Die *uvw*-Sprache in der analytischen Geometrie

Stefan Götz

Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Oskar-Morgenstern-Platz 1
A-1090 Wien

Stefan.Goetz@univie.ac.at

21. April 2017

Inhalt

Eine typische Aufgabenplantage (oder -insel)

936 Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g und h und die Größe des Schnittwinkels!

a g: X = (3|3) + t·(3|−3) h: X = (2|0) + s·(1|−3) b g: X = (2|−1) + t·(3|−2) h: X = (1|0) + s·(1|−1)
c g: X = (2|−1) + t·(3|−2) h: X = (1|1) + s·(1|−1) d g: X = (−1|3) + t·(4|1) h: X = (1|0) + s·(3|−1)

937 Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes der Trägergeraden g und h der Strecken AB und CD und die Größe des Schnittwinkels!

a g: A(−1|3), B(3|4) h: C(−2|4), D(2|0) b g: A(−3|2), B(−1|−6) h: C(−3|5), D(2|0)
c g: A(−5|10), B(−2|−2) h: C(−4|6), D(5|−3) d g: A(2|−1), B(−13|9) h: C(2|0), D(−5|7)

938 Ermittle mit den Angaben von Aufg. 938 1 graphisch, 2 rechnerisch, ob die *Strecken* AB und CD einander schneiden! 3 In welchem Teilverhältnis teilt der Schnittpunkt (der Trägergeraden) die Strecken AB und CD?

939 Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Lage der Geraden g zum Koordinatensystem! In welchem Abstand vom Ursprung schneidet die Gerade jede der Koordinatenachsen? Welchen Abstand hat g vom Ursprung?

▸▸ a g: X = (3|6) + t·(3|−3) b g: X = (2|3) + t·(2|−3) c g: X = (7|10) + t·(0|5) d g: X=(3|−2)+t·(−3|−
e g: X = (1|−5) + t·(−1|−1) f g: X = (1|6) + t·(1|−3) g g: X = (6|−4) + t·(3|−2) h g: X = (6|−2) + t·(3|−

940 Die Geraden a, b und c sind die Trägergeraden der Seiten eines Dreiecks. Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten der Eckpunkte, die Längen der Höhen und den Umfang! 3 Liegt ein besondere Dreieck vor?

a a: X = (−1|0) + r·(1|−4), b: X = (8|−4) + s·(−5|4), c: X = (0|−4) + t·(3|4)
b a: X = (−6|1) + r·(12|−5), b: X = (3|0) + s·(−3|4), c: X = (2|5) + t·(−4|−2)
c a: X = (0|−1) + r·(5|2), b: X = (8|0) + s·(6|−2), c: X = (−1|3) + t·(4|6)
d a: X = (−1|3) + r·(5|0), b: X = (6|2) + s·(2|−3), c: X = (−10|−4) + t·(8|3)

941 ▸▸ Die vier Geraden a, b, c und d sind die Trägergeraden der Seiten eines Vierecks. Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten der Eckpunkte, den Umfang, alle Winkel und den Typ des Vierecks!

▸▸ a a: X = (0|4) + r·(1|2), b: X = (7|−2) + s·(2|−1), c: X = (7|3) + t·(1|2), d: X = (−7|0) + u·(−2|1)
b a: X = (3|5) + r·(1|1), b: X = (4|2) + s·(1|5), c: X = (7|1) + t·(3|−1), d: X = (0|−2) + u·(−3|1)
c a: X = (−1|−2) + r·(−3|1), b: X = (3|0) + s·(1|3), c: X = (0|3) + t·(2|0), d: X = (2|7) + u·(3|4)
d a: X = (1|−6) + r·(−2|3), b: X = (5|1) + s·(3|2), c: X = (3|4) + t·(3|2), d: X = (0|2) + u·(2|−3)
e a: X = (−4|−1) + r·(1|1), b: X = (1|1) + s·(2|−1), c: X = (5|1) + t·(2|1), d: X = (1|−4) + u·(1|−1)
f a: X = (6|2) + r·(5|−1), b: X = (1|3) + s·(−1|5), c: X = (7|−3) + t·(5|−1), d: X = (−3|−1) + u·(1|−5)
g a: X = (7|−2) + r·(−3|3), b: X = (−2|1) + s·(3|1), c: X = (−5|0) + t·(3|−2), d: X = (−1|−1) + u·(−3|−1)
h a: X = (1|1) + r·(3|1), b: X = (5|−1) + s·(−1|3), c: X = (6|6) + t·(3|1), d: X = (−1|−3) + u·(−1|3)

Abbildung: Aus Götz & Reichel 2010, S. 255

Das zugehörige Lehrplanzitat: 5. Klasse

https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2016_II_219/BGBLA_2016_II_219.pdf

Vektoren und analytische Geometrie in $\mathbb{R}^2$

- Vektoren addieren, subtrahieren, mit reellen Zahlen multiplizieren und diese Rechenoperationen geometrisch veranschaulichen können
- Einheitsvektoren und Normalvektoren ermitteln können
- Mit dem Skalarprodukt arbeiten können; den Winkel zwischen zwei Vektoren ermitteln können
- Geraden durch Parameterdarstellungen in $\mathbb{R}^2$ und durch Gleichungen (Normalvektordarstellungen) in $\mathbb{R}$ beschreiben, Geraden schneiden und die gegenseitige Lage von Geraden ermitteln können
- Abstände ermitteln können (Punkt-Punkt, Punkt-Gerade)

Das DESCARTES'sche Schema

Universelle Methode der Problemlösung:

1. Man reduziere jede Art von Problem auf ein **mathematisches** Problem.
2. Man reduziere jede Art von mathematischem Problem auf ein **algebraisches** Problem.
3. Man reduziere jedes algebraische Problem auf die **Lösung einer einzigen Gleichung**.

(PÓLYA 1966, S. 47, Hervorhebung S. G.)

Abbildung: RENÉ DESCARTES (1596 – 1650)

Hier: Dreiecksgeometrie → Standardaufgaben der Vektorrechnung in der Sekundarstufe II

Eine mögliche Alternative

Kernidee

Problemstellungen aus der EUKLID'schen (Dreiecks-)Geometrie (zum Teil aus der Sekundarstufe I)

- allgemein analytisch beschreiben („**koordinatisieren**")
- und dann (direkt, ohne Umwege!) „nachrechnen"

$\rightarrow$ **Exploration** mittels DGS

$\rightarrow$ (für den Unterricht) mächtiges Mittel zur (eigenständigen) Generierung von mathematischen **Begründungen**

$\rightarrow$ Quelle **sinnvoller** Rechnungen (auch mit CAS) zur Erkenntnisgewinnung durch Operieren

Die Grundlage – die Ausgangsposition

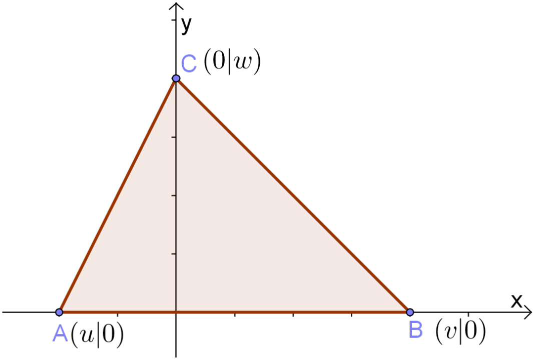


Abbildung: Ein **allgemeines** Dreieck

Wir setzen

$\boxed{u < v}$ und $\boxed{w > 0}$ (vgl. Götz & Hofbauer 2012, S. 325) .

Der (Ecken-)Schwerpunkt eines Dreiecks

Seine Existenz kann auf verschiedene Weise begründet werden:

1. elementargeometrisch mit dem **Satz vom Mittendreieck**
2. mit **koordinatenfreien Vektoren**
3. mittels **Flächenvergleichs**
4. mit dem Satz von CEVA

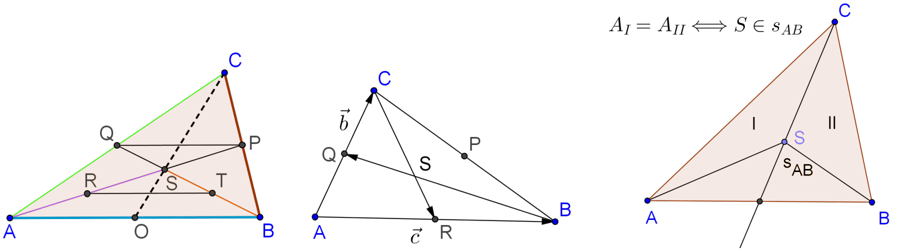


Abbildung: Schwerpunkt – verschiedene Begründungen seiner Existenz

Am einfachsten aber mittels Rechnens

Schnitt zweier Schwerelinien

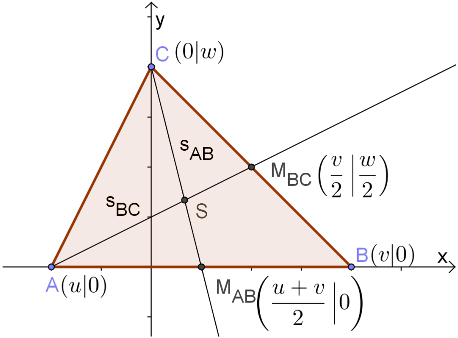


Abbildung: Der Schwerpunkt S in der uvw-Sprache

$$s_{AB}:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ -w \end{pmatrix} \qquad s_{BC}:\ \vec{X} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} \frac{v}{2} - u \\ \frac{w}{2} \end{pmatrix}$$

Erste Resultate

1. Die Gleichung der y-Koordinaten liefert den Parameterzusammenhang

$$\lambda = 2 \cdot (1 - t) \ .$$

2. Einsetzen in die Gleichung für die x-Koordinaten bringt

$$\boxed{t = \tfrac{2}{3}} \ .$$

3. Auch der andere Parameter λ hat den Wert $\boxed{\tfrac{2}{3}}$.

Interpretation

Der Schwerpunkt S teilt die „Schwerelinie" im Verhältnis 2 : 1.

4. Der Schnittpunkt S hat (natürlich) die Koordinaten

$$S\left(\frac{u+v}{3}\middle|\frac{w}{3}\right) \ .$$

Aus dem Schnittpunkt wird der Schwerpunkt

Die dritte Schwerelinie

$$s_{AC}: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{u}{2} - v \\ \frac{w}{2} \end{pmatrix} \quad \left(\text{wegen} \quad M_{AC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}\right)$$

enthält $S\left(\frac{u+v}{3}\middle|\frac{w}{3}\right)$: eine Standardrechnung ergibt

$$r = \frac{2}{3} = t = \lambda \qquad \text{(Götz \& Süss-Stepancik 2015, S. 312 f.)}$$

Analog erweitern wir unser **„*uvw*-Vokabelheft“**:

1. **Umkreismittelpunkt**

$$U\left(\frac{u+v}{2}\middle|\frac{w}{2} + \frac{uv}{2w}\right)$$

2. **Höhenschnittpunkt**

$$H\left(0\middle| -\frac{uv}{w}\right)$$

(Götz & Hofbauer 2012, S. 326)

Das führt geradewegs zur EULER'schen Geraden

Wir bilden (ökonomisch) die Gerade durch H und S:

$$e: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{uv}{w} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \frac{u+v}{3} \\ \frac{w}{3} + \frac{uv}{w} \end{pmatrix}$$

und versichern uns, dass $\boxed{U \in e}$, indem wir

$$\mu = \frac{3}{2}$$

für die x- und y-Koordinate ermitteln. (GÖTZ & SÜSS-STEPANCIK 2015, S. 313)

Abbildung: LEONHARD EULER (1707 – 1783)

Interpretation:

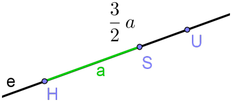


Abbildung: EULER'sche Gerade (Ausschnitt)

Bemerkung: Die durch die *uvw*-Sprache suggerierte Wahl der Punkte für Geradengleichungen erleichtert die Interpretation!

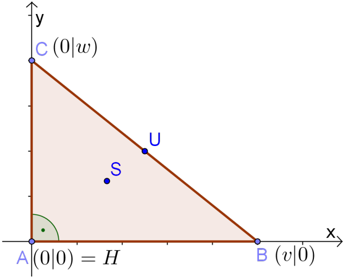


Abbildung: z. B. $\boxed{u = 0}$

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_0^v y^2 \, dx}{\int_0^v y \, dx} = \cdots = \frac{w}{3}$$

(Götz & Reichel 2013, S. 103 f.)

1. Schwerpunkt $S \left(\frac{v}{3} \middle| \frac{w}{3}\right)$: möglicher Standpunktwechsel (vgl. Wittmann 2009, S. 131) zur **Integralrechnung**, dazu: **funktionale Abhängigkeit**

$$y = -\frac{w}{v} \cdot x + w$$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\int_0^v xy \, dx}{\int_0^v y \, dx} = \\ &= \frac{\int_0^v \left(-\frac{w}{v}x^2 + wx\right) \, dx}{\int_0^v \left(-\frac{w}{v}x + w\right) \, dx} = \\ &= \cdots = \frac{v}{3} \end{aligned}$$

Weitere Übungs- und Interpretationsmöglichkeiten

2. Umkreismittelpunkt $U\left(\frac{v}{2}\middle|\frac{w}{2}\right)$: Mittelpunkt von $\overline{BC} \longrightarrow$ THALESkreis
3. Höhenschnittpunkt $H\ (0|0) = A$

(GÖTZ & SÜSS-STEPANCIK 2015, S. 313)

Dreieck ABC gleichschenkelig: z. B. $u = -v$

- Schwerpunkt $S\left(0\middle|\frac{w}{3}\right)$
- Umkreismittelpunkt $U\left(0\middle|\frac{w}{2}-\frac{v^2}{2w}\right)$
- Höhenschnittpunkt $H\left(0\middle|\frac{v^2}{w}\right)$

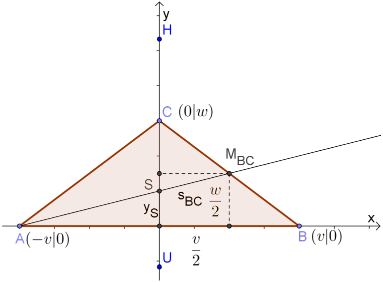


Abbildung: $\frac{w}{2} : \frac{3v}{2} = y_S : v$

$\longrightarrow$ EULER-Gerade ist die y-Achse!

Zur y-Koordinate y_S von S

Folgerungen aus dem gleichschenkeligen Fall

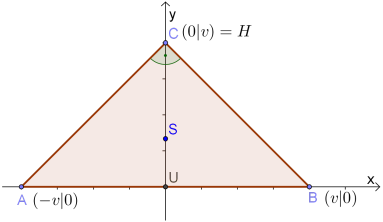


Abbildung: $u = -v$ und $w = v$

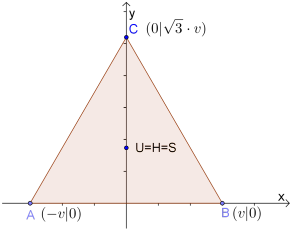


Abbildung: $u = -v$ und $w = v\sqrt{3}$

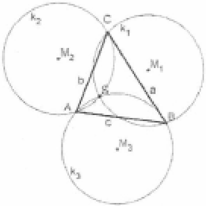
Dreieck ABC gleichschenkelig rechtwinkelig bei C

- Schwerpunkt $S\left(0\middle|\frac{v}{3}\right)$
- Umkreismittelpunkt $U\,(0|0)$
- Höhenschnittpunkt $H\,(0|v) = C$

Gleichseitiges Dreieck ABC

- Schwerpunkt $S\left(0\middle|\frac{v}{\sqrt{3}}\right)$
- Umkreismittelpunkt $U\left(0\middle|\frac{v}{\sqrt{3}}\right)$
- Höhenschnittpunkt $H\left(0\middle|\frac{v}{\sqrt{3}}\right)$

3.) Unter den Johnson-Kreisen eines Dreiecks versteht man drei Kreise mit gleichem Radius, die durch jeweils zwei Eckpunkte des Dreiecks gehen und einen Punkt gemeinsam haben (siehe nebenstehende Skizze).
Das von den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 dieser Kreise gebildete Dreieck wird als Johnson-Dreieck bezeichnet.



a) Zeige, dass die Kreise k_1, k_2 und k_3 die Johnson-Kreise des Dreiecks ABC sind.
b) Verifiziere, dass der gemeinsame Punkt der Johnson-Kreise der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist.
c) Das Dreieck ABC und das Johnsondreieck $M_1M_2M_3$ sind kongruent. Beweise diese Behauptung!

$A(-7/-4)$, $B(8/-1)$, $C(-4/7)$

k_1: $x^2 + y^2 - 8x - 12y = 13$ $\quad k_2: [M_2(-11/3), r = \sqrt{65}\,]$

k_3: $(x-1)^2 + (y+5)^2 = 65$

Abbildung: Müller 2013, S. 49

Abbildung: Roger A. Johnson (1890 – 1954)

Ein erster JOHNSON-Kreis

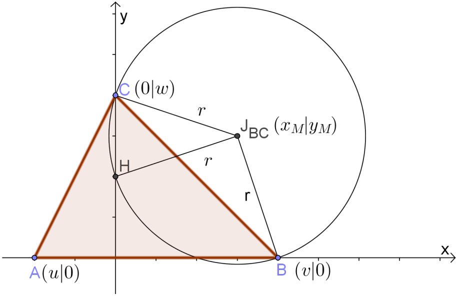


Abbildung: JOHNSON-Kreis durch B, C und H

Erinnere: $\boxed{H\left(0\middle|-\frac{uv}{w}\right)}$

$$\begin{aligned}(v-x_M)^2+{y_M}^2 &= r^2\\ {x_M}^2+(w-y_M)^2 &= r^2\\ {x_M}^2+\left(-\frac{uv}{w}-y_M\right)^2 &= r^2\end{aligned}$$

7. Klasse $\longrightarrow$ **Spiralprinzip**

Lösungen:

$$\boxed{x_M=\frac{v-u}{2}} \qquad \boxed{y_M=\frac{w}{2}-\frac{uv}{2w}} \qquad \boxed{r^2=\frac{u^2+v^2}{4}+\frac{w^4+u^2v^2}{4w^2}}$$

$r=$ Umkreisradius des Dreiecks ABC (GÖTZ & HOFBAUER 2012, S. 326)

Die drei JOHNSON-Kreise

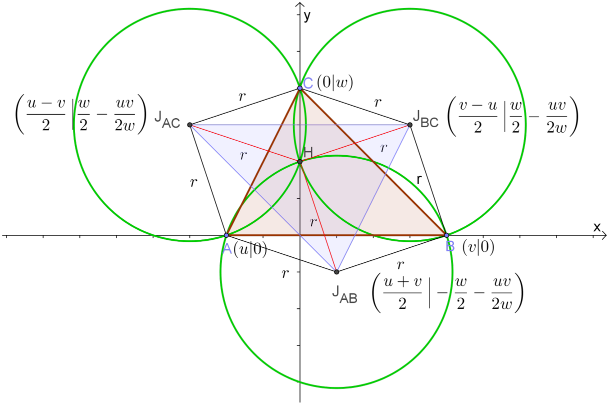


Abbildung: JOHNSON-Kreise durch Ecken und Höhenschnittpunkt H mit Radius r

⇒ gemeinsamer Punkt der Kreise muss Umkreismittelpunkt des JOHNSON-Dreiecks $J_{AB}J_{BC}J_{AC}$ sein!

Wieder ein Standpunktwechsel

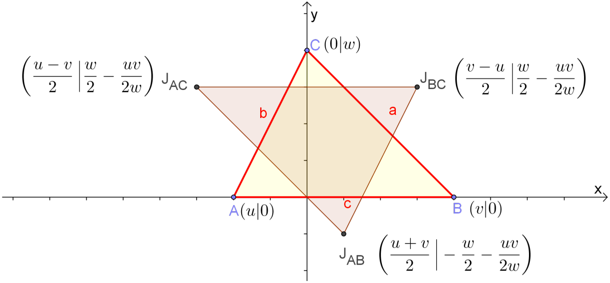


Abbildung: Das Johnson-Dreieck

Dreiecke

- ABC und
- $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$

sind **kongruent**:

$$\overrightarrow{J_{AC}J_{AB}} = \begin{pmatrix} v \\ -w \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{J_{BC}J_{AB}} = \begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{J_{BC}J_{AC}} = \begin{pmatrix} u-v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{J_{AC}J_{AB}}\right| = \sqrt{v^2+w^2} = a \qquad \left|\overrightarrow{J_{BC}J_{AC}}\right| = |u-v| = c$$

$$\left|\overrightarrow{J_{BC}J_{AB}}\right| = \sqrt{u^2+w^2} = b$$

Eine Dualität

1. Höhenlinien von ABC sind Streckensymmetralen von $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$.
2. Streckensymmetralen von ABC sind Höhenlinien von $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$.

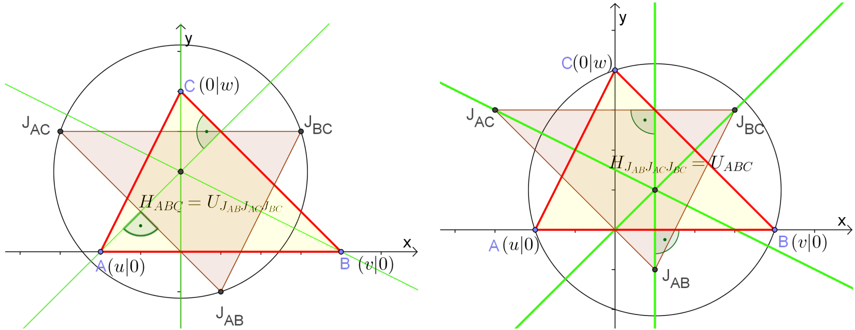


Abbildung: H entspricht U und vice versa

(Götz & Süss-Stepancik 2015, S. 314)

Der rechnerische Nachweis

Höhenlinie durch C: $x = 0$

Streckensymmetrale $\perp J_{AC}J_{BC}$:

- Mittelpunkt $\frac{1}{2}(J_{AC} + J_{BC}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ w - \frac{uv}{w} \end{pmatrix}$
- Normalvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ v - u \end{pmatrix}$

Streckensymmetrale von BC:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \frac{v}{2} \\ \frac{w}{2} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \frac{w}{v} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Höhenlinie durch J_{BC}:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \frac{v-u}{2} \\ \frac{w}{2} - \frac{uv}{2w} \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$$

$$\frac{v}{2} = \frac{v-u}{2} + \gamma \cdot w \quad \rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{u}{2w}}$$

$$\frac{w}{2} = \frac{w}{2} - \frac{uv}{2w} + \gamma \cdot v \quad \rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{u}{2w}}$$

Der an den Seiten gespiegelte Höhenschnittpunkt

liegt am Umkreis eines Dreiecks

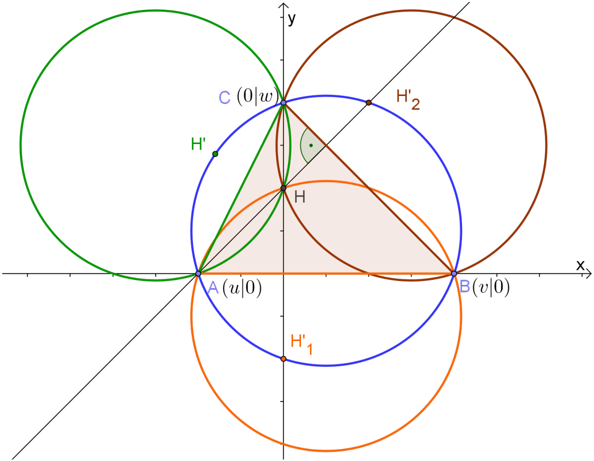


Abbildung: mit *uvw*-Sprache in Götz & Hofbauer 2012, S. 326

. . . und wenn H schon auf dem Umkreis liegt?

Wann passiert das?

1. Umkreisgleichung:

$$\left(x-\frac{u+v}{2}\right)^2+\left(y-\frac{w}{2}-\frac{uv}{2w}\right)^2=\frac{u^2+v^2}{4}+\frac{w^4+u^2v^2}{4w^2}$$

2. $H\left(0\middle|-\frac{uv}{w}\right)$ einsetzen: . . .

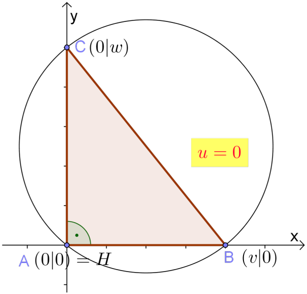
$$\Longrightarrow \quad uv+\frac{u^2v^2}{w^2}=0$$

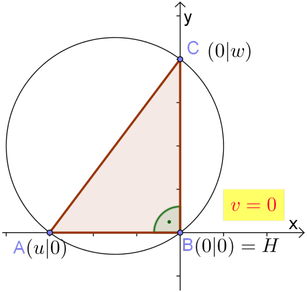
3. **Lösungen**:

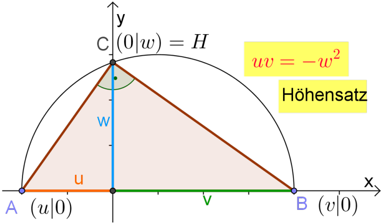
$$\boxed{u=0} \quad \text{oder} \quad \boxed{v=0} \quad \text{oder} \quad \boxed{uv=-w^2}$$

Interpretation

Das Dreieck ABC ist jedenfalls **rechtwinkelig**!







Folgerung: Ein Kreis „verschwindet" z. B. für $u = 0$

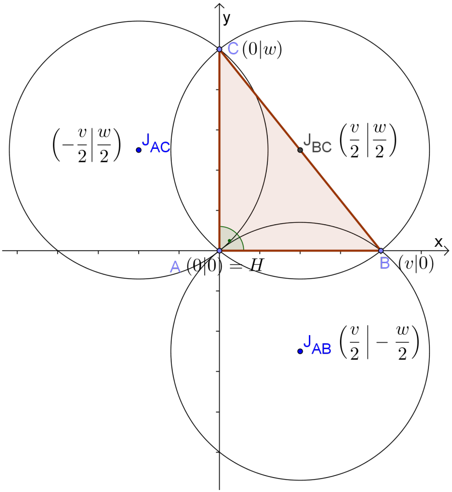


Abbildung: $r^2 = \frac{v^2+w^2}{4}$ bzw. $r = \frac{\sqrt{v^2+w^2}}{2}$

Unterrichtspraktisches Resümee

- nur **Standardaufgaben** der Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$ verwendet:
  - Parameterform einer Geraden
  - Schnitt zweier Geraden
  - Inzidenzfragen
  - Kreisgleichung

  $\longrightarrow$ **Haltung**, diese Standardmethoden auch **einzusetzen**

- **Interpretationen** der **Ergebnisse** durch gegebenen Kontext „Dreiecksgeometrie“ $\longrightarrow$ **Sinnangebot** versus Aufgabenplantagen: **Dokumentation** von „**Was habe ich gezeigt?**“

- **Anschauung** unterstützt und prüft auch Interpretationen

- Aufgaben mit **konkreten** Belegungen für u, v, w

- Herkömmliche Aufgaben in die *uvw*-Sprache übersetzen: vgl. Herget 2013, S. 465: „**Die umgekehrte Aufgabe: Koordinatensystem gesucht!**“

Apropos: Übersetzung in die *uvw*-Sprache

Wie geht das?

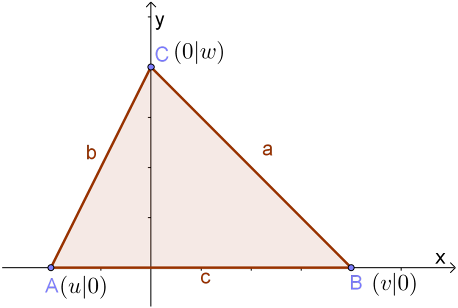


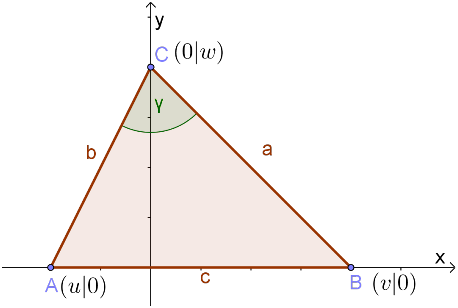
Abbildung: Gesucht sind nun u, v und w bei gegebenen Seitenlängen a, b und c

$$\begin{aligned} a^2 &= v^2 + w^2 \\ b^2 &= u^2 + w^2 \\ c &= v - u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{a^2 - b^2}{c} - c\right) \cdot \frac{1}{2} \\ v &= \left(\frac{a^2 - b^2}{c} + c\right) \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{w = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2c}}$$

Der Kosinussatz hilft weiter



$$|\cos\gamma| = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2ab} \quad \leq \quad 1$$

$$\rightarrow (a^2+b^2-c^2)^2 \quad \leq \quad 4a^2b^2$$

Abbildung: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$$\longrightarrow \boxed{a^4 + b^4 + c^4 \leq 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}$$

in **jedem** Dreieck!

Erkenntnistheoretisches Resümee

- Erkenntnisgewinn durch Rechnen versus elementargeometrische Beweise ($\longleftarrow$ Anschauung, Argumentationsbasis variiert)
  - Regeln befolgen führt zur Einsicht $\rightarrow$ Argumentationsbasis wohldefiniert
  - Operieren mit Zeichen = Denken (DÖRFLER 2015)

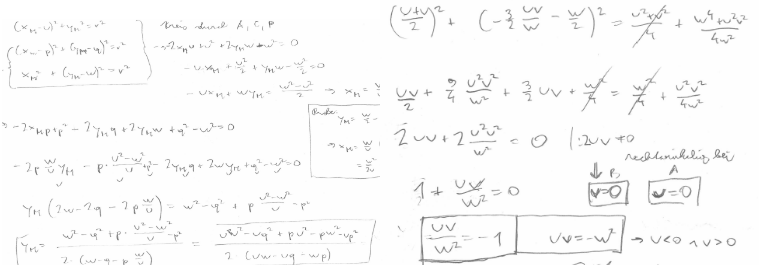


Abbildung: Rechnen mit der Hand

- Grenzen der *uvw*-Sprache: z. B. Eindeutigkeit der JOHNSON-Kreise — auch *Mathematica* scheitert!

Methodenwechsel: angle chase (F. Hofbauer)

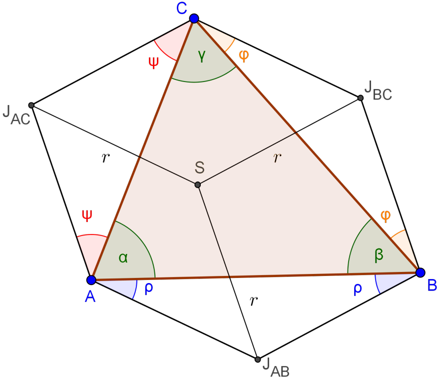
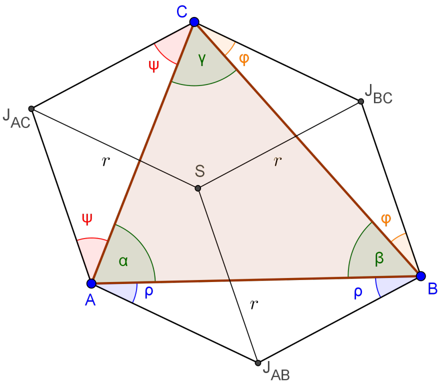


Abbildung: Zur Eindeutigkeit der JOHNSON-Kreise

$$
\begin{aligned}
\text{Winkel bei } S: \quad \alpha+\psi+\rho+\beta+\rho+\varphi+\gamma+\varphi+\psi &= 360^\circ \\
(\alpha+\beta+\gamma)+2(\varphi+\psi+\rho) &= 360^\circ \\
\varphi+\psi+\rho &= 90^\circ \quad (*)
\end{aligned}
$$

Dreieck BCJ_{BC}



$$
\begin{aligned}
\text{Winkel bei } J_{BC} &= 180^\circ - (\beta + \rho + \varphi) + 180^\circ - (\gamma + \varphi + \psi) \\
\text{Winkelsumme:} &\quad 360^\circ - (\beta + \gamma + 2\varphi + \psi + \rho) + \varphi + \varphi = 180^\circ \\
(*) \longrightarrow &\quad 180^\circ - (\beta + \gamma + \varphi + 90^\circ) + 2\varphi = 0 \\
\varphi &= \beta + \gamma - 90^\circ = 90^\circ - \alpha
\end{aligned}
$$

Konstruktion von J_{BC}

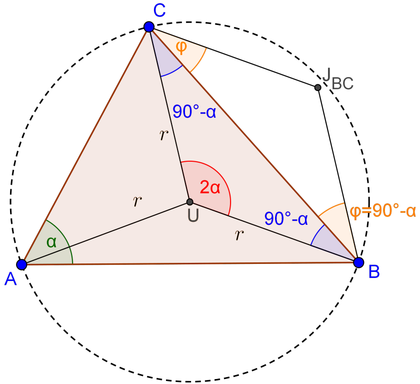
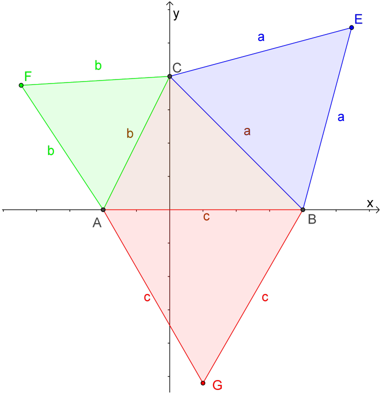


Abbildung: (Um-)Kreis über Sehne BC

Peripheriewinkelsatz $\longrightarrow$ J_{BC} liegt spiegelbildlich zu U!

$\rightarrow$ Spiegelung an BC

Die Ausgangssituation (Götz 2017)



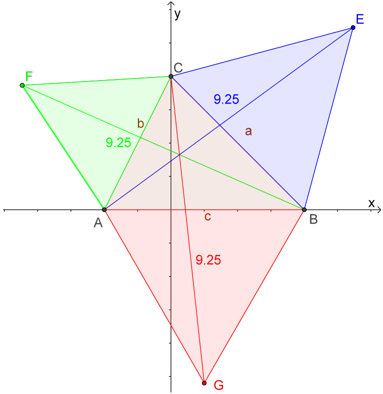


Abbildung: Drei gleichseitige Dreiecke als Aufsatzfiguren **links**

Abbildung: Eine Invariante **rechts** — die Länge der Ecktransversalen

Die Koordinaten der Aufsatzspitzen

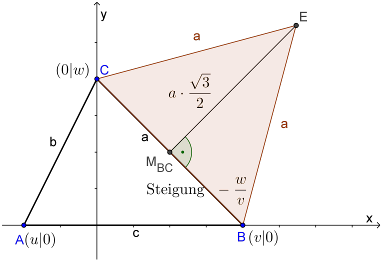


Abbildung: Die Spitze E und ihre Koordinaten

1. $\vec{M}_{BC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ und
2. Normalvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$$

von BC liefern

$$\vec{E} = \vec{M}_{BC} + \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2 + w^2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{v^2 + w^2}$$

und schließlich

$$E\left(\frac{v}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2} \middle| \frac{w}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{v}{2}\right) .$$

Analoge Rechnungen ergeben:

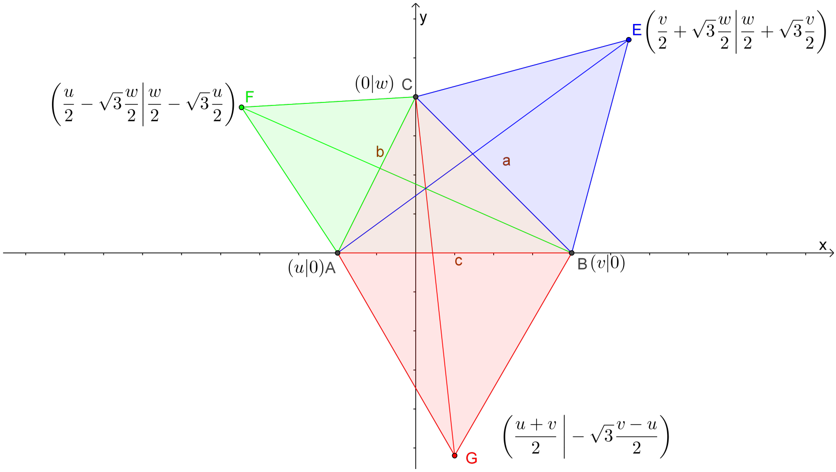


Abbildung: Die Spitzen E, F und G und ihre Koordinaten

Eine Standardrechnung

1. Zuerst berechnen wir die Koordinaten von

$$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} \frac{v}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2} - u \\ \frac{w}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{v}{2} \end{pmatrix} .$$

2. Wenn wir nun die Länge des Richtungsvektors $\overrightarrow{AE}$ ausrechnen, erhalten wir für ihr Quadrat

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AE}|^2 &= \left(\frac{v}{2} + \frac{w}{2}\sqrt{3} - u\right)^2 + \left(\frac{w}{2} + \frac{v}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \\ &= u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3} \cdot w(v - u) . \end{aligned}$$

3. Analoge Rechnungen ergeben mit

$$\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} \frac{u}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2} - v \\ \frac{w}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{u}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2} - w \end{pmatrix}$$

dasselbe Resultat!

Eine weitere Invariante

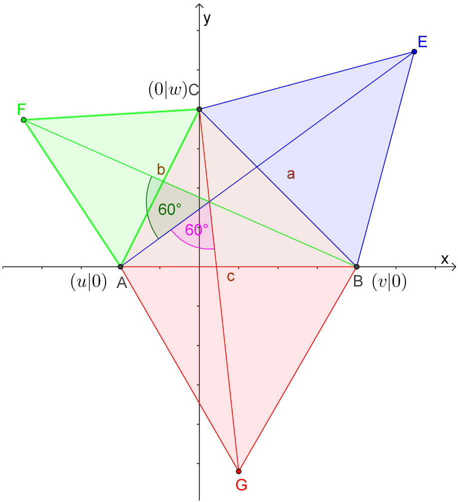


Abbildung: Die Winkel zwischen den Ecktransversalen sind gleich

Noch eine Standardrechnung

Wegen

$$\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{BF}|}=$$

$$=\quad\frac{\left(\frac{v}{2}+\frac{w}{2}\cdot\sqrt{3}-u\right)\cdot\left(\frac{u}{2}-v-\sqrt{3}\cdot\frac{w}{2}\right)+\left(\frac{w}{2}+\frac{v}{2}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\frac{w}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{u}{2}\right)}{u^2+v^2+w^2-uv+\sqrt{3}w(v-u)}=$$

$$=\quad-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2+v^2+w^2-uv+\sqrt{3}w(v-u)}{u^2+v^2+w^2-uv+\sqrt{3}w(v-u)}=-\frac{1}{2}$$

ist der Winkel zwischen AE und BF gleich 60°.
Dasselbe Resultat ergibt sich bei

$$\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CG}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{CG}|}\quad=\quad\frac{\left(\frac{v}{2}+\frac{w}{2}\cdot\sqrt{3}-u\right)\cdot\frac{u+v}{2}+\left(\frac{w}{2}+\frac{v}{2}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cdot\frac{u-v}{2}-w\right)}{u^2+v^2+w^2-uv+\sqrt{3}w(v-u)}=$$

$$=\quad-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2+v^2+w^2-uv+\sqrt{3}w(v-u)}{u^2+v^2+w^2-uv+\sqrt{3}w(v-u)}=-\frac{1}{2}\,.$$

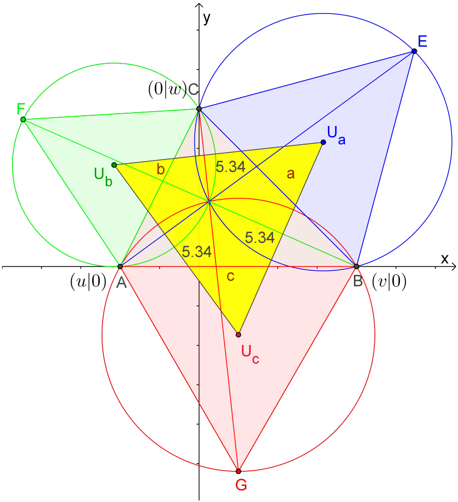


Abbildung: NAPOLEON BONAPARTE (1769 – 1821)

Abbildung: Die Umkreismittelpunkte der aufgesetzten Dreiecke bilden ein gleichseitiges Dreieck

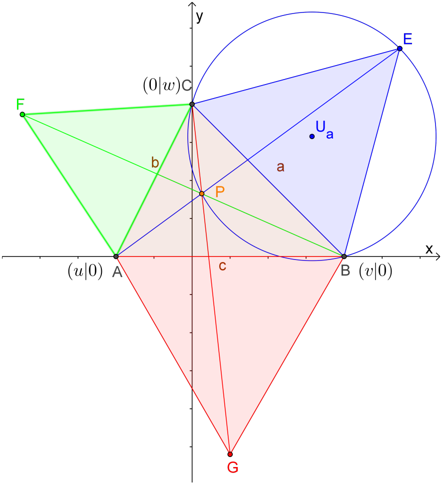


Abbildung: PIERRE DE FERMAT (1607 – 1665)

Abbildung: Die Ecktransversalen AE, BF und CG inzidieren

Ein Schnitt zweier Geraden

Wir schneiden die Ecktransversalen AE und CG und erhalten

$$x_P = \frac{w(v^2-u^2)+\sqrt{3}\cdot(u^2v+uv^2+uw^2+vw^2)}{6vw-6uw+2\sqrt{3}\cdot(u^2+v^2+w^2-uv)}$$
$$y_P = \frac{3uv(u-v)+\sqrt{3}w(v-u)^2+w^2(v-u)}{6vw-6uw+2\sqrt{3}\cdot(u^2+v^2+w^2-uv)}\,.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} E\left(\frac{v}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{w}{2}\,\middle|\,\frac{w}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{v}{2}\right)\\ A(u|0)\\ C(0|w)\\ G\left(\frac{u+v}{2}\,\middle|\,-\sqrt{3}\cdot\frac{v-u}{2}\right)\end{array}} \xrightarrow[\sqrt{3}\leftrightarrow-\sqrt{3}]{u\leftrightarrow v} \boxed{\begin{array}{c} F\left(\frac{u}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{w}{2}\,\middle|\,\frac{w}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{u}{2}\right)\\ B(v|0)\\ C(0|w)\\ G\left(\frac{u+v}{2}\,\middle|\,-\sqrt{3}\cdot\frac{v-u}{2}\right)\end{array}}$$

$$\boxed{x_P,\ y_P} \xrightarrow[\sqrt{3}\leftrightarrow-\sqrt{3}]{u\leftrightarrow v} \boxed{x_P,\ y_P}$$

Also: $BF\cap CG=\{P\}=AE\cap CG$!

P liegt auf dem Umkreis von ΔBCE

1. Radius des Umkreises:

$$r = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{v^2+w^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{v^2+w^2}{3}} \quad \text{und} \quad \boxed{r^2 = \frac{v^2+w^2}{3}}$$

2. verglichen mit dem Abstandsquadrat $|\overrightarrow{U_a P}|^2$

$$\left(\frac{w(v^2-u^2)+\sqrt{3}(u^2v+uv^2+uw^2+vw^2)}{6vw-6uw+2\sqrt{3}(u^2+v^2+w^2-uv)} - \frac{3v+\sqrt{3}w}{6}\right)^2 + \\ +\left(\frac{3uv(u-v)+\sqrt{3}w(v-u)^2+w^2(v-u)}{6vw-6uw+2\sqrt{3}(u^2+v^2+w^2-uv)} - \frac{3w+\sqrt{3}v}{6}\right)^2 \quad ?!$$

3. *Mathematica* schafft das: `Fullsimplify`!

Wir schaffen das auch, aber anders!

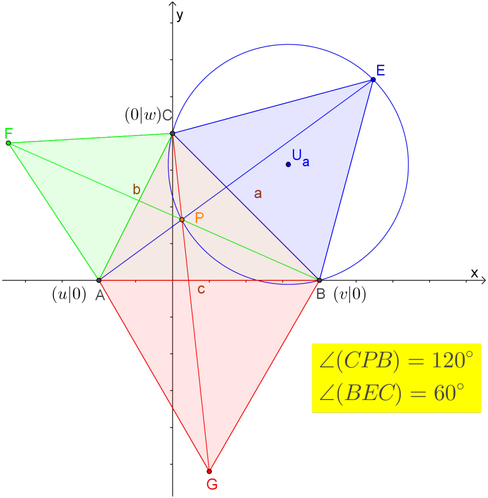


Abbildung: Viereck *PBEC* ist Sehnenviereck

Allerdings: Fallunterscheidungen! Erstens . . .

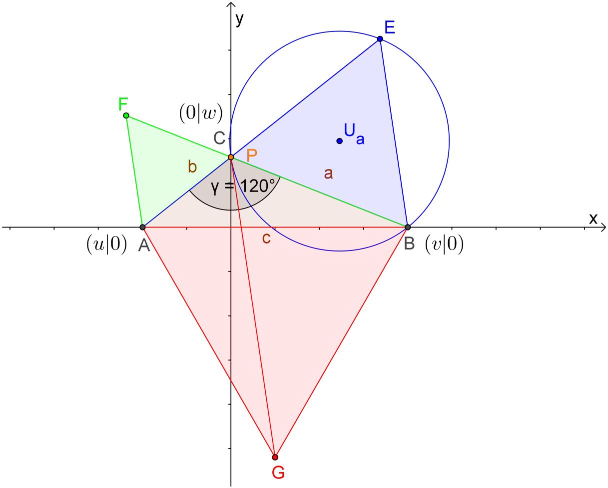


Abbildung: $P = C$

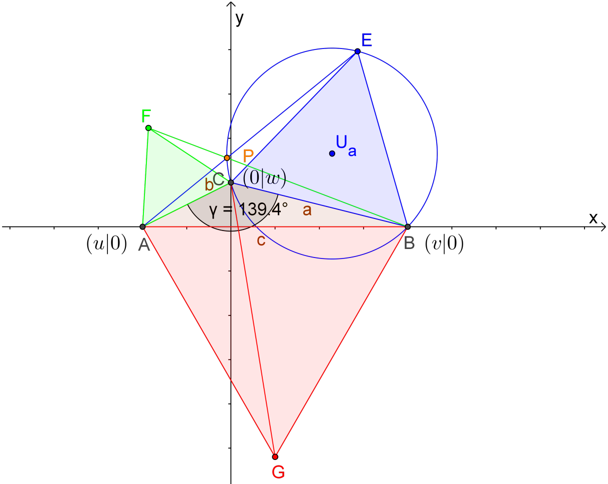


Abbildung: Sehne BE unter 60° von P und von C aus

Literatur 1

- Dörfler, W.: *Die Rolle der Zeichen beim Lernen von Mathematik. Gedanken im Anschluss an* PEIRCE *und* WITTGENSTEIN. Vortrag am 15. Jänner 2015 im Rahmen des Kolloquiums LehrerInnenbildung am Zentrum für LehrerInnenbildung der Universität Wien.

- Götz, S.: *Ein einfacher Zugang zu* LEMOINE*'s Problem — Gleichseitige Dreiecke als Aufsatzfiguren*. R&E-SOURCE, Nr. 7 (2017), 15 S. `https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/398`

Literatur 2

- Götz, S. und Hofbauer, F.: *Geraden, Kreise und Dreiecke: Vorschläge zur Orientierung, Manifestierung und Erkundung (in) einer elementargeometrischen Landschaft*. Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Vorträge auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 05.03.2012 bis 09.03.2012 in Weingarten. Für die GDM herausgegeben von Matthias Ludwig und Michael Kleine. Band 1. WTM, Münster 2012, S. 325–328. `http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/files/BzMU12_0166_Goetz.pdf`
- Götz, S. und Reichel, H.-C. (Hrsg.): *Mathematik 5* von R. Müller und G. Hanisch. öbv, Wien 2010.
- Götz, S. und Reichel, H.-C. (Hrsg.): *Mathematik 8* von R. Müller und G. Hanisch. öbv, Wien 2013.

Literatur 3

- Götz, S. und Süss-Stepancik, E.: *Die uvw-Sprache in der analytischen Geometrie*. Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Vorträge auf der 49. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 09.02.2015 bis 13.02.2015 in Basel. Für die GDM herausgegeben von: Franco Caluori, Helmut Linneweber-Lammerskitten und Christine Streit. Band 1. WTM, Münster 2015, S. 312–315. https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/34587/1/BzMU15_Goetz_UVWSprache.pdf
- Herget, W.: *Funktionen — immer wieder überraschend!* Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Vorträge auf der 47. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 04.03.2013 bis 08.03.2013 in Münster. Für die GDM herausgegeben von Gilbert Greefrath, Friedhelm Käpnick und Martin Stein. Band 1. WTM, Münster 2013, S. 464–467. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2013/Einzelvortraege/BzMU13-Herget.pdf

Literatur 4

- Müller, R.: *Forschen-Entdecken-Verifizieren-Beweisen mit dynamischer Geometrie. Gedanken ÜBER Grundkompetenzen*. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 46, 2013, S. 43–51. `http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2013%20Band%2046/VortragMuellerR.pdf`

- Pólya, G.: *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren*. Band I. Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1966.

- Wittmann, E. Ch.: *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2009 (6., neu bearbeitete Auflage).