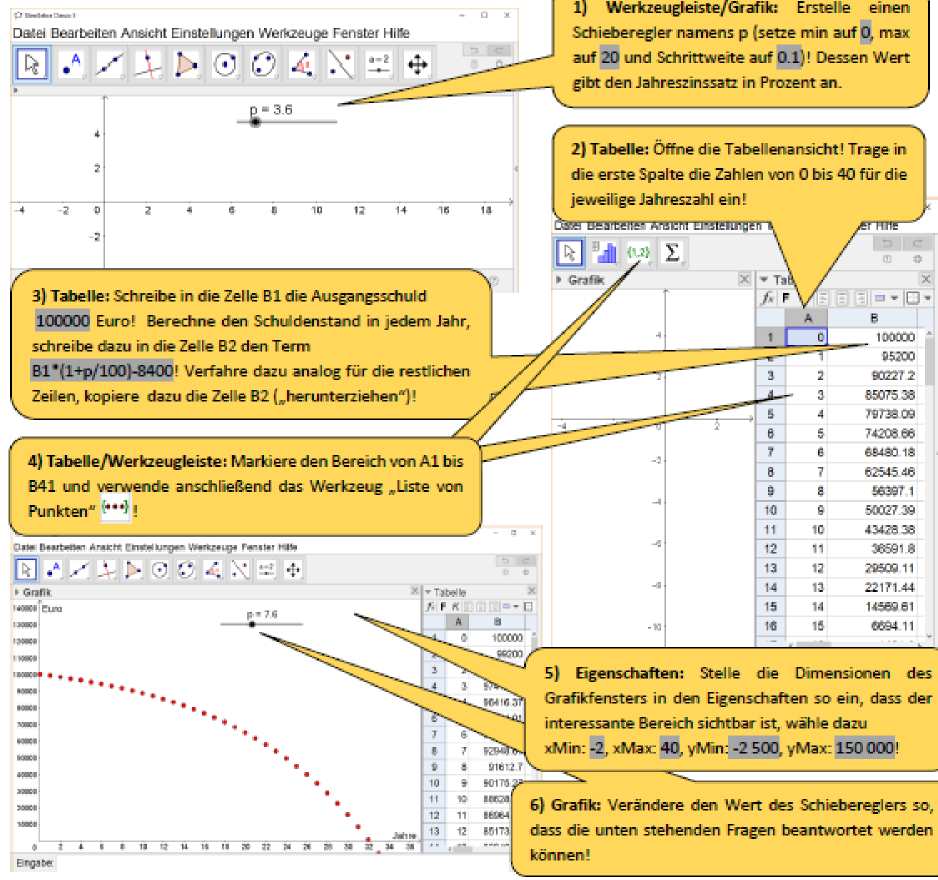
Tilgungsdauer eines Kredits 1

Versetze dich in die Lage, du benötigst 100 000 € und dir bleibt nichts anderes übrig, als einen Kredit aufzunehmen. Bei der Bank erhältst du das links stehende Angebot.

Kreditangebot:
Ausgangsschuld: 100 000 €
jährliche Rate: 8 400 €
Zinssatz (jährlich): p%

Für die Berechnung des jährlichen Schuldenstandes werden zuerst die Zinsen dazugerechnet und dann wird die Rate abgezogen. Das heißt der Schuldenstand nach dem ersten Jahr S_1 berechnet sich durch: $S_1 = 100\,000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) - 8\,400$. Der Schuldenstand im zweiten Jahr beträgt dann $S_2 = S_1 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) - 8\,400$ usw.

Visualisiere die Rückzahlung in einem GeoGebra-Arbeitsblatt, siehe Screenshots und beantworte anschließend die unten stehenden Fragen!



1. Wie lange dauert die Tilgung (gesamte Rückzahlung) des Kredits, wenn der jährliche Zinssatz p%
   a) 0,1%, b) 2,6% c) 8,4% bzw. d) 12,6% beträgt?
2. Beschreibe die Situation bei c) und d) im Kontext!
3. Wie hoch muss der Zinssatz sein, damit der Kredit in 30 Jahren getilgt ist?
4. Wie verändert sich die Tilgungsdauer des Kredits, wenn sich der Zinssatz ändert? Antworte zuerst intuitiv und überprüfe dann deine Vermutung in deinem GeoGebra-Arbeitsblatt!
5. Welche Annahmen sind nicht realistisch?

Arbeitsblatt 2

- Wechsel von deterministischer zu probabilistischer Sichtweise
- Es sollen möglichst viele Szenarien simuliert werden.
- Günstige Szenarien aus der Sicht des/der Kreditnehmer/in sollen erkannt werden.

(Quelle: Dorner, 2017, S. 227, verändert)

Veränderbarer Zinssatz 2

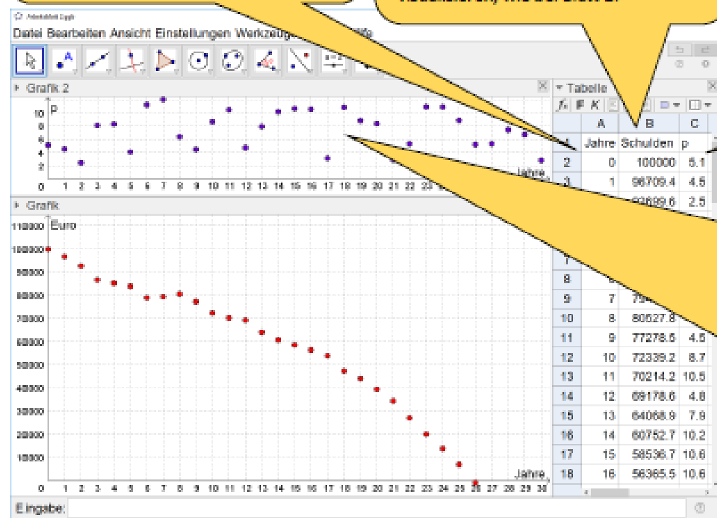
Das vorige Modell geht davon aus, dass der Jahreszinssatz über die Laufzeit konstant bleibt, das stimmt nicht mit der Realität überein. Schwankende Zinssätze stellen das Risiko eines Kredits dar. Diese Gefahr übersehen viele Kreditnehmer/innen. Bei der Aufnahme eines Kredits muss ein Gespräch mit einer/m Bankberater/in geführt werden, dabei werden solche Rückzahlungsszenarien, wie bei der vorigen Aufgabe aufgezeichnet. Der/Die Berater/in zeigt in den meisten Fällen nur einen möglichen Tilgungsplan. Das ist in der Regel ein Diagramm, das für Kreditnehmende günstig ist. Für die Kreditnehmenden schlecht verlaufende Tilgungspläne werden in der Regel nicht gezeigt. Die Bank möchte eben ihre Produkte verkaufen, da ist diese Strategie ganz klar.

Erstelle ein neues GeoGebra-Arbeitsblatt, in dem sich der Jahreszinssatz von Jahr zu Jahr verändert! Modelliere den sich verändernden Zinssatz als Zufallszahl! Öffne ein neues GeoGebra-Arbeitsblatt und folge den Schritten!

1) Tabelle: Öffne die Tabellenansicht! Schreibe in die Zelle A1 Jahre! Trage in die erste Spalte die Zahlen von 0 bis 40 ein!

3) Tabelle/Grafik: Schreibe in die Zelle B1 Schulden! Berechne den jährlichen Schuldenstand und erzeuge wieder eine Liste von Punkten, um diesen zu visualisieren, wie bei Blatt 1!

2) Tabelle: Trage in die Spalte C den Zinssatz ein! Tippe dazu in die Zelle C1 p ein! Gib in die Zellen C2 bis C40 den Befehl ZufallszahlGleichverteilt(2,6) ein, um eine zufällig erzeugte rationale Zahl zwischen 2 und 6 zu bekommen!



4) Tabelle/Grafik: Visualisiere den Verlauf des Zinssatzes ebenfalls durch Punkte! Hinweis: Das Unterlegen zweier Spalten, die nicht nebeneinander liegen, funktioniert durch das Unterlegen der ersten Spalte, dann hält man die Taste STRG gedrückt und unterlegt die zweite Spalte. Nun kann man das Werkzeug "Liste von Punkten" verwenden. Damit die Punkte nur im Grafikfenster 2 angezeigt werden, darf im Eigenschaften-Dialog des Objekts Punkt unter „Erweitert" nur Grafik2 angehakt sein (Bei dem Objekt Liste funktioniert das nicht).

1. Das Drücken der F9-Taste veranlasst eine neue Berechnung der Zufallszahlen. Simuliere durch Drücken der Taste mehrere Rückzahlungsszenarien! Beschreibe die Vorkommnisse!
2. Welche Werte/Verläufe des Zinssatzes sind für den/die Kreditnehmer/in günstig und welche nicht?
3. Vergrößere den Bereich, in dem der zufällige Zinssatz liegen darf, auf das Intervall]0,1 ;12[! Was passiert? Beschreibe die Vorkommnisse!
4. Eine bessere Modellierung: Der Zinssatz des nächsten Jahres soll in einem kleinen Intervall (Wie klein?) um den Zinssatz des aktuellen Jahres liegen (Zufallszahl). Ändere die Spalte C dementsprechend ab und simuliere anschließend mehrere Szenarien! Was fällt dir auf?
5. Ist es überhaupt sinnvoll, den Kreditzinssatz mit Zufallszahlen zu simulieren?

Arbeitsblatt 3

- Warum sind Fremdwährungskredite so risikoreich?
- Wie wird ein Tilgungsplan für einen Fremdwährungskredit erstellt?
- Welche Szenarien sind für den/die Kreditnehmer/in von Vorteil?

(Quelle: Dorner, 2017, S. 228, verändert)

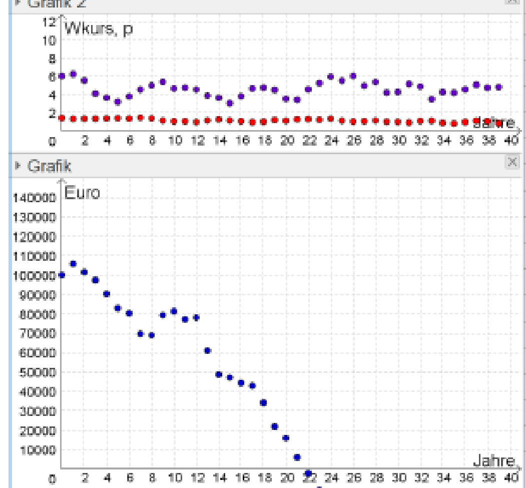
Fremdwährungskredit 3

Lies den Artikel „Der Sündenfall der Banken" (aus „Die Presse" 17.5.2015)!
Wo liegen die Risiken eines Fremdwährungskredits?

Modelliere im Stil der obigen Arbeitsblätter einen Fremdwährungskredit in GeoGebra, wobei sich die Ausgangsschuld auf 100 000 € beläuft! Der Zinssatz und der Wechselkurs sollen sinnvoll mit Zufallszahlen modelliert werden!

<u>Erläuterung zum Fremdwährungskredit:</u> Wir nehmen den Kredit nicht in Euro auf, sondern in Schweizer Franken, also haben wir $100\,000 \cdot wk_0$ Schweizer Franken als Ausgangsschuld (Die Abkürzung wk_n, steht für den Wechselkurs zum Zeitpunkt n, er gibt an wie viele Franken man für einen Euro bekommt.). Das ergibt beispielsweise bei einem Wechselkurs von 1,2 zum Zeitpunkt 0 einen Wert von 120 000 CHF. Nun kommt die Tilgungsgleichung ins Spiel. Die Ausgangsschuld wird verzinst, also 120 000·(1 + p/100). Zum Zeitpunkt 1 erfolgt ein Abzug der Rate von 8 400 Euro. Die Umrechnung der Rate in Schweizer Franken darf nicht vergessen werden. Nach der ersten Zinsperiode ergibt sich ein Schuldenstand von $100\,000 \cdot wk_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) - wk_1 \cdot 8\,400$ in Schweizer Franken. Um die einzelnen Kredite untereinander vergleichen zu können, muss der jeweilige Schuldenstand wieder in Euro umgerechnet werden. Für den Schuldenstand zum Zeitpunkt 1 erhält man $S_1 = \frac{100\,000 \cdot wk_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right) - wk_1 \cdot 8\,400}{wk_1}$.

Datei Bearbeiten Ansicht Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe



Tabelle

	A	B	C	D	E
1	Jahre	Schulden Euro	Schulden CHF	Wkurs	p
2	0	100000	139459.4	1.4	6
3	1	105749.2	137207.4	1.3	6.2
4	2	101524.9	133707.5	1.3	5.5
5	3	97320.8	128086.4	1.3	4.1
6	4	90258	121412.5	1.3	3.6
7	5	82912.6	113746.8	1.4	3.2
8	6	80316.7	106845.6	1.3	3.8
9	7	69701.6	99650.4	1.4	4.5
10	8	68977.5	93226.5	1.4	4.9
11	9	79351.6	88821.1	1.1	5.4
12	10	81242.7	84222.6	1	4.6
13	11	77169.9	79534.3	1	4.7
14	12	78039.8	75040.2	1	4.5
15	13	61039.2	68494.3	1.1	3.8
16	14	48636.1	60510	1.2	3.6

Eingabe:

1. Erkläre, warum bei der Berechnung für S_1 durch wk_1 dividiert wird!
2. Welche Werte/Verläufe des Zinssatzes sind für den/die Kreditnehmer/in günstig und welche nicht?
3. Wie hast du den Wechselkurs simuliert?
4. Welche Verläufe des Wechselkurses sind für den/die Kreditnehmer/in günstig und welche nicht?
5. Welche Szenarien sind für den/die Kreditnehmer/in günstig?
6. Ist es sinnvoll, den Wechselkurs mit Zufallszahlen zu simulieren?
7. Woran sieht man in deiner Modellierung, dass ein Fremdwährungskredit risikoreicher als ein Kredit wie bei Arbeitsblatt 2 ist?

Antworten der Schüler/innen – Frage: AB 1

1) Wie lange dauert die Tilgung (gesamte Rückzahlung) des Kredites, wenn der Zinssatz a) $p = 0{,}1\%$ b) $p = 2{,}6\%$ c) $p = 8{,}4\%$ und d) $p = 12{,}6\%$ beträgt?

2) Beschreibe die Situation bei c) und d) in eigenen Worten!

2)

c) Der Schuldenstand bleibt immer

$S_1 = 100.000 \cdot \left(1 + \frac{8,4}{100}\right) - 8400 = \ldots$

$108.400 - 8400 = \underbrace{100.000}$

und dieser Schuldenstand in die nächsten Jahre auch

2) c) die ... so

viel ... bestehend,

bleib...

d) Die ... 1. Der

Schu... gesehen

Bedingu...

2) Beide würden sehr lange dauern

$S_2 = 104.200 \cdot \left(1 + \frac{12,6}{100}\right) - 8400 =$

$117.329{,}2 - 8400 = \underline{\underline{108.929{,}2}}$ usw.

Antworten der Schüler/innen – Frage: AB 2

2) Welche Verläufe des Zinssatzes sind für den/die Kreditnehmer/in günstig und welche nicht?

2.) ~~das~~ Je niedriger der Zinssatz, desto besser.
Je höher, desto schlechter

Antworten der Schüler/innen – Frage: AB 3

4) Welche Verläufe des Wechselkurses sind für den/die Kreditnehmer/in günstig und welche nicht?

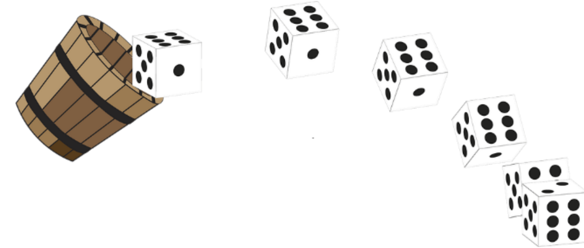
4) hoher Wechselkursverlauf: Wenn der Wechselkurs „hoch" ist; muss weniger zurückgezahlt werden, weil man die Schulden durch den Wechselkurs dividieren muss.

sehr iedrig

Diversifikation

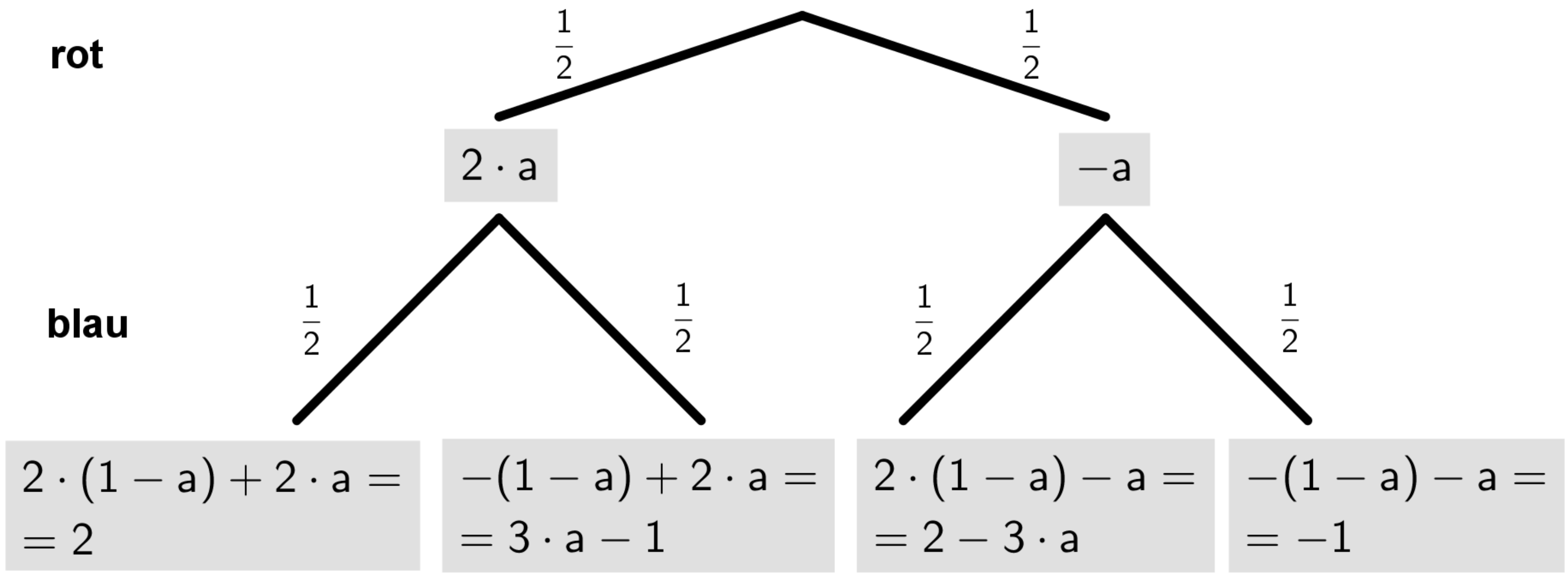
FM3: „Die nächste fundamentale Idee scheint mir von Markowitz, die Portfoliotheorie. Also die Idee, dass - man mit Begriffen hantiert, die auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Konzepten basieren, eben Varianz - und Erwartungswert, und dass man hier eine Optimierung durchführt, das erscheint mir außerordentlich wichtig und konzeptionell neu.“

Diversifikation



Es gibt einen **fairen roten und einen fairen blauen Würfel**. Man gibt sich selbst einen Einsatz für dieses Spiel vor und bestimmt einen Teil des Einsatzes, der auf den roten Würfel gesetzt wird. Der restliche Betrag des Einsatzes wird auf den blauen Würfel gesetzt. Es werden beide Würfel geworfen. Wenn der rote Würfel die Augenzahl **1, 2 oder 3** anzeigt, dann bekommt man das **Dreifache** des auf den roten Würfel gesetzten Betrags, im anderen Fall, also wenn der rote Würfel die Augenzahl **4, 5 oder 6** anzeigt, dann **verliert man den gesetzten Betrag**. Für den **blauen Würfel gilt genau dasselbe**. Wenn der blaue Würfel die Augenzahl 1, 2, oder 3 anzeigt, dann bekommt man das Dreifache des auf den blauen Würfel gesetzten Betrags, im anderen Fall verliert man diesen Betrag. **Wie soll der Einsatz auf die Würfel aufgeteilt werden?**

Diversifikation



$$E(X) = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot (3a-1) + \frac{1}{4} \cdot (2-3a) + \frac{1}{4} \cdot (-1) = $$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot [(3a-1) + (2-3a)] = $$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

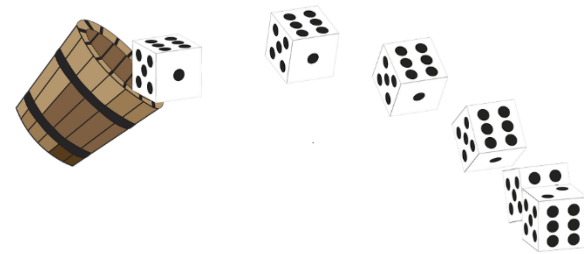
$$V(X) = \frac{1}{4} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(3a - 1 - \frac{1}{2}\right)^2 + $$
$$+ \frac{1}{4} \cdot \left(2 - 3a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 = $$
$$= \frac{9}{4} \cdot (2a^2 - 2a + 1) = \frac{9}{2} \cdot \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

(Quelle: Dorner, in Druck, S. 2 f.)

Diversifikation

- Der Finanzmarkt als Würfelspiel
  - Würfel $\rightarrow$ Aktie
  - Gewinnauszahlungsfaktor $\rightarrow$ Rendite
- Zwei Aktien A und B im Portfolio
  - Zu erwartende Monatsrendite jeweils 4%
  - Zu erwartendes Risiko (Monat) jeweils 7%
  - $E(X) = a \cdot E(X_1) + (1-a) \cdot E(X_2) = 0{,}04$
  - $V(X) = a^2 \cdot V(X_1) + (1-a)^2 \cdot E(X_2) = 0{,}0098a^2 - 0{,}0098a + 0{,}0049$

Diversifikation



Wenn der rote Würfel die Augenzahl **1, 2 oder 3** anzeigt, dann bekommt man das **Zwanzigfache** des gesetzten Betrags, im anderen Fall, also wenn der rote Würfel die Augenzahl **4, 5 oder 6** anzeigt, dann bekommt man das **Zehnfache** des gesetzten Betrags ausbezahlt. Wenn der blaue Würfel die Augenzahl **1, 2, oder 3** anzeigt, dann gewinnt man das **Doppelte** des gesetzten Betrags, im **anderen Fall verliert man das Doppelte** des gesetzten Betrags.

Antworten der Schüler/innen – Frage: AB 1

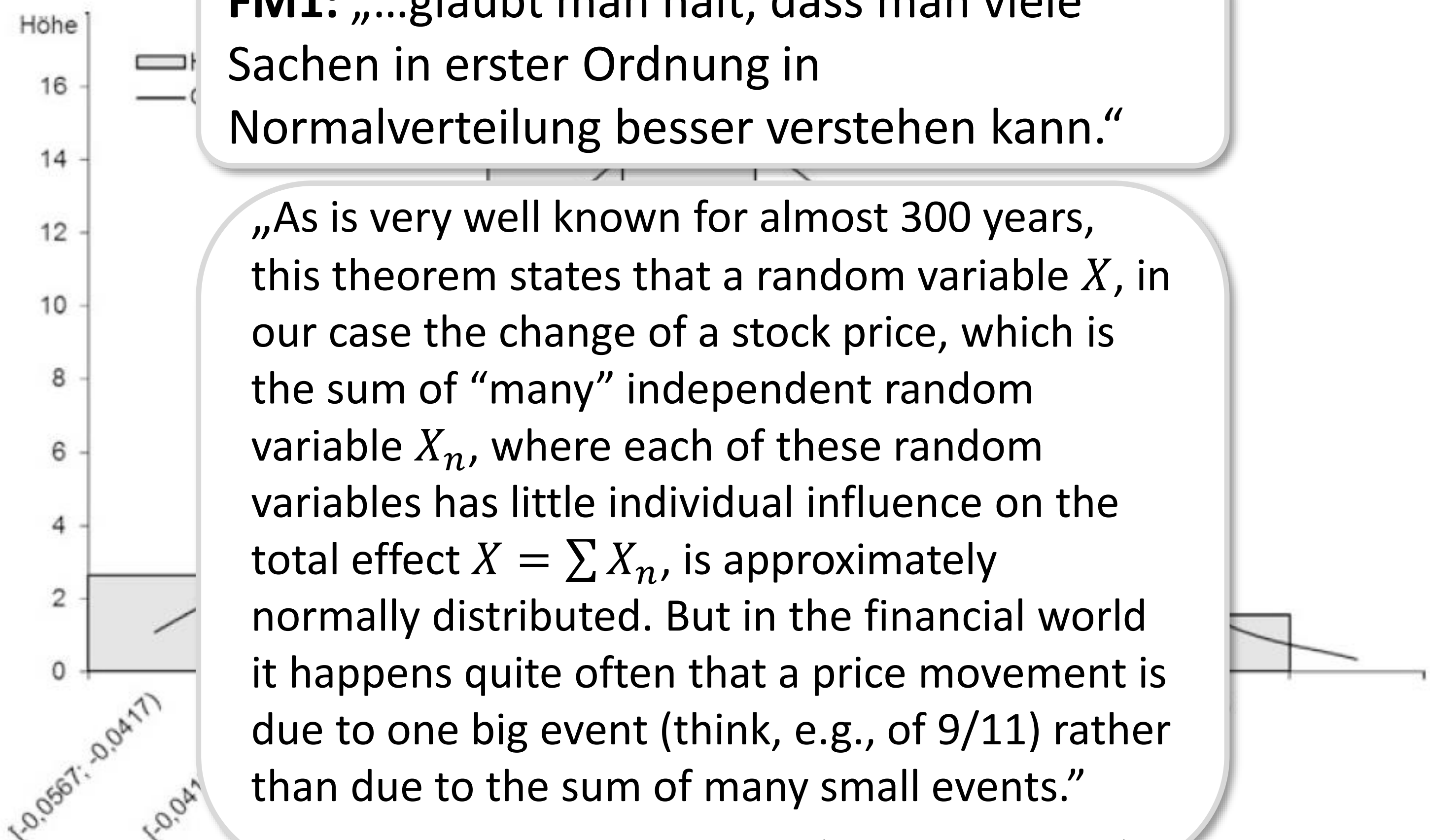
Ergebnis: Wie würdest du einer Person, die an dem Spiel teilnehmen möchte, raten die Aufteilung vorzunehmen?

Ergebnis: Da der Erwartungswert

- Wir würden die Strategie 50:50 nehmen, da hierbei der Gewinn im Durschnitt am nahesten ~~vom~~ um den Erwartungswert streut. Somit ist die Wahrscheinlichkeit geringer, dass ein Minus gemacht wird.

Dies ist nicht immer gegeben.

Aktienkurse und Normalverteilung



FM1: „…glaubt man halt, dass man viele Sachen in erster Ordnung in Normalverteilung besser verstehen kann.“

„As is very well known for almost 300 years, this theorem states that a random variable X, in our case the change of a stock price, which is the sum of “many” independent random variable X_n, where each of these random variables has little individual influence on the total effect $X = \sum X_n$, is approximately normally distributed. But in the financial world it happens quite often that a price movement is due to one big event (think, e.g., of 9/11) rather than due to the sum of many small events.”

(Schachermayer, 2016, S. 44)

(Quelle: Daume, 2016, S. 249)

Literatur

- Blum W. (1987): Einkommensteuern als Thema des Analysisunterrichts in der beruflichen Oberstufe. In: Die berufsbildende Schule, Zeitschrift des Berufsverbandes der Lehrer an beruflichen Schulen, S. 642-651.
- DAUME P. (2016): Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht. Band I Zinsen, Steuern und Aktien. Springer-Verlag, Wiesbaden.
- DÖHRMANN M. (2004): Zufall, Aktien und Mathematik: Vorschläge für einen aktuellen und realitätsbezogenen Stochastikunterricht. Dissertation, Verlag Franzbecker, Hildesheim/Berlin.
- DORNER C. (2017): Schulrelevante Aspekte der Finanzmathematik. Dissertation, Universität Wien.
- DORNER C. (2018 in Druck): Würfeln am Finanzmarkt. In: Stochastik in der Schule.
- FUHRMANN B. (2016/17): Finanzbildung in Österreich – Ergebnisse der OECD – Measuring Financial Literacy – Studie und Desiderata. In: wissenplus, 3, S. 15-19.
- JABLONKA E. (1999): Was sind „gute“ Anwendungsbeispiele? Aus: Maaß J. und Schlöglmann W. (Hrsg.), Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Verlag Franzbecker, Hildesheim, S. 65-74.
- LUSARDI A. und MITCHELL O. S. (2014): The Economic Importance of Financial Literacy: Theory and Evidence. In: Journal of Economic Literature.
- SCHACHERMAYER W. (2008): The Notion of Arbitrage and Free Lunch in Mathematical Finance. Aus: Yor M. (Hrsg.), Aspects of Mathematical Finance, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, S. 15-22.
- SCHACHERMAYER W. (2016): Mathematics and Finance. Aus: Wolfgang König (Hrsg.), Mathematics and Society, 7th European Congress of Mathematics (7ECM) & Congress of the European Mathematical Society, European Mathematical Society Publishing House Zürich, S. 37-50.
- SILGONER M. UND WEBER R. (2014): Das Finanzwissen der Österreichischen Haushalte. In: Oesterreichische Nationalbank (Hrsg.), Statistiken – Daten & Analysen, S. 40-48.
- WINTER H. W. (2016): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblick in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. (3. Au.), Springer-Verlag, Wiesbaden.

Internet

- http://orf.at/stories/2208386/2208367/, 29.11.2013.
- https://derstandard.at/2000006072108/Finanz-Analphabeten-Wenig-Ahnung-vom-Geld, 26.9.2014.
- https://derstandard.at/2000010448802/Keine-Ahnung-von-Steuern-aber-ich-kann-Gedichte-analysieren, 15.1.2015.
- https://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/5337599/WUStudie_Blankes-Konto-und-kaum-Finanzwissen-bei-Jugendlichen, 13.12.2017
- https://derstandard.at/2000071435892/Konsumentenschuetzer-fordern-Rolle-vorwaerts-bei-Umgang-mit-Geld, 7.1.2018.