Applets als Bereicherung der Ausbildung in Stochastik in der Schule

Manfred Borovcnik, Institut für Statistik, Universität Klagenfurt

Ziele des Vortrags

1. Aus einem Kriterienkatalog zu Blended Learning
2. Entscheidungen zu den wesentlichen Fragen
3. Aufbau einer Bibliothek von XL-Files für den Unterricht
4. Exemplarische Applets in XL
5. Zusammenfassung

ÖMG, Wien, 6. 4. 2018

Ziele des Vortrags

Mathematische Einsichten durch Explorieren nachvollziehen:

- durch Probieren,
- durch Simulieren,
- Visualisieren,
- Nachverfolgen der Wirkung von Änderungen.

Excel als geeignetes Medium darstellen, das den Prozess des Probierens, Simulierens, … unterstützt und damit interaktives Lernen ermöglicht.

Das Verhältnis zwischen Intuitionen und Mathematik stärken und damit stabile Vorstellungen von der Art und Relevanz der Begriffe zu bekommen.

1. Aus einem Kriterienkatalog zu Blended Learning

1. Die Entscheidung über die Software

Software ist nützlich

- für umständliche Berechnungen (häufig in der Statistik)
- für graphische Darstellungen (ein Wesen der Statistik)
- um komplexe Begriffe über Animation und Simulation zu veranschaulichen.

Die Entscheidung für eine bestimmte Software hat einen wesentlichen Einfluss auf die Arbeitsbelastung der Studierenden.

5. Entwickeln von geeigneten Applets

- Was sind entscheidende, geeignete Kriterien für gute Applets?
- Wie tauscht man diesbezügliche Ideen zwischen den beteiligten Lehrern aus?

2. Entscheidungen zu den wesentlichen Fragen

Für die Software (# 1 der Liste)

Extra-Aufwand zum Computing demotiviert viele Schüler bzw. auch Studenten. Wir wählen für den Einstieg Excel (XL):

- XL wird in vielen Kursen benötigt;
- XL ist in der Arbeitswelt sehr weit verbreitet;
- Schon Schüler haben rudimentäre Fertigkeiten darin;
- XL ist einfach für die grundlegenden Dinge; und
- XL ist sehr flexibel, um Effekte “on demand” zu zeigen, wenn eine Frage auftaucht und direkt beantwortet werden soll.

Natürlich ist XL von eingeschränktem Nutzen, wenn man auf höhere Ebenen gelangt (aber nur eine Minorität der Schüler wird das wirklich benötigen).
Mathematik durch einen Programmieraufwand zu ersetzen (wie etwa R) ist wenig überzeugend für Schüler.

Entwickeln geeigneter Applets (# 5)

Excel muss nachgebessert werden. Wir haben vorbereitet:

- Spezielle Templates um die Lücken zu schließen (Boxplot, Histogramm, Tabelierte Daten).
- Dynamische Animationen, um Eigenschaften von Begriffen zu klären.

Was ist eine effektive Visualisierung – Kriterien fehlen derzeit noch.

Automatische Anpassung der Skalen, wenn man den Einfluss eines Parameters erforschen will?

3. Aufbau einer Bibliothek von XL-Files für den Unterricht

wwwg.uni-klu.ac.at/stochastik.schule/Boro/index_inhalt

oder Borovcnik und Excel googeln.

Die meisten der Animationen und Simulationen sind in XL geschrieben. Im jetzigen Stadium sind sie in Kurse & Lehrmaterialien eingebunden. Es ist daran gedacht, sie selbstständig lesbar zu machen.

EXCEL-Kniffe

- Absolute und relative Adressierung
- Mehrfachoperationen
- Graphen zeichnen – ein Template

Animationen und Darstellung der Methoden

Mittelwert und Verteilung

Mittelwert und Median

Lorenzkurve und Konzentrationsmaße

Templates zur beschreibenden Statistik

Berechnungen mit tabellierten Daten aus Sekundärstatistiken

Histogramm

Boxplot

Kernschätzer

Verteilungsfunktion (ansteigend und absteigend)

Verständnis der Grundbegriffe

Wartezeitprobleme – Geometrische Verteilung

Erwartungswert und Varianz von Summen von Zufallsvariablen

Gesetze der Großen Zahlen

Zufällige Schwankungen bei Stichproben –
Konvergenz & Divergenz

Stichproben

Einfache Zufallsstichproben gegen geschichtete Stichproben

Wahrscheinlichkeitsrechnung ctd

Zentraler Grenzverteilungssatz und Approximation von Verteilungen

Normalapproximation zur Binomialverteilung

- -mit Verteilungen
- -mit Simulation

Normalisierung der Verteilung von Mittelwerten

- -bei symmetrischen Verteilungen
- -bei schiefen Verteilungen

Beispiel mit konkreten Berechnungen

Bayes-Probleme

Diskrete Verteilungen

Stetige Verteilungen

Stochastische Modellierung

Brechen von Spaghettis in 3 Teile M 1 M 2 M 3

Erklärung anderer „Effekte“ durch reinen Zufall

Placebo-Effekt und Regression zur Mitte

Eine stochastische Erklärung des N-Effekts

Beispiele

Risiko einer Überbelegung: mehr Tickets als Plätze verkaufen?

Spam

Telefonrechnungen

Geburten

Templates

Normalverteilung Dichte und Verteilungsfunktion

Normalverteilung: Berechnungen (Wahrscheinlichkeiten & Quantile)

Beurteilende Statistik

Informelle Inferenz

Mit Beobachtungen verträgliche Parameterwerte (p-Werte)

Kleine Stichproben   Größere Stichproben

Streuung der Schätzwerte aus Stichproben (Schichtung?)

Eigenschaften wiederholter Schätzung

a. bei einem unbekannten Lotto

b. bei einer Exponentialverteilung

Statistische Tests

Modellieren von Fragestellungen & grundlegende Eigenschaften

Gütefunktion beim Testen

Beurteilende Statistik

Konfidenzintervalle

Deutung der Überdeckungswahrscheinlichkeit

Resampling

Ein neuer Ansatz zur statistischen Beurteilung

Spezielle Tests

- t-Test, Welch-Test
- Vergleich von Mittelwerten
- Weitere Testverfahren

Weitere Problemstellungen und Verfahren

Zusammenhänge zweier Merkmale

Korrelation und Punktwolken

Test eines Korrelationskoeffizienten auf Signifikanz

Korrelation und Regression

Fallstricke zu Korrelation und Regression

Varianzanalyse

Aufgabenstellung einschließlich Prüfen der Voraussetzungen

Zweifache Varianzanalyse

4. Exemplarische Applets in XL

Mittelwert, Boxplot und Histogramm
Exploration des Zufalls

Exploration des Poisson-, Exponential, Normal-Modells

Eine endliche Version des Zentralen Grenzwertsatzes

Link zwischen Stichprobenmittelwert und Population

Vergleich eines Stichprobenmittelwerts mit einer „Population“

Binomial-Modell und Exploration eines plausiblen p’s

Kontrollkarten und statistische Tests

Konfidenzintervalle – Interpretation und Berechnungen

Explorativer, informeller Zugang zu Verteilungen als Modelle, zum Zentralen Grenzverteilungssatz und zur statistischen Inferenz

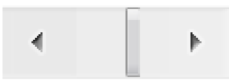
Mittelwert als „Schwerpunkt“ der Daten

Rohdaten, geordnet

1
1
1
1
1
2
2
2
2
2
2
3
3
15
15
15
15
15
15
15
15

Tabellierte Daten

Werte x_i	Häuf. a_i	Wert × Häuf.	Mittelwert	Zeichnung
1	5	5		
2	6	12		
3	2	6		
15	8	120		
	21	143	6,81	10



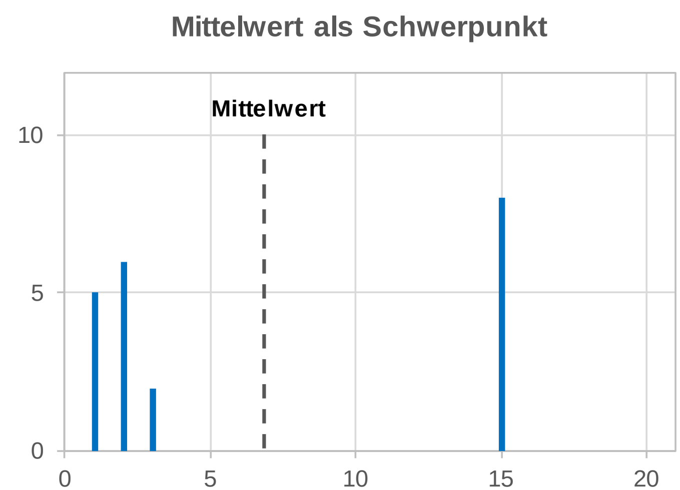
Den größten Wert kann man durch den Regler verschieben.

Stabdiagramm mit absoluten Häufigkeiten

Gezeichnet mit Punktdiagramm (x,y).
Die Stäbe als formatierte Fehlerindikatoren (100%, vertikal).
Normalerweise zeigt man die relativen anstelle der absoluten Häufigkeiten.

Bildlaufliste clicken und damit den obersten Wert ändern

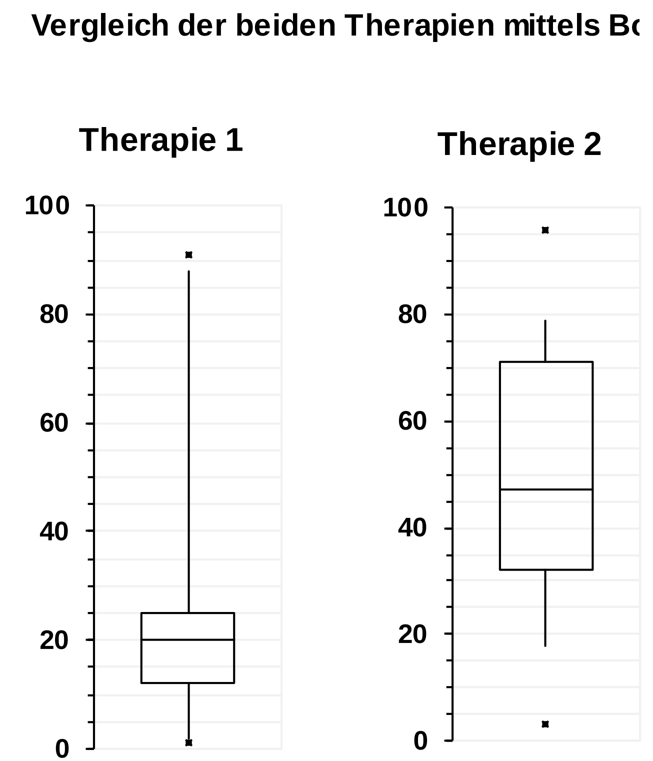
Die Auswirkung auf das Stabdiagramm und den Mittelwert ansehen.
Was kann ein Mittelwert über die Daten aussagen?
Mitte, repräsentativer Wert, Schwerpunkt,
ein besonders häufiger Wert der Datenliste, … ?



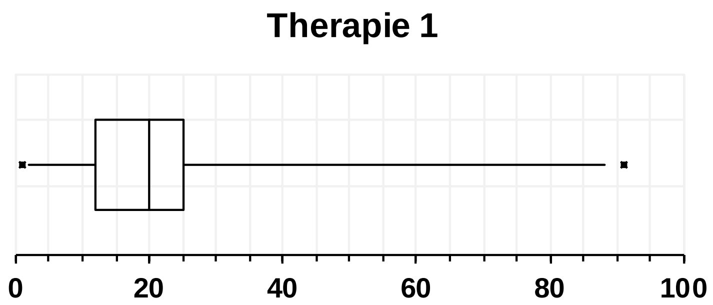
Vergleich zweier Therapien mit Kennziffern und Boxplot

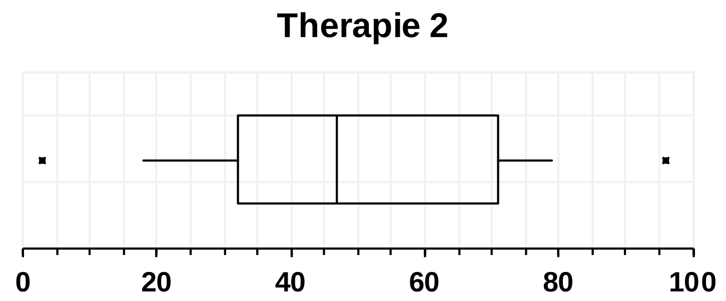
Therapie 1	*Therapie 2*
20	26
12	39
21	33
2	71
22	3
29	42
88	32
21	62
19	73
25	23
12	18
91	31
67	74
26	96
17	49
20	63
8	71
20	55
1	38
5	47
11	79

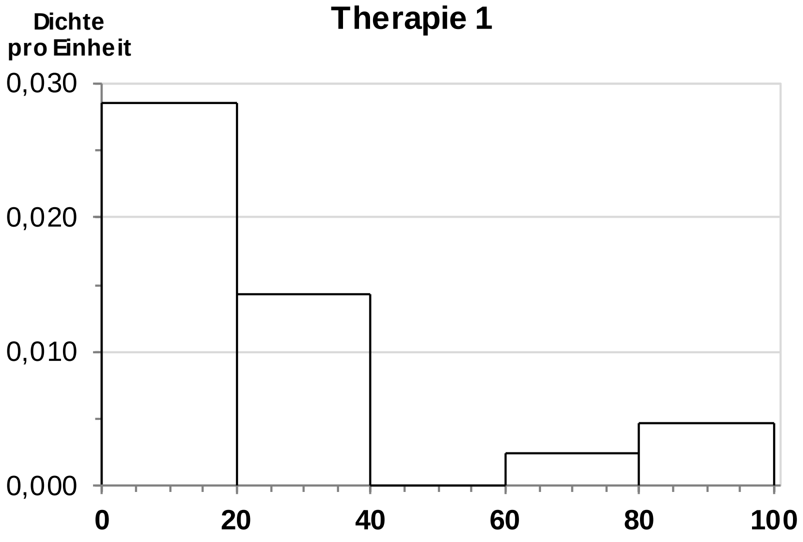
		Therapie 1	*Therapie 2*
	n	21	21
	Mittelwert	25,57	48,81
	Varianz	632,16	555,16
	Standardabweichung	25,14	23,56
0,25	$x_{0,25}$	12,00	32,00
0,50	Median	20,00	47,00
0,75	$x_{0,75}$	25,00	71,00
	IQR	13,00	39,00
	min	1,00	3,00
	max	91,00	96,00
	Range	90,00	93,00

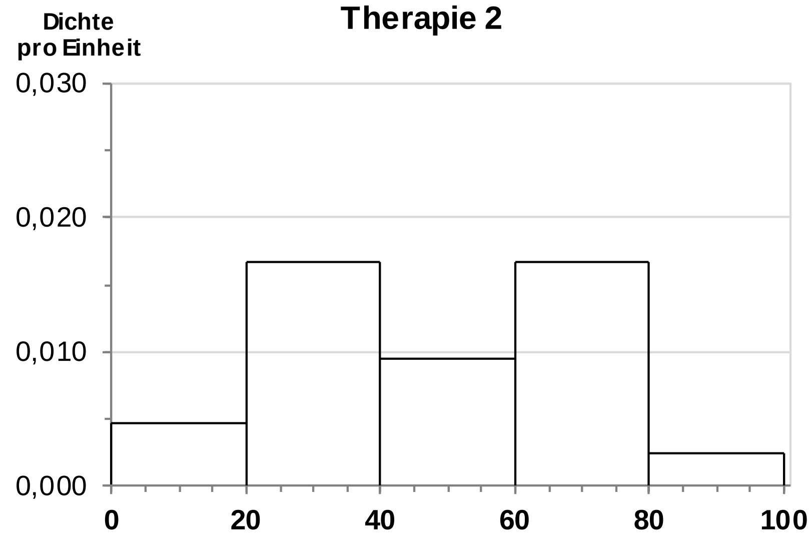


Vergleich von Boxplot und Histogramm zur Darstellung der Verteilung

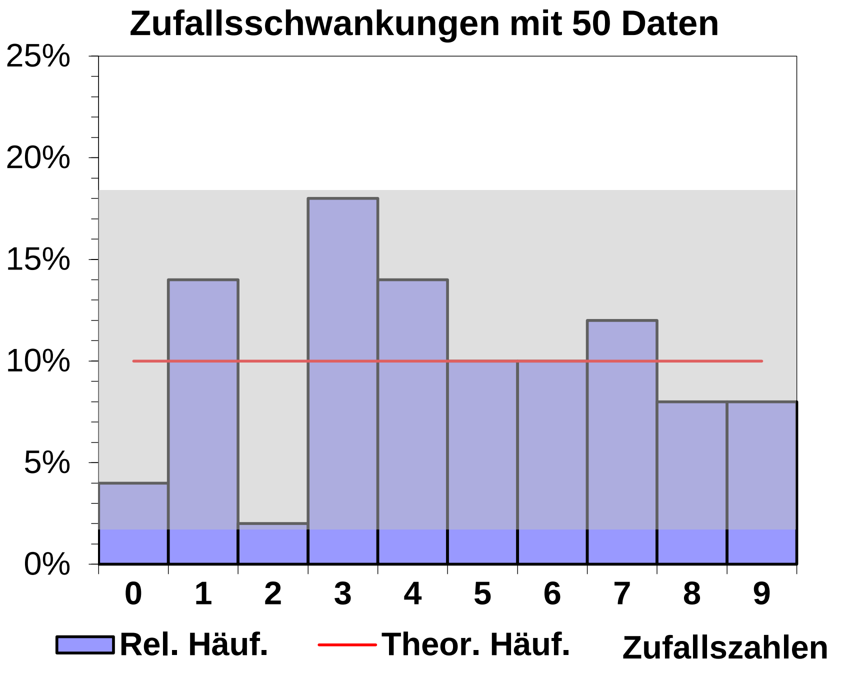


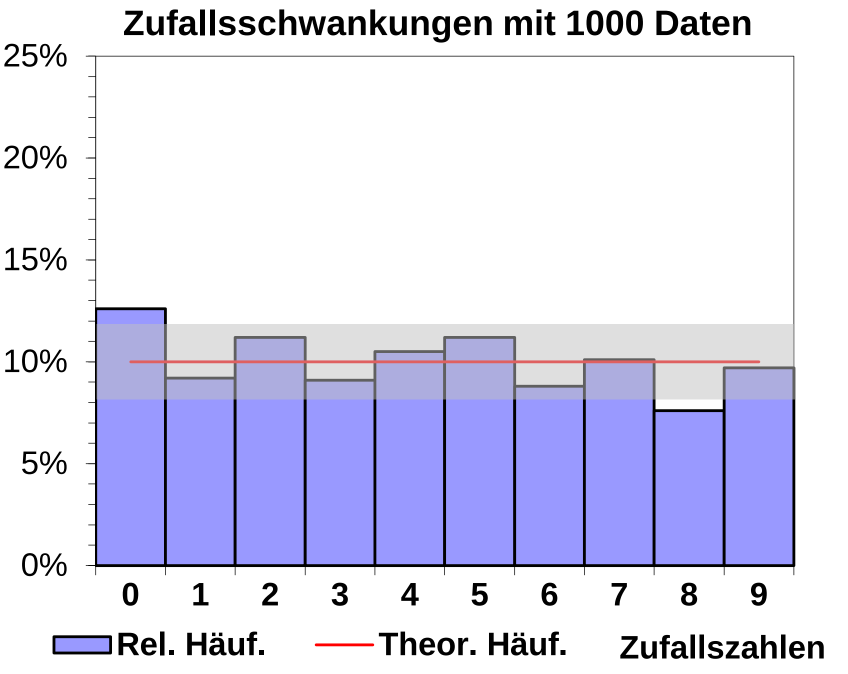






Exploration des Zufalls





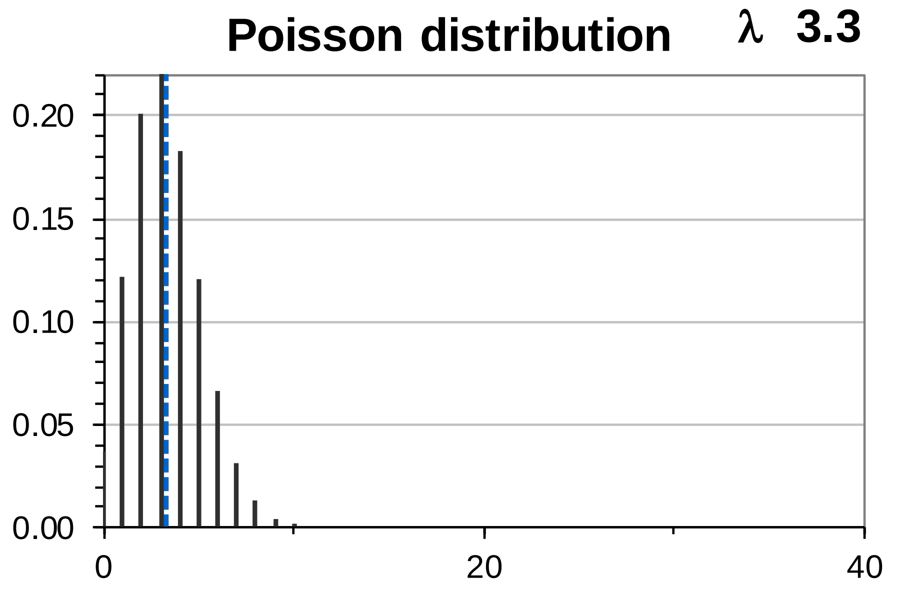
Exploration des Poisson-Modells

Poisson family

λ

3.3

To increase lamda shows how the symmetry gets better

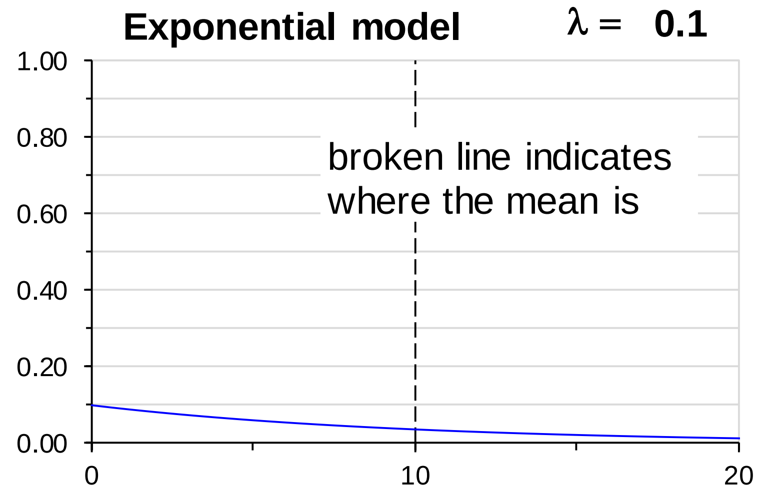


Exploration des Exponential-Modells

Exponential model

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\geq 0,\ \lambda>0$$

Parameter	E	V
λ	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
0.1	10.0000	100.0000
	1	

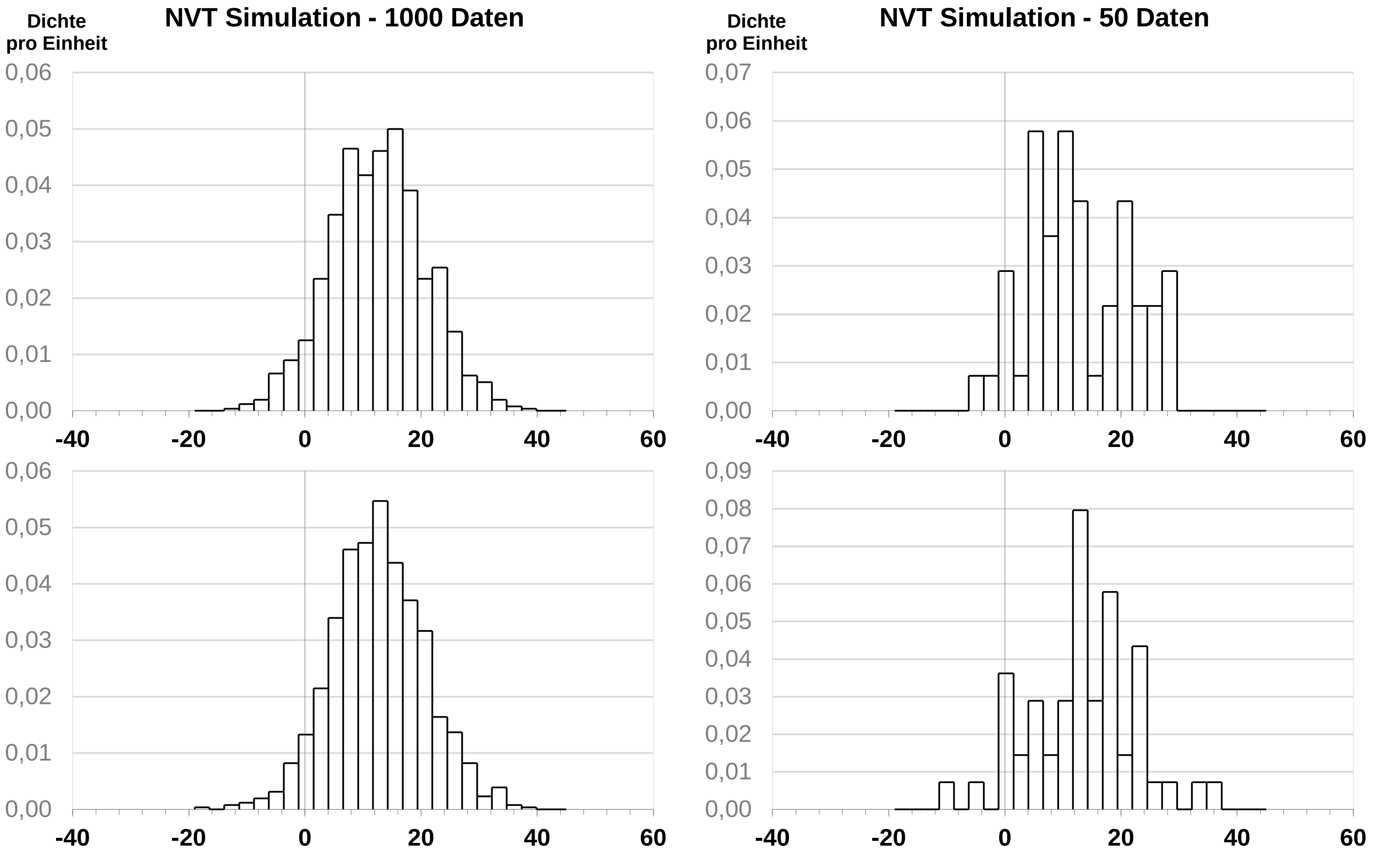


The mean is not well suited to describe the centre of this distribution

In fact, in reliqability theory, quantiles and survival times are more important.
An upper quartil might be better for modelling life times
However, to estimate it, many data are needed

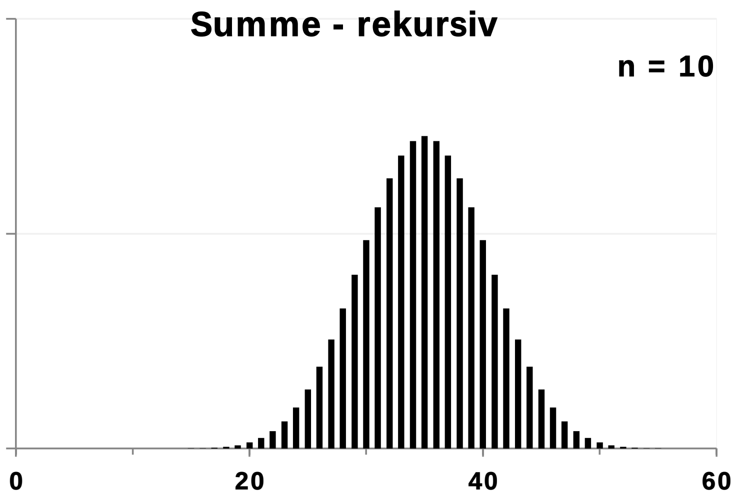
With the idea of mean values of samples piling up and getting normal (Central Limit Theorem)
 - supported by simulation, one might see that the mean
might be precisely estimated from medium sized samples.

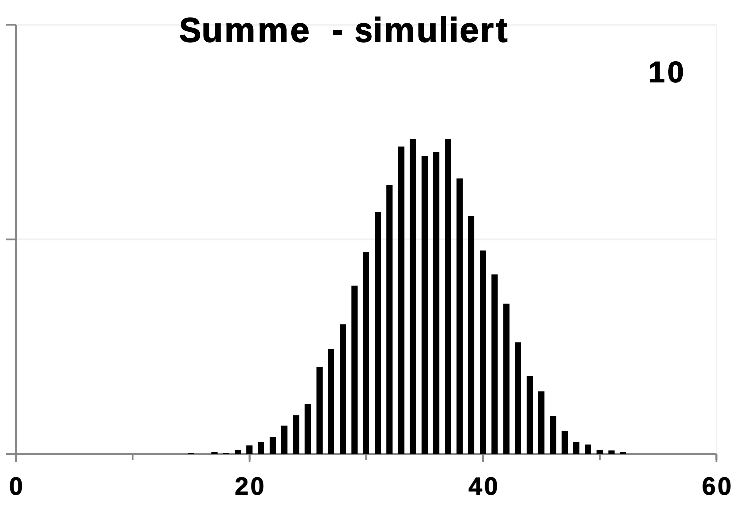
Exploration des Normal-Modells per Simulation



Die Simulation mit 1000 Daten zeigt ein stabiles, glockenförmiges Muster; mit 50 Daten wird ein erratisches Bild einer eingipfeligen Verteilung erzeugt.

Eine endliche Version des Zentralen Grenzverteilungssatzes





Statt zu simulieren, kann man die Verteilung der Summe auch rekursiv berechnen.

Das hat den Vorteil, dass die Fluktuation bei Simulation wegfällt.

Das Muster wird daher viel besser erkennbar.

Der Link zwischen Mittelwert aus Stichproben und der Population

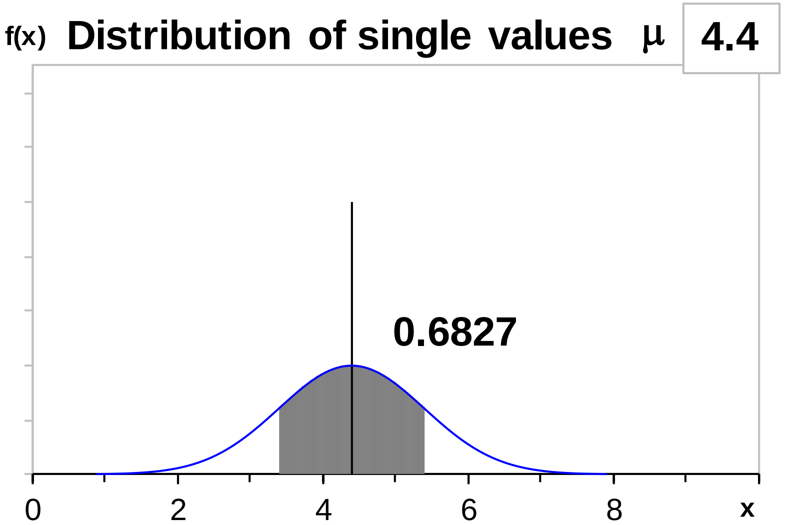
μ	σ	n
4.4	1	3

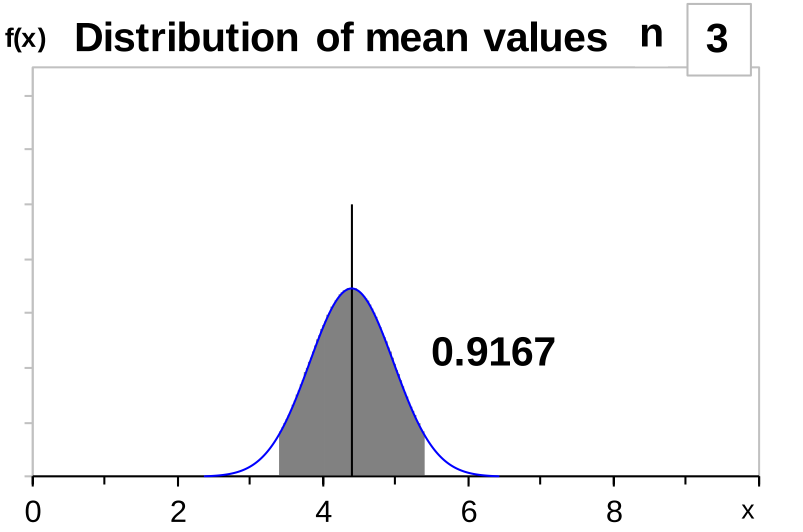
The distribution of the means
is linked to the distribution of the populat

It has the same axis.
But it gets smaller.

Structurally, the situation is the same
if the standard deviation
of the population changes.

x	z	Φ(z)	
3.4	-1.0000	0.1587	
5.4	1.0000	0.8413	0.6827



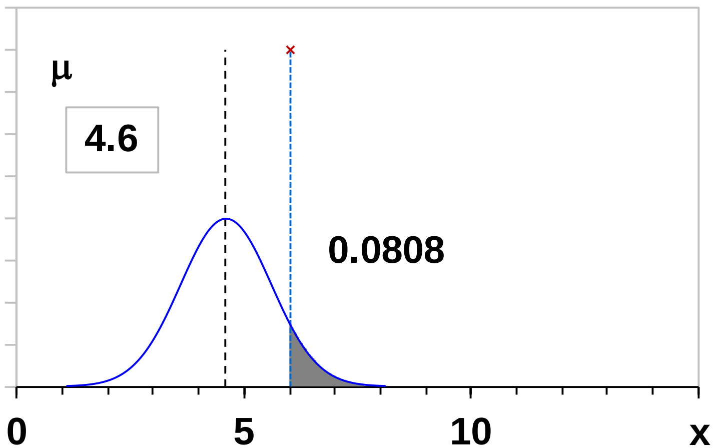


Vergleich des Mittelwerts aus einer Stichprobe mit einer „Population“

Normal model for means to judge a single observed mean

Assumed mean	SE	Size of sample	SD of pop	Mean of data (threshold)
μ	σ_n	n	σ	x
4.6	1.0000	1	1	6
46		56		

Normal model for sample means n **1**



We can find values for the population mean compatible withthe mean of the data

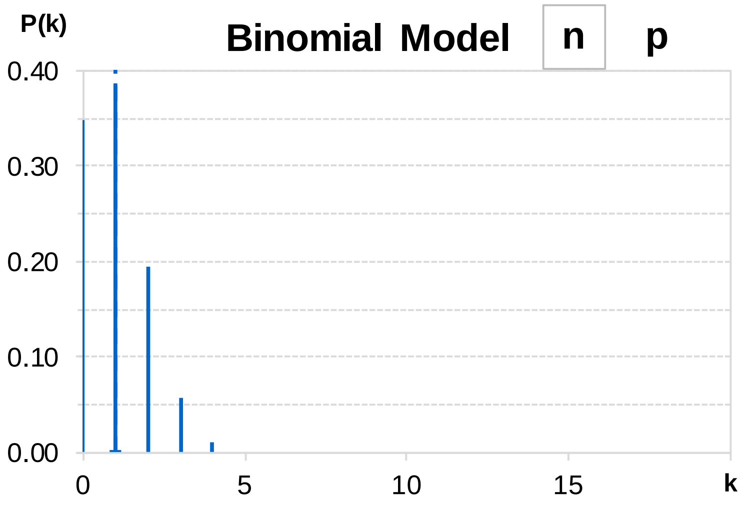
We can see that the range of compatible means for the population will get smaller with the size of the sample

Larger samples convey more information about the population
The results can also be applied if the population is not normally distributed if the assumptions of the Central Limit Theorem apply.

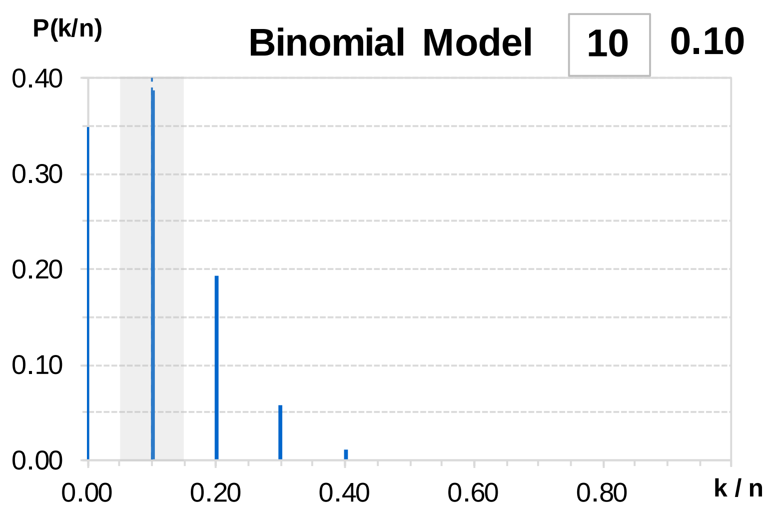
Binomialmodell und Exploration eines plausiblen p’s

Binomial Model rather than binomial distribution

n	p	μ=E(X)	σ(X)
10	0.10	1.0000	0.9487



Distribution for the number of successes
We can use this distribution
for calculating the probability
of various numbers of successes;
e.g., P(up to 6) =



Model for the proportion of successes
We can use the distribution for the
proportion k/n of "successes"
to investigate the properties of the
estimation of an "unknown" p by sample k/n

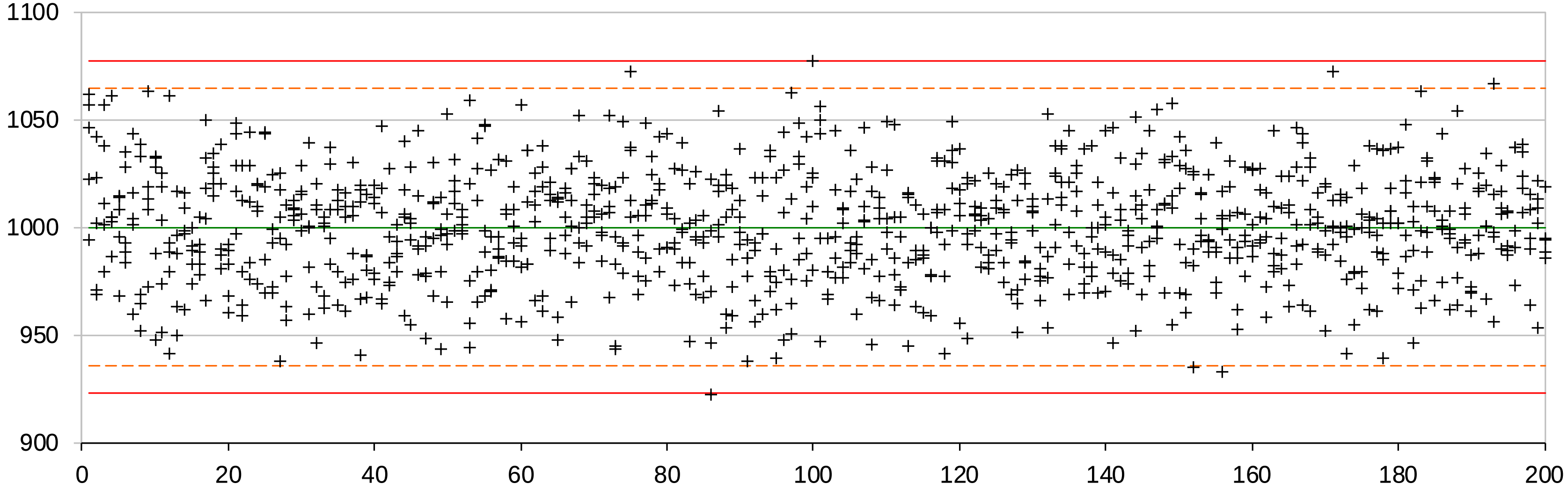
Probability that the estimation error is less than 0.05:
0.3874

Verhalten von Kontrollkarten um statistische Tests vorzubereiten

Production under regular conditions - everything is under control, i. $X \sim N(1000, \sigma^2=625)$
Inspection involves at each control time 5 single items; 200 inspections are simulated
It is checked how the prescribed control and warn limits behave.

Chart for single values	CL	False alarms C	WL	False W
Number of samples	200		200	
Samples within the limits	198		193	
Proportion of samples within the limits	0.99	0.01	0.965	0.035

Control chart for single values - process under control

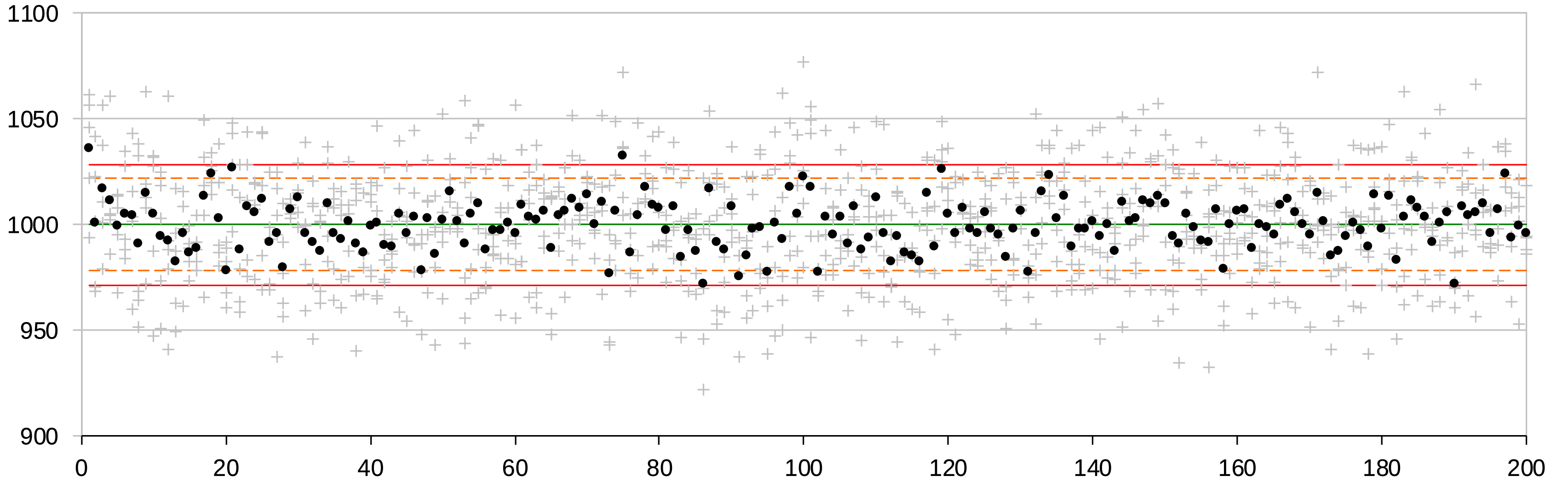


Verhalten von Kontrollkarten um statistische Tests vorzubereiten

Production under regular conditions - everything is under control, i. X ~ N(1000, σ^2=625)
Inspection involves at each control time 5 single items; 200 inspections are simulated
It is checked how the prescribed control (CL) and warn limits (WL) behave.

Chart for mean values of 5 items	CL	False alarms C	WL	False W
Number of samples	200		200	
Samples within the limits	198		184	
Proportion of samples within the limits	0.990	0.010	0.920	0.080

Control chart for mean values of samples of 5 items

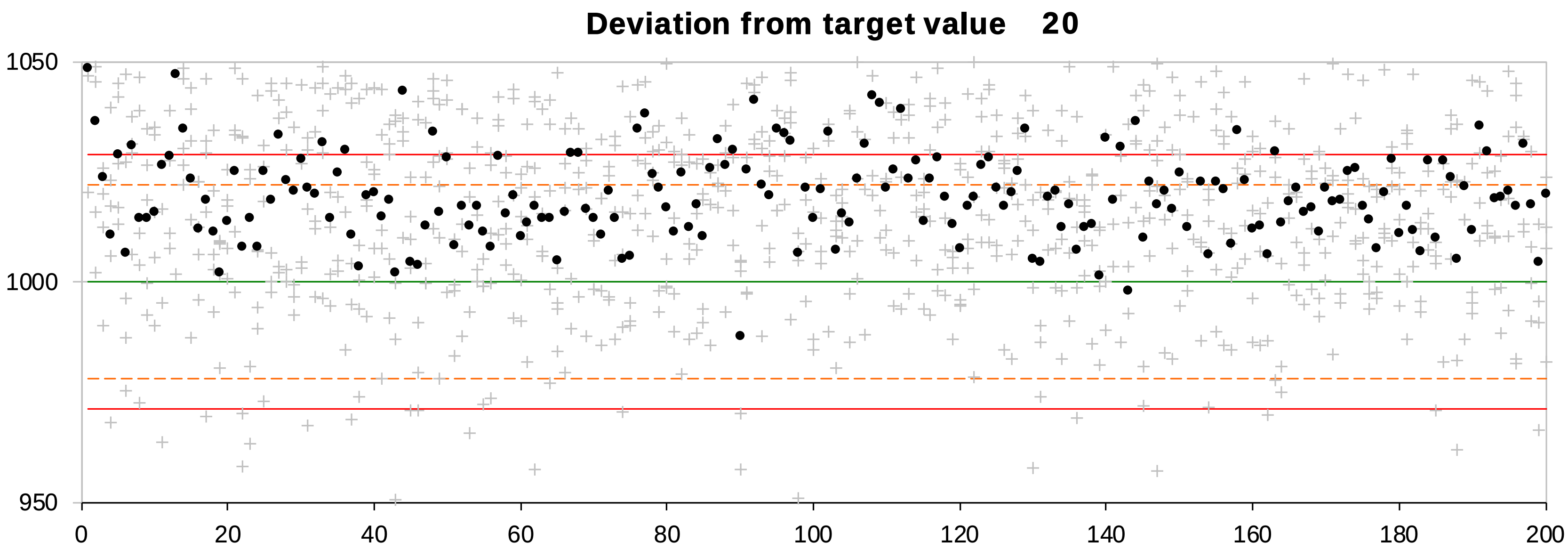


Verhalten von Kontrollkarten um statistische Tests vorzubereiten

Production under deviation from regular conditions - deviation in mean of 20

Chart for mean values of 5 items

Mean values within	CL	WL
Number of samples	200	200
Samples within limits	165	127
Sample rate within limits	**0.825**	**0.635**

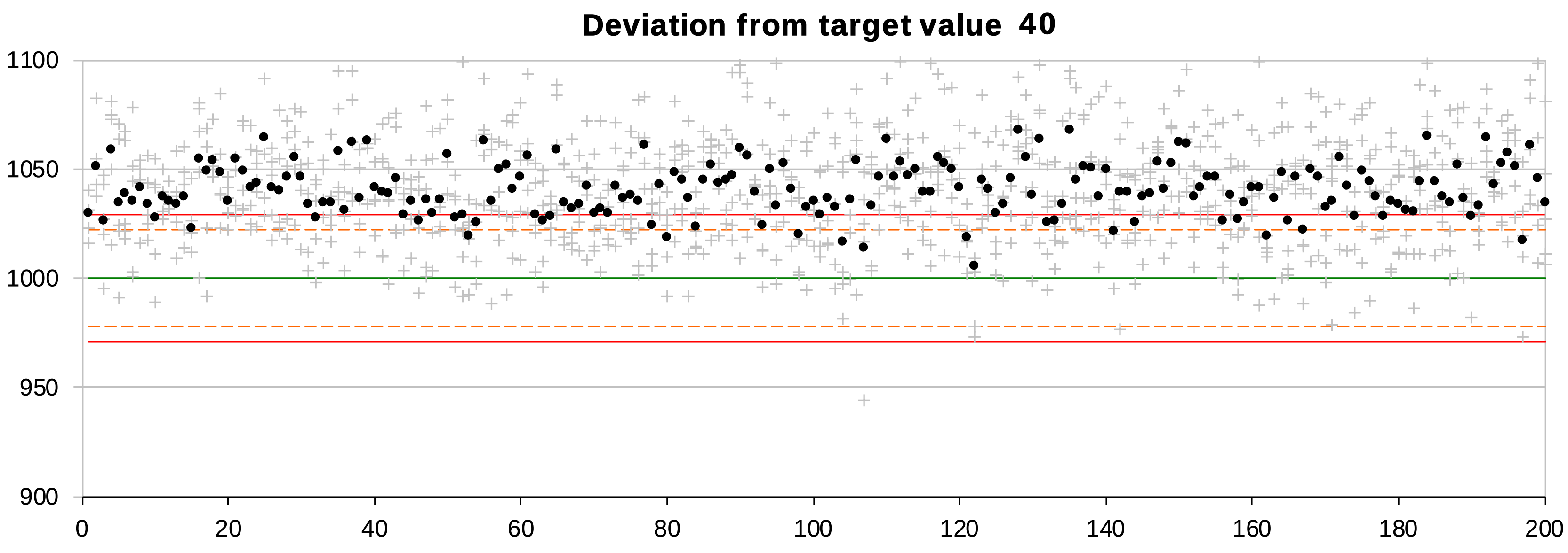


Verhalten von Kontrollkarten um statistische Tests vorzubereiten

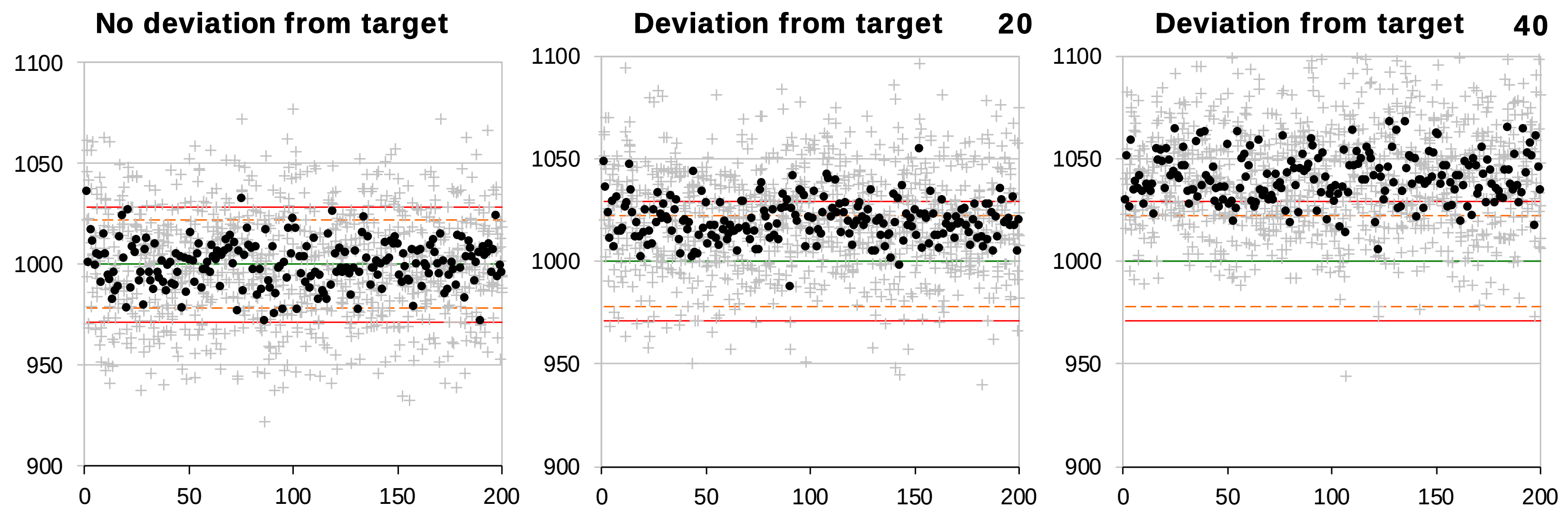
Production under deviation from regular conditions - deviation in mean of 40

Chart for mean values of 5 items

Mean values within	CL	WL
Number of samples	200	200
Samples within limits	34	10
Sample rate within limits	**0.17**	**0.05**

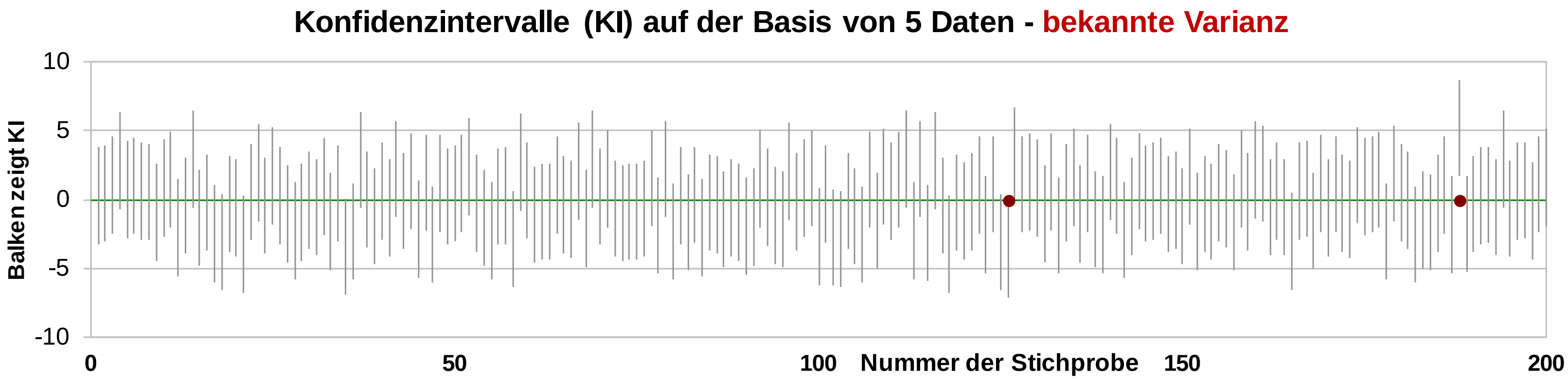


Verhalten von Kontrollkarten um statistische Tests vorzubereiten

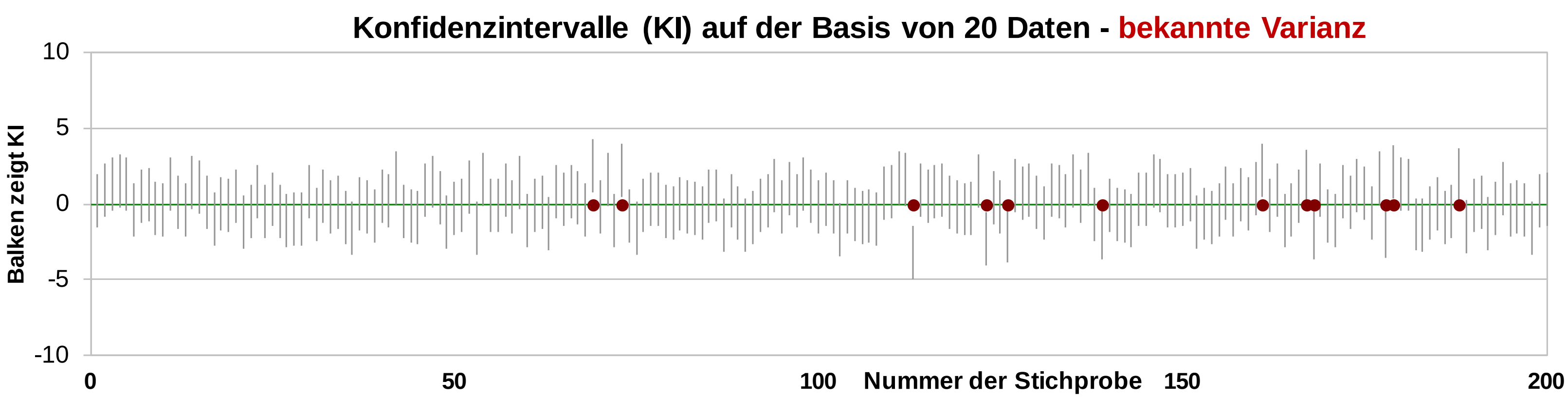


Deviation from target	0	20	40
SD of process	25	25	25
Samples	200	200	200
Within limits W	**184**	**127**	**10**
Within limits C	**198**	**165**	**34**
W alarms rate	**0.08**	**0.365**	**0.95**
C alarm rate	**0.010**	**0.175**	**0.830**

Konfidenzintervalle – Interpretation der „Sicherheit“

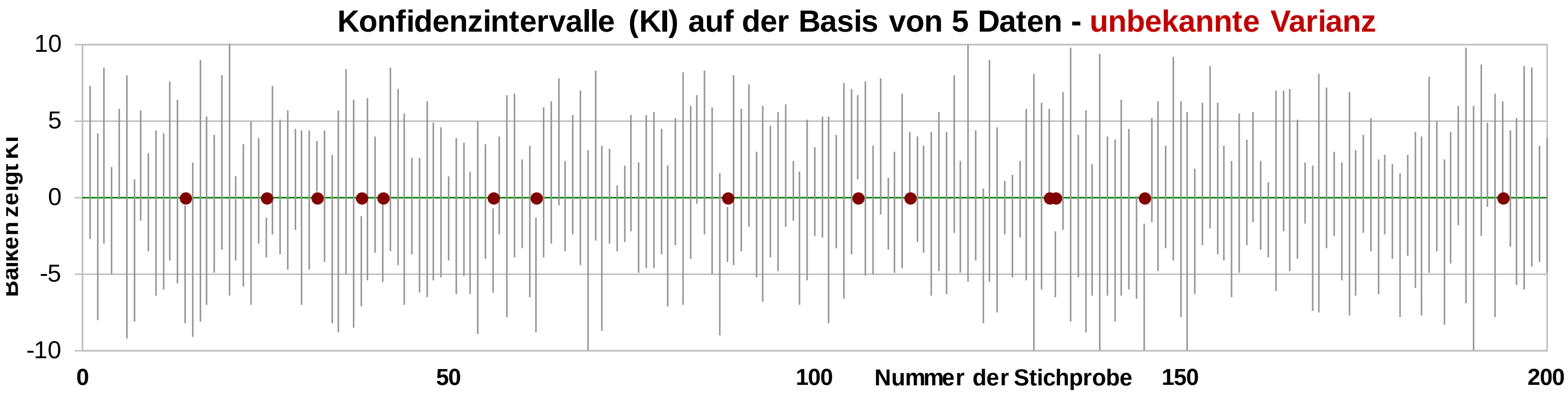


Prozentsatz überdeckender Intervalle: **99.0%**

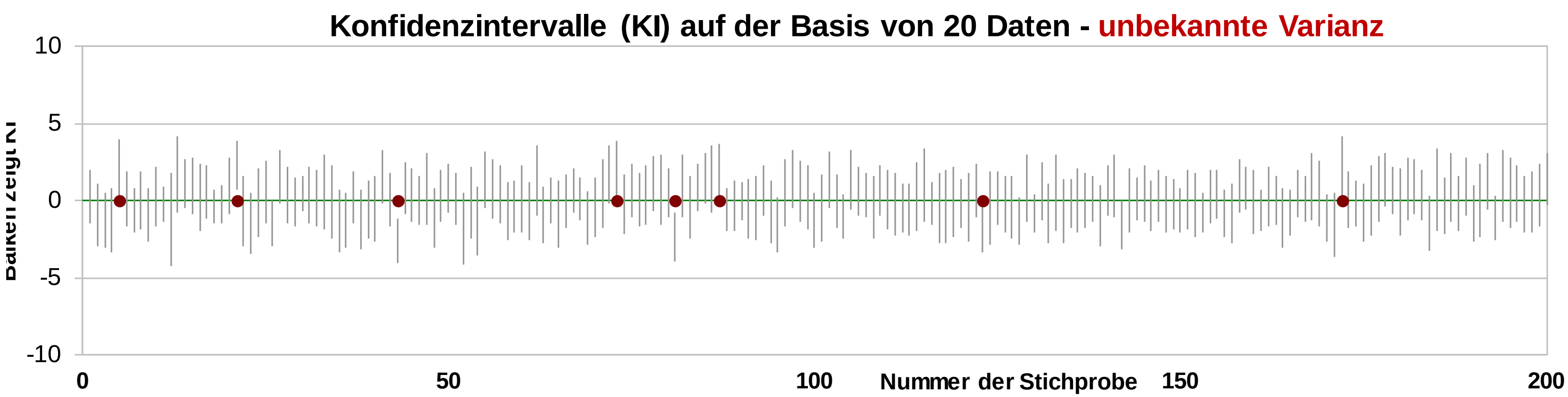


Prozentsatz überdeckender Intervalle: **94.0%**

Konfidenzintervalle – Interpretation der „Sicherheit“



Prozentsatz überdeckender Intervalle: **93.0%**



Prozentsatz überdeckender Intervalle: **96.0%**

5. Zusammenfassung und Potential der Applets

Wesentliche Faktoren in den Applets, welche Schlüsselbegriffe illustrieren sollen, sind:

- die Auswirkung von Wahrscheinlichkeit und damit zusammenhängenden Indices durch relative Häufigkeiten zu zeigen,
- die Relevanz einzelner Parameter durch Änderung derselben und Nachverfolgen der Auswirkungen auf andere Begriffe (etwa das Aussehen der Verteilung) zu demonstrieren,
- mathematische Sätze nachspielen und damit ihre Aussage bzw. Wirkung verstehen
- Grenzverhalten durch Gedankenexperimente zu extrapolieren; statt den Stichprobenumfang ad infinitum zu erhöhen, sollte man ein relativ stabiles Muster, d.h., eine *Gestalt* der Verteilung, bei wiederholter Simulation bei festem Stichprobenumfang erkennen können.

Spielerisch wesentliche Eigenschaften von Begriffen erkennen.

Applets als Bereicherung der Ausbildung in Stochastik in der Schule

- Lernen ist ein interaktiver Prozess.
- Ein geeignetes Medium kann ein vertieftes Verständnis der Begriffe aufbauen helfen.
- Nicht nur Mathematik kann Mathematik erschließen.

Für die Einbindung der Applets in den Unterricht siehe auch das Projekt

New Technologies in Statistics Education auf ResearchGate.

Die Applets sind abrufbar von der Excel-Bibliothek unter

wwwg.uni-klu.ac.at/stochastik.schule/Boro/index_inhalt.

Rückmeldungen willkommen:

manfred.borovcnik@aau.at.