Diskret oder kontinuierlich modellieren?

Franz Pauer, Florian Stampfer

Institut für Fachdidaktik
und
Institut für Mathematik

Universität Innsbruck

Lehrer/innen/fortbildungstag Wien 2017
21. April 2017

Inhalt

Inhalt

- Modellieren

Inhalt

Inhalt

Inhalt

Inhalt

- Modellieren
- Linear Modellieren
- Diskret modellieren, kontinuierlich modellieren

Inhalt

Inhalt

- Modellieren
- Linear Modellieren
- Diskret modellieren, kontinuierlich modellieren
- Lineare Differenzen- und Differenzialgleichungen der Ordnung 1

Inhalt

Inhalt

- Modellieren
- Linear Modellieren
- Diskret modellieren, kontinuierlich modellieren
- Lineare Differenzen- und Differenzialgleichungen der Ordnung 1
- Beispiele

Modellieren

Aus dem Lehrplan der AHS-Unterstufe (11. Mai 2000):

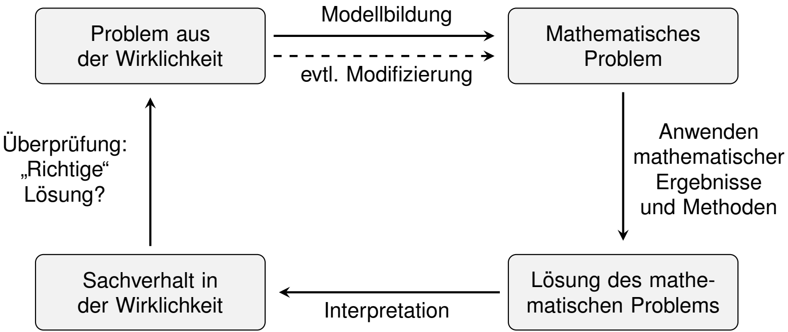
- Das *Bilden mathematischer Modelle und das Erkennen ihrer Grenzen* soll zu einem verantwortungsvollen Umgang mit Aussagen führen, die mittels mathematischer Methoden entstanden sind.
- Folgende mathematische Grundtätigkeiten sind zu entwickeln: *Kritisches Denken*, insbesondere: Überprüfen von Vermutungen; Überprüfen von Ergebnissen; *Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle*; Erkennen von Mängeln in Darstellungen oder Begründungen.

Modellieren

(Mathematisch) Modellieren bedeutet, einen Sachverhalt, einen Vorgang, einen Zusammenhang, ... durch Begriffe der Mathematik zu beschreiben. Für die mathematische Beschreibung von Beziehungen bzw. Zusammenhängen zwischen Mengen werden häufig *Funktionen* verwendet.

Warum wird mathematisch modelliert? Man hofft, damit eine Fragestellung zur betrachteten Situation mit Hilfe mathematischer Methoden zumindest näherungsweise beantworten zu können.

Modellieren



Modellieren

Eine *Funktion* von einer Menge M nach einer Menge N ist eine Vorschrift, die jedem Element von M genau ein Element von N zuordnet. M heißt dann der *Definitionsbereich* und N der *Wertebereich* der Funktion.

Funktionen können auf verschiedene Weise dargestellt werden: durch eine Tabelle, durch ihren Graphen, durch eine Zuordnungsvorschrift, ...

Modellieren

Beispiele für Funktionen:

- Preisgestaltung in einem Kaufhaus (jeder Ware wird ein Preis zugeordnet),
- Verlauf der Temperatur an einem bestimmten Ort (jedem Tag wird die Temperatur um z. B. 8 Uhr zugeordnet, oder: jedem Zeitpunkt wird die Temperatur zugeordnet)
- Entwicklung des Guthabens auf einem Sparbuch (jedem Ende einer Zinsperiode wird das aktuelle Guthaben zugeordnet, oder: jedem Zeitpunkt wird das aktuelle Guthaben zugeordnet)

Modellieren

Mit jeder Funktion sind zwei grundlegende Aufgaben der Mathematik verbunden:

- Die Aufgabe, zu einer gegebenen Funktion f und einem Element m des Definitionsbereichs das Bild $f(m)$ zu bestimmen, heißt eine Funktion *auswerten*.
- Die Aufgabe, zu einer gegebenen Funktion f und einem Element n des Wertebereichs die Menge aller Urbilder von n zu bestimmen, heißt eine *Gleichung*.

Modellieren

Beispiele:

- Preisfunktion: Ermittle den Preis einer bestimmten Ware bzw. welche Ware hat einen vorgegebenen Preis?
- Temperaturverlauf: Welche Temperatur hat es zu einem bestimmten Zeitpunkt bzw. zu welchen Zeitpunkten wird es eine vorgegebene Temperatur haben?
- Guthaben auf einem Sparbuch: Welchen Geldbetrag habe ich zu einem bestimmten Zeitpunkt bzw. nach welcher Zeit habe ich einen bestimmten Geldbetrag?

Linear Modellieren

Wenn M und N reelle Vektorräume sind, dann ist eine Funktion *linear*, wenn für alle $x, y \in M$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ und } f(c \cdot x) = c \cdot f(x)\,.$$

(Wenn M eindimensional ist, dann folgt die zweite Bedingung aus der ersten).

Linear Modellieren bedeutet, eine Situation durch eine lineare Funktion zu beschreiben.
Dazu muss aber vorher überprüft werden, ob das für diese Situation sinnvoll ist.
Dafür ist Expert/inn/enwissen erforderlich!

Linear Modellieren

Beispiel: Gewinnfunktion bei linearer Optimierung

Der Produktion von x Stück des ersten und y Stück des zweiten Produkts eines Betriebes wird der Gewinn bei dieser Produktion zugeordnet. Der Gewinn bei der Produktion von einem Stück des ersten bzw. zweiten Produkts beträgt a bzw. b Euro. Ist diese „Zielfunktion“ linear?

Zu überlegen: Verdoppelt, verdreifacht, ... sich der Gewinn, wenn die Produktion verdoppelt, verdreifacht, ... wird?
Bleibt der Gewinn gleich, wenn die Produkte nacheinander anstatt zugleich auf den Markt gebracht werden?

Nur dann ist der Gewinn bei der Produktion von x bzw. y Stück des ersten bzw. zweiten Produkts gleich ax+by Euro.

Linear Modellieren

Wenn nur einige Funktionswerte einer Funktion gegeben sind, darf ohne Wissen über die Sachsituation nicht geschlossen werden, dass diese Funktion linear ist.

Beispiel:
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$

Linear Modellieren

Wenn nur einige Funktionswerte einer Funktion gegeben sind, darf ohne Wissen über die Sachsituation nicht geschlossen werden, dass diese Funktion linear ist.

Beispiel:
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$
- Richtige Antwort: $f(20) = 7$

Linear Modellieren

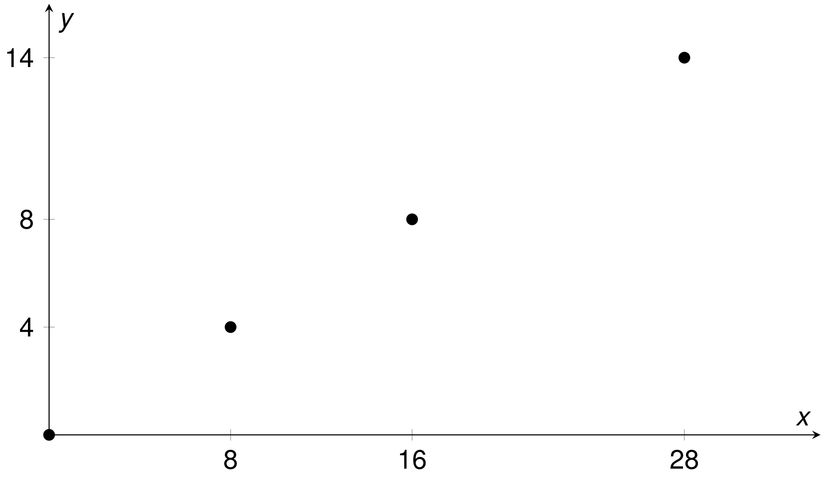
Wenn nur einige Funktionswerte einer Funktion gegeben sind, darf ohne Wissen über die Sachsituation nicht geschlossen werden, dass diese Funktion linear ist.

Beispiel:
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$
- Richtige Antwort: $f(20) = 7$
- $f(n)$ ist die Anzahl der Buchstaben des deutschen Wortes für die Zahl n.

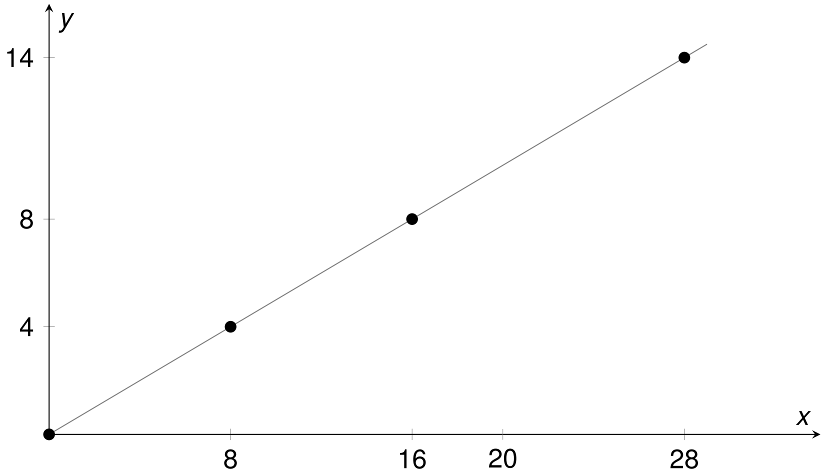
Linear Modellieren

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



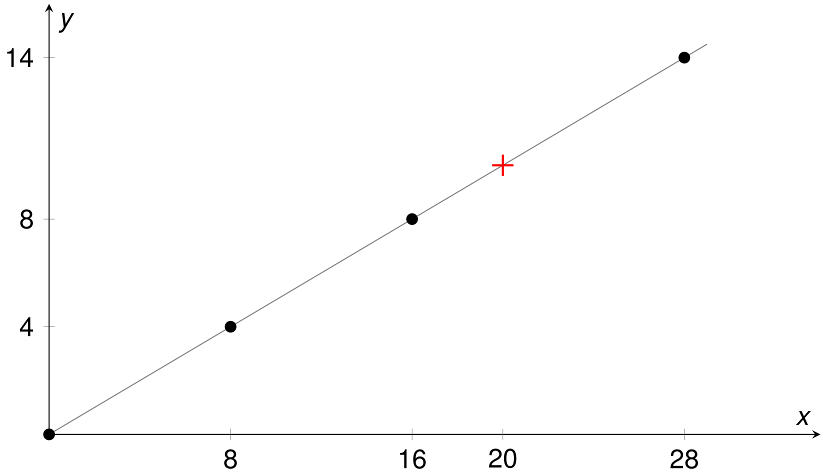
Linear Modellieren

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



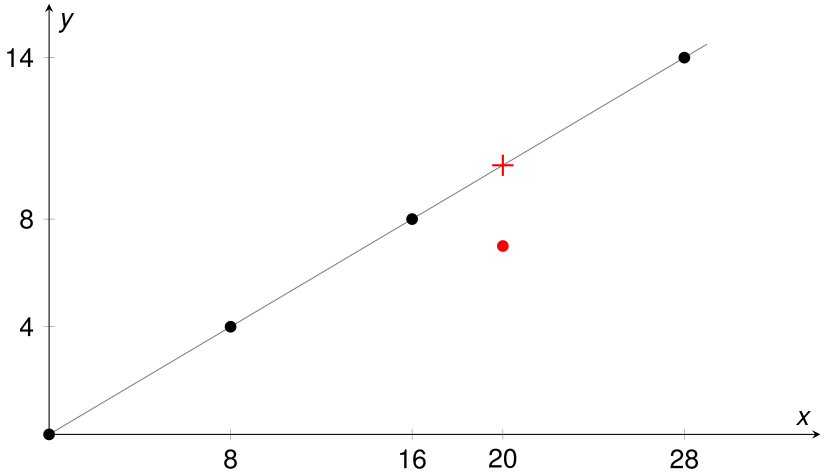
Linear Modellieren

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



Linear Modellieren

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



Linear Modellieren

Ist die „Fortsetzung von Zahlenfolgen“ in diversen Tests sinnvoll?

Beispiel:
„Bilde für alle positiven natürlichen Zahlen n das Produkt der fünf Vorgänger (n-1)(n-2)... (n-5) und addiere dann n“ ergibt

- die Folge $1, 2, 3, 4, 5, ...$

Linear Modellieren

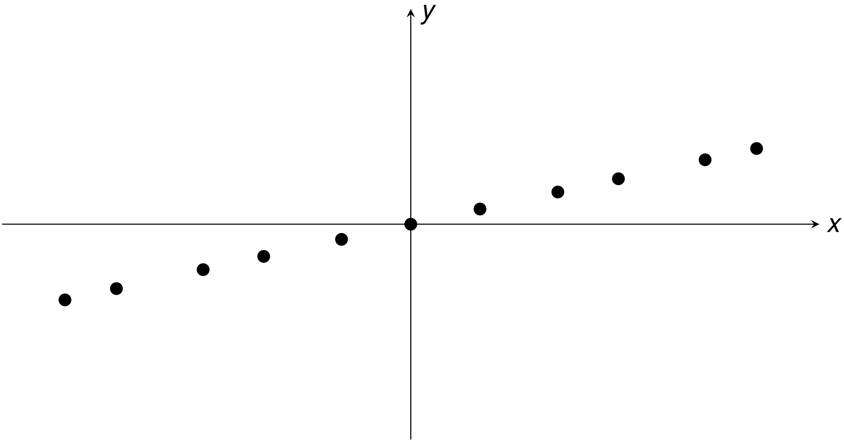
Ist die „Fortsetzung von Zahlenfolgen“ in diversen Tests sinnvoll?

Beispiel:
„Bilde für alle positiven natürlichen Zahlen n das Produkt der fünf Vorgänger (n-1)(n-2)... (n-5) und addiere dann n“ ergibt

- die Folge $1, 2, 3, 4, 5, ...$
- oder, ausführlicher geschrieben,
  $1, 2, 3, 4, 5, 126, 727, 2528, ..., (n-1)(n-2)...(n-5) + n, ...$

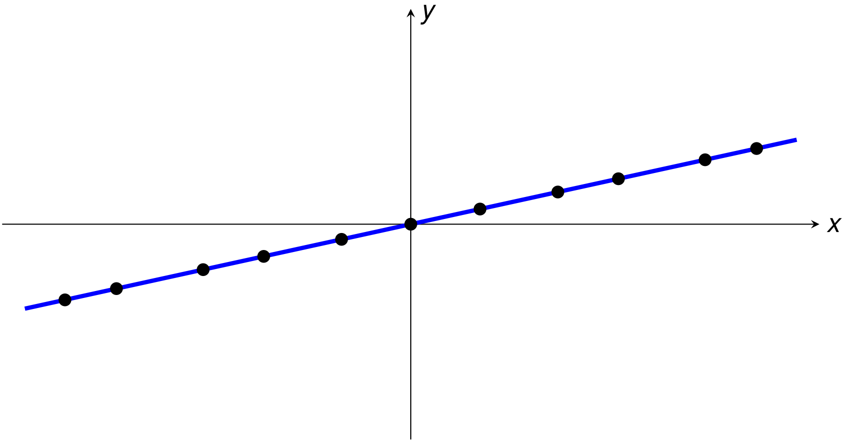
Linear Modellieren

Lineare Regression?



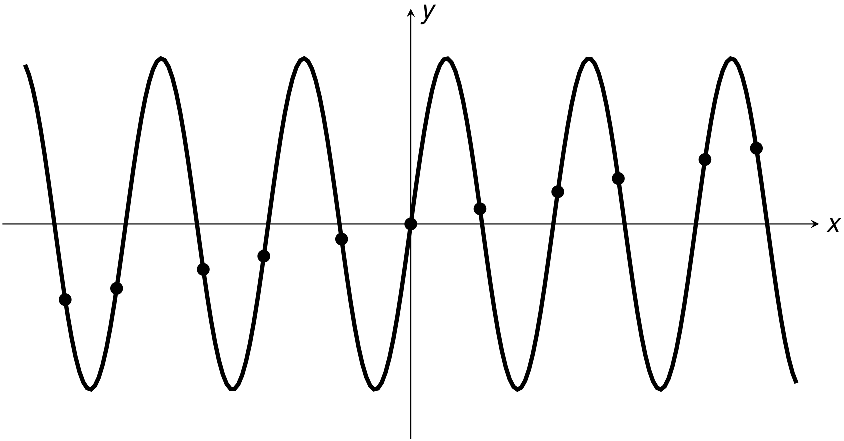
Linear Modellieren

Lineare Regression?



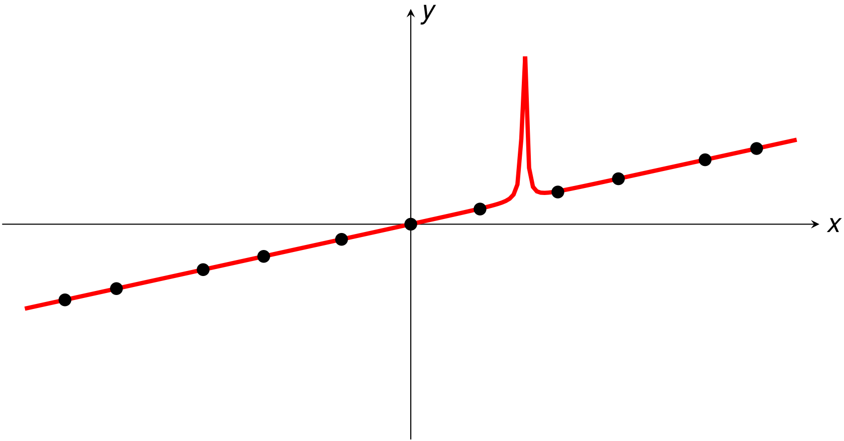
Linear Modellieren

Lineare Regression?



Linear Modellieren

Lineare Regression?



Diskret modellieren, kontinuierlich modellieren

- Eine Situation *diskret modellieren* heißt, sie durch eine Funktion, deren Definitionsbereich eine endliche Menge oder die Menge der natürlichen Zahlen ist, zu beschreiben.
  Ist $\mathbb{N}$ der Definitionsbereich einer Funktion, dann nennt man diese eine *Folge*. Häufig ist diese Folge die Lösung einer *Differenzengleichung*.
- Eine Situation *kontinuierlich modellieren* heißt, sie durch eine Funktion, deren Definitionsbereich ein reelles Intervall, die Menge der reellen Zahlen, ... ist, zu beschreiben. Häufig ist diese Funktion differenzierbar und die Lösung einer *Differenzialgleichung*.

Ob diskrete oder kontinuierliche Modellierung sinnvoll ist, hängt von der Sachsituation und von den vorhandenen Daten ab.

Diskret modellieren, kontinuierlich modellieren

Beispiele:

- Verlauf der Temperatur an einem bestimmten Ort: Wird ein Thermometer an diesem Ort an jedem Tag um 8 Uhr abgelesen, erhält man eine Folge von Temperaturen, der Verlauf wird diskret modelliert. Man kann daraus nicht auf die Temperaturen um 14 oder 20 Uhr schließen.
- Verlauf der Temperatur an einem bestimmten Ort: Wird die Temperatur von einem Schreibgerät aufgezeichnet, erhält man den Graphen einer auf $\mathbb{R}_+$ definierten Funktion, der Verlauf wird kontinuierlich modelliert. Man kann daraus die Temperaturen zu jedem Zeitpunkt der Vergangenheit (ab dem Beginn der Messung) ablesen.

Diskret modellieren, kontinuierlich modellieren

Beispiele:

- Entwicklung des Guthabens auf einem Sparbuch: Wird eine Zinsperiode vereinbart und werden die Zinsen jeweils am Ende einer Zinsperiode zugeschrieben, dann wird der zeitliche Verlauf des Guthabens durch die Folge $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschrieben, dabei ist $f(n)$ das Guthaben am Ende der n-ten Zinsperiode.
- Entwicklung des Guthabens auf einem Sparbuch: Wird stetige Verzinsung vereinbart, dann kann das Guthaben zu jedem Zeitpunkt berechnet werden. Der zeitliche Verlauf des Guthabens wird durch eine Funktion f von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}_+$ beschrieben, wobei $f(t)$ das Guthaben zum Zeitpunkt t ist.

Lineare Differenzen- und Differenzialgleichungen der Ordnung 1

Eine *lineare Differenzengleichung der Ordnung 1* (mit konstanten Koeffizienten und vorgegebenem Anfangswert) ist die folgende Aufgabe:

- Gegeben sind reelle Zahlen a und c und eine Folge h.
- Gesucht ist eine Folge f mit den Eigenschaften : $f(0) = a$ und für alle natürlichen Zahlen n ist

$$f(n+1) = c \cdot f(n) + h(n).$$

Zu jeder solchen Differenzengleichung gibt es genau eine Lösung f, das n-te Folgenglied $f(n)$ kann induktiv berechnet werden:

$$f(0) = a, f(1) = a{\cdot}c{+}h(0), f(2) = c.f(1){+}h(1) = a{\cdot}c^2{+}c.h(0){+}h(1), \ldots$$

$$f(n) = a \cdot c^n + c^{n-1} \cdot h(0) + c^{n-2} \cdot h(1) + \ldots + c \cdot h(n-2) + h(n-1)$$

Lineare Differenzen- und Differenzialgleichungen der Ordnung 1

Ist $h = 0$, dann ist die Lösung f die geometrische Folge mit $f(n) = a \cdot c^n$.

Der *Shift-Operator S* ordnet jeder Folge $g = (g(0), g(1), g(2), \ldots)$ die Folge

$$S(g) := (g(1), g(2), g(3), \ldots)$$

zu.
Damit können Differenzengleichungen einfacher beschrieben werden:

- Gegeben sind reelle Zahlen a und c und eine Folge h.
- Gesucht ist eine Folge f mit den Eigenschaften :

$$S(f) = c \cdot f + h \text{ und } f(0) = a.$$

Lineare Differenzen- und Differenzialgleichungen der Ordnung 1

Eine *lineare Differenzialgleichung der Ordnung 1* (mit konstanten Koeffizienten und vorgegebenem Anfangswert) ist die folgende Aufgabe:

- Gegeben sind reelle Zahlen a und c und eine Funktion h von einem Intervall (u, v) nach $\mathbb{R}$, weiters $w \in (u, v)$.
- Gesucht ist eine differenzierbare Funktion f von (u, v) nach $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

$$f' = c \cdot f + h \quad \text{und} \quad f(w) = a.$$

Ist $h = 0$ und $w = 0$, dann ist die (eindeutig bestimmte) Lösung die Funktion f mit $f(t) = a \cdot e^{c \cdot t}$.

Beispiele

- Entwicklung des Guthabens auf einem Sparbuch (nach Vorgabe von Zinsperiode, Zinssatz i und Anfangskapital K):
  Gesucht wird eine Folge f mit den Eigenschaften $f(0) = K$ und für alle natürlichen Zahlen n ist

  $$f(n+1) = (1+i) \cdot f(n) \text{ bzw. } f(n+1) - f(n) = i \cdot f(n).$$

  Dabei ist $f(n)$ das Guthaben am Ende der n-ten Zinsperiode.
  Die Lösung dieser Differenzengleichung ist die Folge

  $$(K \cdot (1+i)^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

- Entwicklung des Guthabens auf einem Sparbuch bei stetiger Verzinsung (nach Vorgabe von stetigem Zinssatz i und Anfangskapital K):
  Gesucht wird eine differenzierbare Funktion f von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}_+$ mit

  $$f' = i \cdot f.$$

  Dabei ist $f(t)$ das Guthaben zum Zeitpunkt t.
  Die Lösung dieser Differenzengleichung ist die Funktion f mit

  $$f(t) = K \cdot e^{it}$$

  .

Beispiele

Beispiel (aus einem Schulbuch für die 4. Klasse HTL)

Während einer Veranstaltung steigt der CO_2-Gehalt der Luft in einem Raum von $1000m^3$ auf $0,1\%$ (Volumsprozent). In einer Pause von 15 min wird Frischluft von $0,03\%$ CO_2-Gehalt zugeführt.

Auf wie viel sinkt der CO_2-Gehalt, wenn pro Minute $100m^3$ Frischluft zugeführt werden?

Beispiele

Modellbildung: Was wissen wir, was wissen wir nicht und was suchen wir?

- Zu Beginn des Lüftungsvorgangs befindet sich $1m^3\ CO_2$ in $1000m^3$ Luft.
- Beim Lüften werden in jeder Minute $100m^3$ der Luft im Raum (also ein Zehntel der gesamten Luft) durch $100m^3$ Frischluft (mit $0,03m^3\ CO_2$) ersetzt.
- Wir wissen nicht, wie der Luftaustausch (innerhalb einer Minute) vor sich geht.
- Gesucht ist der CO_2-Gehalt nach 15 Minuten.

Diskrete Modellierung liegt nahe.

Beispiele

Wir beschreiben den Lüftungsvorgang durch eine Folge V, dabei ist $V(n)$ das Volumen von CO_2 im Raum nach n Minuten. Der gesuchte CO_2-Gehalt nach 15 Minuten ist dann $\frac{V(15)}{1000}$ bzw. $\frac{V(15)}{10}$%.
Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$V(n+1) = V(n) - V(n)/10 + 0,03 \; (= 0,9 \cdot V(n) + 0,03)$$

und $V(0) = 1$.

Lösung (mit CAS Maple): Folge V mit
$V(0) := 1$;
for n from 0 to 14 do $V(n+1) := 0.9 \cdot V(n) + 0.03$ od;
$V(1) = 0.93$, $V(15) = 0.444123792444123792466254\text{3}$
Die Ergebnisse sind exakt (ohne Rundung).

Beispiele

Annahme: Die Funktion W von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}_+$ mit $W(t) :=$ Volumen von CO_2 im Raum nach t Minuten ist differenzierbar. Interpretiere den Differenzenquotienten $V(n+1) - V(n)$ näherungsweise als momentane Änderungsrate von W an der Stelle n .
Dann ist W Lösung der Differenzialgleichung $W' = -0,1 \cdot W + 0,03$ mit Anfangswert $W(0) = 1$. Der gesuchte CO_2-Gehalt nach 15 Minuten ist dann $\frac{W(15)}{1000}$ bzw. $\frac{W(15)}{10}\%$.

Lösung (mit CAS Maple): Differenzierbare Funktion W mit
$dsolve(diff(W(t), t) = -0.1 \cdot W(t) + 0.03, W(0) = 1);$
$W(t) = 0.3 + 0.7 \cdot \exp(-t/10)$
$W(1) = 0.9333861926, W(15) = 0.4561911121$

Der Fehler gegenüber der diskreten Modellierung ist ca. 0,003 an der Stelle 1 und ca. 0,012 an der Stelle 15.

Danke für die Aufmerksamkeit!
http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/

franz.pauer@uibk.ac.at