Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

FRANZ PAUER (UNIVERSITÄT INNSBRUCK)

Die Lehrpläne aller Schulen der Sekundarstufe in Österreich verlangen vom Mathematikunterricht nicht nur die Vermittlung mathematischer Begriffe, Lehrsätze und Rechenverfahren, sondern auch eine nachhaltige Persönlichkeitsbildung, die der Festigung und Weiterentwicklung unserer demokratischen Gesellschaftsordnung dient. Insbesondere muss der Mathematikunterricht aktiv einen Beitrag *zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie* leisten. Das macht er vor allem dadurch, dass durch ihn *kritisches Denken*, die *Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen* und die *Fähigkeit, zugleich verständlich und präzise zu sprechen* besonders gefördert wird. Der Mathematikunterricht im 21. Jahrhundert muss sich deutlich von dem im 19. Jahrhundert unterscheiden, weil sich die Schülerinnen und Schüler heute zu mündigen Menschen und nicht wie früher zu Untertanen entwickeln sollen. In diesem Beitrag werden an Hand von einigen fachlichen Themen des Mathematikunterrichts Möglichkeiten dazu vorgeschlagen und diskutiert.

1. Einleitung

Im Mathematikunterricht müssen (wie in allen anderen Unterrichtsfächern) aktiv Beiträge *zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie* (siehe Allgemeine Bildungsziele in BMBWF ahs (2021) und BMBWF ms (2021)) geleistet werden. Die Frage, was das für den Mathematikunterricht konkret bedeutet, haben mir Lehramtsstudierende zumeist nur zögerlich beantwortet und zum Beispiel auf statistische Methoden für die Prognose und Interpretation von Wahlergebnissen verwiesen oder ganz allgemein auf einen wertschätzenden Umgang der Lehrpersonen mit den Schülerinnen und Schülern.

Die österreichischen Lehrpläne der Schulen der Sekundarstufe geben ausführlichere Antworten. Sie verlangen

> „. . . die Bereitschaft zum selbstständigen Denken und zur kritischen Reflexion besonders zu fördern.
> Urteils- und Kritikfähigkeit sowie Entscheidungs- und Handlungskompetenzen sind zu fördern, . . .
> Die Schülerinnen und Schüler sollen in Verfolgung entsprechender Lernziele produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen, . . .
> Folgende mathematische Grundtätigkeiten sind zu entwickeln: Kritisches Denken, insbesondere: Überprüfen von Vermutungen; Überprüfen von Ergebnissen; Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle; Erkennen von Mängeln in Darstellungen oder Begründungen; . . . “
> ((BMBWF ahs, 2021) und (BMBWF ms, 2021)).

Ähnliche Bildungsziele finden sich auch in den Lehrplänen berufsbildender höherer Schulen, zum Beispiel dem der Handelsakademie. Deren Absolventinnen und Absolventen

> „verfügen über die Kompetenz,
> - eine aktive und verantwortungsbewusste Rolle als Unternehmerin und Unternehmer, als Arbeitnehmerin und Arbeitnehmer oder als Konsumentin und Konsument einzunehmen, ...
> - aufgabenorientiert selbständig und im Team zu arbeiten“ (BMBWF hak, 2020).

Im Abschnitt für den Mathematikunterricht in der 9.-12. Schulstufe (Oberstufe) verlangt der Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schule:

> „Mathematik entwickelt die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen und fördert die Fähigkeit, zugleich verständlich und präzise zu sprechen. Das mathematische Prinzip, dass Behauptungen begründet werden müssen, soll Vorbild für andere Fächer und gesellschaftliche Bereiche sein.“ (BMBWF ahs, 2021)

Blicken wir zurück: Als im 18. Jahrhundert in Österreich die Schulpflicht eingeführt wurde, musste der Schulunterricht dem Bedarf eines autoritären Systems entsprechen. Es sollten einige Fertigkeiten und

Ich danke Manfred Borovcnik für das sorgfältige Lesen des Manuskripts und viele Verbesserungsvorschläge.

Kenntnisse vermittelt werden, die auf Zuruf ausgeführt werden konnten. Kritisches und selbständiges Denken großer Bevölkerungsgruppen waren nicht erwünscht.

Im 21. Jahrhundert muss der Schulunterricht in Österreich auf den Bedarf einer demokratischen Gesellschaft ausgerichtet sein. Daher muss sich auch der Mathematikunterricht deutlich von dem im 18. oder 19. Jahrhundert unterscheiden. Kein Unterricht ist „wertfrei“, auch der Mathematikunterricht nicht. Zwar sind die Ergebnisse der Mathematik, die unterrichtet werden, nicht von den Wertvorstellungen der jeweiligen Gesellschaft abhängig, aber sehr wohl die Art, wie diese vermittelt werden. Die aktuellen österreichischen Lehrpläne verlangen, dass im Mathematikunterricht auch Werte vermittelt werden, die für den Bestand unserer demokratischen Gesellschaft wichtig sind. In diesem Beitrag werden an Hand von einigen fachlichen Themen des Mathematikunterrichts Möglichkeiten dazu vorgeschlagen und diskutiert.

2. Mündige Menschen oder Untertanen?

2.1. Beispiel: Quadratische Gleichungen

Für eine demokratische Gesellschaft ist es wichtig, dass möglichst viele ihrer Menschen Behauptungen, Nachrichten oder Versprechungen (im politischen und im persönlichen Bereich) nicht einfach für wahr halten, ohne Begründungen zu fordern oder zumindest „Ist das wirklich so?“ oder „Warum?“ gefragt zu haben. Das kann im Mathematikunterricht gut eingeübt werden, indem alle Rechenverfahren und Behauptungen ausreichend begründet werden.

Die Aufgabe „Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2+6x-1=0$ ist!“ ist eine quadratische Gleichung, sie wird kurz als $x^2+6x-1=0$ angeschrieben. Man kann sie durch einfache Überlegungen schrittweise lösen:

- Weil $(x+3)^2 = x^2+6x+9$ ist, können wir x^2+6x zu $(x+3)^2-9$ umschreiben.
- Wir suchen also alle (reellen) Zahlen x so, dass $(x+3)^2-9-1=0$, also $(x+3)^2=10$ ist.
- Links und rechts des Gleichheitszeichens stehen positive Zahlen, wir können daher aus beiden die Wurzel ziehen und erhalten $x+3=\pm\sqrt{10}$.
- Daraus folgt, dass die gesuchten Zahlen $-3+\sqrt{10}$ und $-3-\sqrt{10}$ sind.

Wir haben dabei als bekannt vorausgesetzt, dass es genau eine positive reelle Zahl $\sqrt{10}$ gibt, deren Quadrat 10 ist. (Das folgt aus dem Zwischenwertsatz, der mit dem Bisektionsverfahren begründet werden kann. Das Lösen einer „rein quadratischen Gleichung“ wie zum Beispiel $x^2=10$ ist eigentlich der schwierigste Teil der Aufgabe oben.)

Gehen wir bei der quadratischen Gleichung $x^2+6x+10=0$ analog vor, dann schreiben wir sie zu $(x+3)^2=-1$ um. Weil es keine reelle Zahl gibt, deren Quadrat negativ ist, hat diese Gleichung keine (reelle) Lösung.

Auf gleiche Weise kann man für beliebige Zahlen a,b,c mit $a\neq 0$ die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$ lösen. Die Lösungsmenge ändert sich nicht, wenn man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens durch a dividiert, daher kann man sich auf die Lösung von quadratischen Gleichungen $x^2+px+q=0$ mit beliebigen reellen Zahlen p und q beschränken. Wie im Beispiel oben kann man diese in $(x+u)^2=v$ (mit $u:=\frac{p}{2}$ und $v:=-q+\frac{p^2}{4}$) umschreiben. Wenn v negativ ist, dann gibt es keine Lösung. Ist $v=0$, dann ist $-u$ die einzige Lösung. Wenn v positiv ist, hat die Gleichung genau zwei Lösungen, nämlich $-u+\sqrt{v}$ und $-u-\sqrt{v}$.

Der Unterricht zu quadratischen Gleichungen in einer autoritären Gesellschaft (in der Vorgesetzte nicht nach Begründungen gefragt werden dürfen) könnte so aussehen:

- Die quadratische Gleichung $x^2+6x-1=0$ ist wie folgt zu lösen:

- Lerne die Lösungsformel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ auswendig!
- Setze in die Lösungsformel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ein: 6 für p und -1 für q !
- Dann sind $-\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} - (-1)} = -3 \pm \sqrt{10}$ die zwei Lösungen.

Die Lösungsformel wird nicht hergeleitet (das ginge ganz einfach, wenn man wie beim ersten Zugang für $x^2 + px + q = 0$ anstatt für $x^2 + 6x - 1 = 0$ vorgeht), sondern „vorgesetzt" und dann müssen vorgegebene Handlungen ausgeführt werden. Die Schülerinnen und Schüler in einer autoritären Gesellschaft sollten ja zu guten Untertanen erzogen werden, die auf Zuruf in Formeln einsetzen, genau vorgegebene Rechenschritte ausführen oder andere Befehle ausführen. Es steht die Behauptung „So ist das!" (oder „So geht das!") und nicht die Frage „Ist das so?" (oder „Warum macht man das so?") im Vordergrund.

2.2. Beispiel: Systeme linearer Gleichungen

Eine demokratische Gesellschaft braucht Menschen, die selbständig und kreativ arbeiten können und die gelernt haben, dass bei vielen Problemen nicht nur ein (vorgegebener) Weg zum Ziel führt.

Ein System linearer Gleichungen (hier mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten) ist die folgende Aufgabe: Gegeben sind Zahlen a, b, c, d, e, f und gesucht sind alle Zahlenpaare (x, y) so, dass

$$ax + by = c \tag{1}$$
$$dx + ey = f \tag{2}$$

ist. Ein System linearer Gleichungen „äquivalent umformen" heißt, zu einem anderen System linearer Gleichungen (wieder mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten) übergehen, das dieselbe Lösungsmenge hat.
Die Lösungsstrategie ist: solange äquivalent umformen, bis man bei einem System linearer Gleichungen ankommt, dessen Lösungsmenge man ohne weitere Rechnung anschreiben kann.

Beispiele für äquivalente Umformungen sind jedenfalls:

- auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einer Gleichung mit derselben Zahl ungleich 0 multiplizieren,
- eine der zwei Gleichungen durch die Differenz dieser zwei ersetzen,
- die Reihenfolge der zwei Gleichungen vertauschen.

Diese drei Umformungen führt man zielgerichtet solange durch, bis man bei einem System linearer Gleichungen angelangt ist, dessen Lösungsmenge man ohne weitere Rechnungen anschreiben kann.
Zum Beispiel ist

$$x = c' \tag{3}$$
$$y = d' \tag{4}$$

ein solches System, seine Lösungsmenge (und damit auch die Lösungsmenge des Systems der linearen Gleichungen (1) und (2)) ist $\{(c', d')\}$.

Es kann aber auch sein, dass man ein solches besonders einfaches Gleichungssystem nicht erreicht, sondern bei

$$a''x + b''y = c'' \tag{5}$$
$$0 = 1 \tag{6}$$

oder

$$a''x + b''y = c'' \tag{7}$$
$$0 = 0 \tag{8}$$

landet . Die Lösungsmenge ist im ersten Fall leer und im zweiten Fall die unendliche Menge

$$\{(p,q)+t\cdot(-b'',a'')\,|\,t\in\mathbb{R}\}.$$

Dabei ist (p,q) irgendeine Lösung von (5). Zum Beispiel kann man dafür $(c''/a'',0)$ wählen, wenn $a''\neq 0$ ist (oder $(0,c''/b'')$, wenn $b''\neq 0$ ist).
Die Umformungen und ihre Reihenfolge wählt man so, dass man dem System linearer Gleichungen (3) und (4) (oder (5) und (6) oder (7) und (8)) immer näher kommt („Gauß - Elimination“, siehe zum Beispiel (Pauer, 2018)). Es gibt dazu viele Möglichkeiten. Wahl und Reihenfolge der Umformungsschritte sollte man der Kreativität und den Vorlieben der Schülerinnen und Schülern überlassen.

Die Autorinnen und Autoren mancher Schulbücher trauen das den Schülerinnen und Schülern offenbar nicht zu. Sie heben drei Varianten der Gauß - Elimination durch Angabe von bestimmten Umformungen und deren Reihenfolge hervor: das „Gleichsetzungverfahren“, das „Einsetzungsverfahren“ und das „Additionsverfahren“. Für die ersten zwei verwendet man zusätzlich zu den oben genannten drei Umformungen die Umformung „auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens einer Gleichung dieselbe Zahl addieren“.

In Schalk/Steiner (2007) wird das Einsetzungsverfahren so erklärt:

> „Aus einer der beiden Gleichungen wird durch Äquivalenzumformungen eine der Variablen in Abhängigkeit von der anderen ausgerechnet und das Ergebnis in die andere Gleichung eingesetzt. Wir erhalten sodannn eine Gleichung in einer Variablen, die wir mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln lösen können. Das Einsetzungsverfahren wird auch Substitutionsverfahren genannt.“

Bei Aufgaben dazu wird manchmal nicht nur „Löse das Gleichungssystem!“ verlangt, sondern auch, dass das nach einem vorgegebenen Schema gemacht wird: Löse das Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren! Löse das Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren! ...

Fördert die genaue Angabe dessen, was zu tun ist und in welcher Reihenfolge es zu tun ist, das Mündigwerden der Schülerinnen und Schüler?

Manchmal wird eine „Lösungsformel“, die Cramer'sche Regel, angegeben: wenn $ae-bd\neq 0$ ist, dann ist $(\frac{ce-bf}{ae-bd},\frac{af-cd}{ae-bd})$ die einzige Lösung des Systems von linearen Gleichungen (1) und (2). Hier stellen sich dieselben Fragen wie beim „Einsetzen in die Lösungsformel“ bei quadratischen Gleichungen.

Die Grundstrategie „mehrfach äquivalent umformen“ ist den Schülerinnen und Schülern schon aus der 5. oder 6. Schulstufe bekannt, wo man zum Beispiel die Aufgabe „Finde eine Zahl x so, dass $3x+4=10$ ist!“ durch Subtraktion von 4 und anschließende Division mit 3 auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens in die Gleichung $x=2$ überführt, deren einzige Lösung offensichtlich 2 ist. Ich habe erfreulicherweise kein Schulbuch gefunden, das als Lösungsstrategie vorschlägt, für die Gleichung $ax+b=c$ die „Lösungsformel“ $\frac{c-b}{a}$ zu verwenden und 3 für a, 4 für b und 10 für c einzusetzen.

3. Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

Will man eine mathematische Aufgabe lösen, muss man zuerst genau überlegen, was die auftretenden Begriffe bedeuten, was gegeben und was gesucht ist. Vorschnelle Annahme von zusätzlichen Voraussetzungen führt leicht zu falschen Ergebnissen. Nicht urteilen, ohne vorher genau nachzudenken um die betrachtete Situation gut zu verstehen, also „keine Vorurteile haben“, ist im persönlichen Umgang ebenso wichtig wie beim politischen Handeln.

Im Jahr 1972 hat der bekannte Austro-Pop-Sänger Wolfgang Ambros mit seinem Lied „Der Hofer“ für vorurteilsfreies Denken geworben. Eine aufgebrachte Menge, die vor einem Gemeindebau einen Toten gefunden hat, ist spontan der Meinung, dass dieser von einem Mitbewohner namens Hofer ermordet wurde: „Der Hofer war's, vom Zwanzgerhaus, der schaut mir so verdächtig aus“. Sie machen sich auf, Hofer zu lynchen, bis schließlich klar wird, „dass die Leich der Hofer is“.

Auch angesichts der vielen Verschwörungstheorien im Zusammenhang mit der Corona-Pandemie wird deutlich, dass nicht alles, was im Internet zu finden ist, ungefragt geglaubt werden soll. Vorurteile werden auch von diversen „populistischen Parteien“ in Europa benutzt, um Stimmen zu fangen.

Auf die Wichtigkeit, ohne Vorurteile zu denken, wurde schon vor Jahrhunderten hingewiesen. Davon zeugen die alte indianische Weisheit „Urteile nie über einen anderen, bevor du nicht einen Mond lang in seinen Mokassins gelaufen bist“ und die Anleitung des Ignatius von Loyola aus dem 16. Jahrhundert, dass man

> „mehr dazu bereit sein muss, die Aussage des Nächsten für glaubwürdig zu halten, als sie zu verurteilen. Vermag er sie nicht zu rechtfertigen, so forsche man nach, wie jener sie versteht“ (Loyola (1967), Seite 25).

3.1. Beispiel: Schlussrechnungen

Schlussrechnungen sind Aufgaben wie die folgenden:

„Simon zahlt in einem Supermarkt für 2 *kg Äpfel* 4 *Euro. Wieviel hätte er für* 3 *kg zahlen müssen?“*
„Irene kauft bei einem Bauern 2 kg Äpfel um 4 *Euro. Am nächsten Tag kommt sie mit einem Lastwagen und kauft* 1000 *kg derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss sie dafür bezahlen?“*

Diese Aufgaben sind nicht lösbar, solange nicht angegeben wird, wie Masse und Preis (funktional) zusammenhängen. Wenn zum Beispiel im Supermarkt die Aktion „Nimm 3, zahl’ 2“ für diese Äpfel läuft, dann kosten 3 kg Äpfel 4 Euro. Jeder Obsthändler weiß, dass Irene für eine Tonne Äpfel sicher viel weniger als 2000 Euro bezahlen wird. Wenn eine Ware in ausreichendem Maß zur Verfügung steht, dann bekommen Kunden, die viel kaufen, üblicherweise Rabatt.

Ist die Mathematik also auf praktische Fragen nicht anwendbar? Ganz im Gegenteil. In einem den heutigen Anforderungen entsprechenden Mathematikunterricht wird erklärt, dass man aus dem Preis von 2 kg Äpfeln allein nicht auf den von 3 oder 1000 kg Äpfeln schließen kann. Nur wenn vorab angenommen wird, dass der Zusammenhang zwischen Masse und Preis durch eine homogen-lineare Funktion beschrieben werden kann (also: kauft man doppelt, 3-mal, …, 1000-mal soviel, dann zahlt man doppelt, 3-mal, …, 1000-mal soviel), dann kosten 3 kg Äpfel 6 Euro bzw. 1000 kg Äpfel 2000 Euro. Weil es aber viele Möglichkeiten der Preisgestaltung gibt, reichen mathematische Überlegungen allein nicht aus. Es ist Sachkenntnis der jeweiligen Situation (also hier über die Preisgestaltung im Supermarkt bzw. des Bauern) erforderlich,. Schülerinnen und Schüler lernen an Hand solcher Beispiele, dass man nicht vorschnell urteilen oder Schlüsse ziehen soll.

Noch deutlicher wird die Notwendigkeit Sachkenntnis einzusetzen, bei der Berechnung der Einkommensteuer: Für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro im Jahr 2020 zahlte man 3850 Euro Steuer. Daraus allein kann man nicht auf die Höhe der Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 Euro schließen: Sie beträgt 13 930 Euro, für das doppelte Einkommen 50 000 Euro zahlt man mehr als dreimal so viel Steuer.

Zur Berechnung der Steuer ist Sachwissen nötig, das heißt, man muss den (funktionalen) Zusammenhang zwischen Einkommen und Steuer kennen. In Österreich ist die Steuer nicht proportional zum Einkommen, sondern berücksichtigt die finanzielle Leistungsfähigkeit: Für den lebensnotwendigen Teil des Einkommens ist keine oder nur wenig Steuer zu zahlen, für den darüber hinausgehenden mehr. Im Jahr 2020 wurde die Steuer so berechnet: für den Einkommensanteil bis 11 000 Euro war keine Steuer zu zahlen, für den von 11 000 bis 18 000 Euro 20 Prozent, für den von 18 000 bis 31 000 Euro 35 Prozent, für den Einkommensanteil von 31 000 bis 60 000 Euro 42 Prozent, für 60 000 bis 90 000 Euro 48 Prozent, für den von 90 000 bis 1 000 000 Euro 50 Prozent und für den über einer Million Euro 55 Prozent. Die Funktion, die jedem Einkommen die entsprechende Steuer zuordnet, ist also nicht linear, sondern stückweise linear und stetig.

3.2. Beispiel: Zahlenfolgen fortsetzen

In den Unterhaltungsseiten von Zeitungen und leider auch in verschiedenen Aufnahmeprüfungen oder Intelligenztests sind Aufgaben zu finden, bei welchen (endliche) Zahlenfolgen, Buchstabenfolgen, etc. fortzusetzen sind. Die Fragestellung legt nahe, dass es dafür nur eine „richtige“ Möglichkeit gäbe. Zumeist gibt es aber mehrere (manchmal auch beliebig viele) sinnvolle Möglichkeiten zur Fortsetzung.

Zum Beispiel: Setze die Buchstabenfolge $c, d, e, f, g, \ldots$ fort ! Bei dieser Aufgabe wird eine Klavierschülerin an die Tonleiter $c, d, e, f, g, a, h, c, \ldots$ denken, ein Volksschüler, der gerade das Alphabet gelernt hat, aber eher an $c, d, e, f, g, h, i, j, \ldots$.
Ein Walzertänzer wird die Zahlenfolge $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ vielleicht mit $1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ periodisch fortsetzen, und nicht wie vermutlich die meisten mit $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$.

Man kann zeigen, dass es für jede endliche Folge von Zahlen beliebig viele sinnvolle Bildungsgesetze gibt (die nur Addition und Multiplikation verwenden) und diese Folgen daher auf beliebig viele Weisen „sinnvoll“ fortgesetzt werden können.

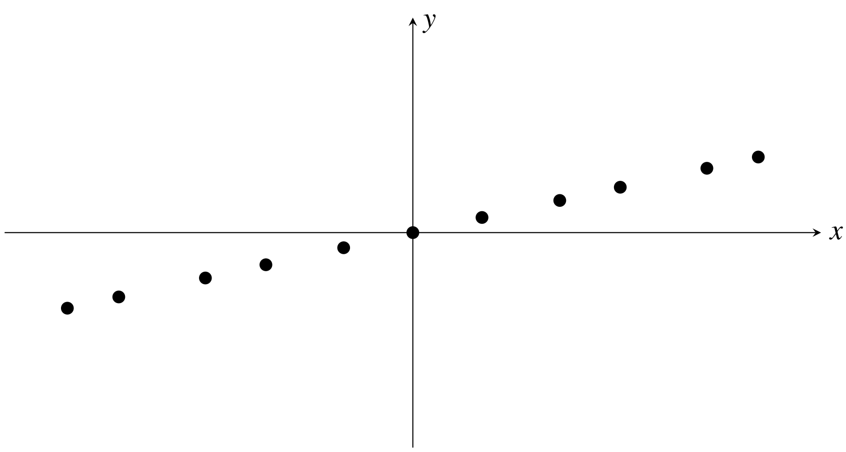
Zum Beispiel sind die ersten 5 Folgenglieder der Folge, die nach der Regel „Bilde für alle positiven natürlichen Zahlen n das Produkt der fünf Vorgänger $(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-5)$ und addiere dann n“ gebildet wird, die Zahlen $(-4)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 0+1=1,\ 2,\ 3,\ 4$ und $0\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+5=5$. Das nächste (sechste) Folgenglied ist aber nicht 6, sondern $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+6=126$ und das siebte Folgenglied 727.

Man mag einwenden, dass „die meisten“ die Folge $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ mit 6 und nicht mit 126 fortsetzen werden. Das weckt aber die Vermutung, dass bei solchen Tests nicht die Intelligenz der Testperson überprüft wird, sondern ob diese so wie die meisten denkt. Querdenkerinnen, Querdenker und Kreative können so „herausgefiltert“ werden.

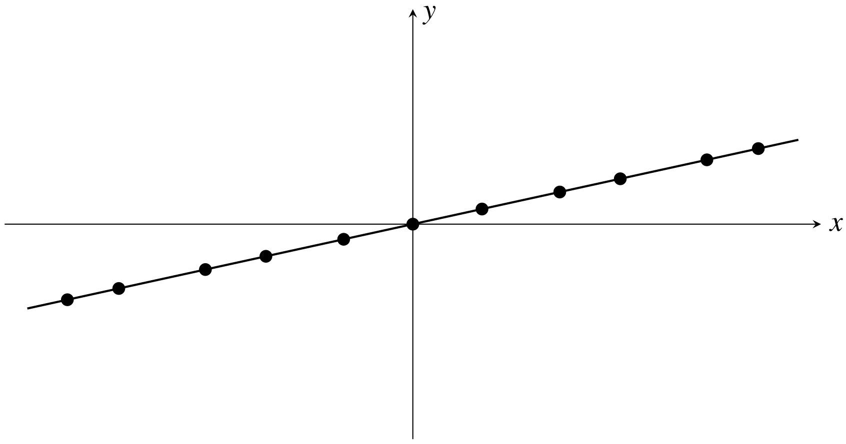
3.3. Beispiel: Interpolation

Manche Vorgänge werden durch Zahlenpaare beschrieben, die zum Beispiel durch Messung ermittelt wurden. Manchmal möchte man die zweite Komponente dieser Zahlenpaare als Funktionswert der ersten auffassen, wobei vorher festgelegt werden muss, welchen Typ diese Funktion haben soll. Dafür ist aber Sachwissen über den betrachteten Vorgang nötig, in der Regel genügen dafür mathematische Überlegungen nicht. Stellt man die gegebenen Zahlenpaare durch Punkte in einem Koordinatensytem dar, kann man diese Aufgabe geometrisch formulieren: Zeichne den Graphen einer Funktion vom vorgegebenen Typ, der alle diese Punkte enthält.

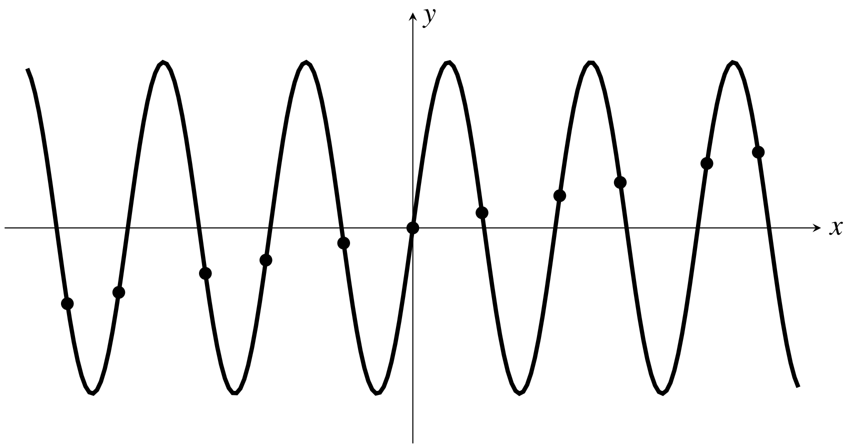
Wenn diese Punkte wie im folgenden Bild alle auf einer Geraden liegen,



ist die Versuchung groß, den betracheten Vorgang durch eine lineare Funktion zu beschreiben:



Wenn man allerdings außer den gemessenen Zahlenpaaren nichts über den Vorgang weiß, ist das aber voreilig. Wenn etwa der Vorgang periodisch ist, wäre ihm eine Beschreibung durch eine Sinusfunktion wie im folgenden Bild besser angepasst.



In der folgenden Geschichte führt die Annahme eines linearen Zusammenhangs zu einer falschen Antwort: In einer durch eine hohe Stadtmauer geschützten Stadt wurde ein Wächter vor das einzige Stadttor gestellt. Dieser darf nur die Personen einlassen, die seine Frage richtig beantworten konnten. Allen Bewohnerinnen und Bewohnern der Stadt wurde mitgeteilt, wie die Frage richtig beantwortet wird. Ein Fremder versteckte sich in der Nähe des Wächters und hörte zu: Der Wächter nannte den Eintritt Suchenden eine Zahl und diese antworteten immer mit einer Zahl und durften passieren. Der Fremde hörte nur 3-mal zu: Auf die Frage 28? wurde 14, auf 16? wurde 8 und auf 8? wurde 4 geantwortet. Er nahm an, dass immer die Hälfte der genannten Zahl als Antwort gegeben werden müsse. Auf die Frage 20? antwortete er daher mit 10, richtig wäre aber 7 gewesen. Warum? In der Stadt war vereinbart worden, als Antwort die Anzahl der Buchstaben des vom Wächter genannten Zahlwortes zu geben. Achtundzwanzig hat 14 Buchstaben, sechzehn 8, acht 4 und zwanzig 7 Buchstaben.

4. Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

Möchte man auf eine Frage eine eindeutige Antwort haben, muss man die Frage klar und für den Gesprächspartner verständlich formulieren. Im Mathematikunterricht kann die Fähigkeit zum klaren und genauen Denken sowie zum verständlichen und präzisen Sprechen entwickelt werden. Dafür sollten Aufgaben und neue Begriffe immer zugleich verständlich und präzise formuliert werden. Der Mathematikunterricht kann so einen Beitrag zu einer vernünftigen Diskussionskultur leisten, diese ist ein Grundpfeiler der Demokratie.
Wenn im Mathematikunterricht erlernt wird, klar und genau zu denken, verständlich und präzise zu sprechen, Aufgaben systematisch abzuarbeiten, dann wird damit auch das Selbstbewusstsein der Kinder und Jugendlichen gestärkt. Wer gelernt hat, mathematische Aufgaben durch Nachdenken und Diskussion

zu lösen, überträgt das vielleicht auch auf andere Bereiche und kann dann zum Beispiel Konflikte mit anderen Jugendlichen intelligenter lösen als durch Zuschlagen.

4.1. Beispiel: „Den Nenner wurzelfrei machen“

In der 8. oder 9. Schulstufe werden Aufgaben wie „Mache den Nenner von

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}$$

wurzelfrei!“ besprochen. Die einfachsten Lösungen dieser Aufgabe sind

$$\frac{\left(\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}\right)}{1}$$

oder, nach Eintippen in einen Taschenrechner,

$$2,43662682\ (=\frac{243662682}{100\,000\,000})\,.$$

An der Formulierung „Mache den Nenner wurzelfrei!“ irritiert zuallererst, dass $3\sqrt{5}-2$ keine ganze Zahl ist, daher nicht Nenner einer Bruchzahl sein kann. Es handelt sich hier um den Quotienten der reellen Zahlen $2\sqrt{5}+7$ und $3\sqrt{5}-2$, der „Bruchstrich“ ist somit ein Divisionszeichen. Eine präzise Formulierung der Aufgabe, deren Lösung dann eindeutig ist, wäre:
Berechne rationale Zahlen (Bruchzahlen) a und b so, dass

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}=a\sqrt{5}+b$$

ist.

Wurde ein Problem klar formuliert, liegt oft schon die Vorgangsweise zu dessen Lösung nahe. Man multipliziert man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit $3\sqrt{5}-2$ und erhält:

$$2\sqrt{5}+7=(3\sqrt{5}-2)\cdot(a\sqrt{5}+b)$$

und daraus

$$2\sqrt{5}+7=(3b-2a)\sqrt{5}+(-2b+15a)\,.$$

Das gesuchte Zahlenpaar (a,b) ist Lösung des Systems linearer Gleichungen

$$3b-2a=2 \tag{9}$$
$$-2b+15a=7\,, \tag{10}$$

also ist $a=\frac{25}{41}$ und $b=\frac{44}{41}$.

Wer die „binomischen Formeln“ kennt, hätte die Aufgabe auch schneller lösen können: Multipliziert man Divisor und Dividend mit $3\sqrt{5}+2$, erhält man

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}=\frac{(2\sqrt{5}+7)\cdot(3\sqrt{5}+2)}{(3\sqrt{5}-2)\cdot(3\sqrt{5}+2)} \tag{11}$$
$$=\frac{25\sqrt{5}+44}{41} \tag{12}$$
$$=\frac{25}{41}\sqrt{5}+\frac{44}{41}\,. \tag{13}$$

4.2. Beispiel: Komplexe Zahlen

Die Sprache im Mathematikunterricht soll einfach und verständlich sein und möglichst wenige Fachbegriffe verwenden. Die notwendigen Fachbegriffe müssen aber sorgfältig und präzise eingeführt werden. Die Zahlbereichserweiterung von den reellen zu den komplexen Zahlen ist die letzte Zahlbereichserweiterung, die in der Schule durchgeführt wird. Bei jeder Zahlbereichserweiterung wird zuerst die Menge der „neuen“ Zahlen definiert (so, dass diese die „alten“ Zahlen enthält), dann werden für die „neuen“ Zahlen die Rechenoperationen Addition und Multiplikation von den „alten“ auf die „neuen“ Zahlen“ so erweitert, dass alle Rechenregeln des „alten“ auch im „neuen“ Zahlbereich gelten.

Die Erweiterung von den reellen zu den komplexen Zahlen wird durch die Suche nach einer Zahl, deren Quadrat -1 ist, motiviert.

Als neue Zahlenmenge wählen wir einfach $\mathbb{R}^2$. Eine komplexe Zahl ist also ein Paar von reellen Zahlen. Wir fassen $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auf, indem wir jede reelle Zahl a mit der komplexen Zahl $(a,0)$ identifizieren.
Die Summe von zwei komplexen Zahlen definieren wir als die komponentenweise Summe dieser zwei Zahlenpaare:

$$(a,b)+(c,d) := (a+c,b+d)$$

Das Produkt von zwei komplexen Zahlen definieren wir nicht als das komponentenweise Produkt, sondern wie folgt:

$$(a,b)\cdot(c,d) := (a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+b\cdot c)$$

Nun kann man leicht nachprüfen, dass $(0,1)^2 = (-1,0) = -1$ ist.
Es ist ebenfalls leicht nachzuprüfen, dass alle Rechenregeln der reellen Zahlen auch für komplexe Zahlen gelten (in der Schule sollte man das nur exemplarisch tun, zum Beispiel für die Kommutativgesetze).
Man schreibt $\mathbb{C}$ für $\mathbb{R}^2$, wenn man Zahlenpaare nicht nur komponentenweise addieren, sondern wie oben auch multiplizieren möchte.

Warum haben wir die Multiplikation wie oben definiert? Wir schreiben abkürzend i für $(0,1)$ und a für $(a,0)$.
Wir möchten die Multiplikation so definieren, dass $i^2 = -1$ ist und dass für alle reellen Zahlen b gilt: $b\cdot(0,1) = (0,b)$. Dann ist $(a,b) = (a,0)+(0,b) = a+b\cdot(0,1) = a+b\cdot i$.
Gelten die Rechenregeln der reellen Zahlen, dann muss

$$(a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i) = a\cdot c+a\cdot(d\cdot i)+(b\cdot i)\cdot c+(b\cdot i)\cdot(d\cdot i) = (a\cdot c-b\cdot d)+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot i$$

sein.

Die geometrische Interpretation von komplexen Zahlen als Punkte der „komplexen Zahlenebene“ ist einfach: Sobald man in der Zeichenebene ein Koordinatensystem gewählt hat, kann man sie als $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ auffassen. Die erste Koordinatenachse ist dann eine Zahlengerade (die geometrische Darstellung von $\mathbb{R}$), die zweite Koordinatenachse ist die Menge aller reellen Vielfachen von $i = (0,1)$. Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl kann dann als Drehstreckung interpretiert werden.

In einem Schulbuch für die 11. Schulstufe (Freiler et al. (2016)) werden komplexe Zahlen so eingeführt:

> „Die imaginäre Einheit i ist jene Zahl, für die gilt: $i^2 = -1$.
> Alle Vielfachen der imaginären Einheit $b\cdot i$ mit $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ heißen imaginäre Zahlen.
> Mathematische Ausdrücke der Form $a+b\cdot i$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ heißen komplexe Zahlen.“

Schülerinnen und Schüler der 11. Schulstufe verstehen unter „Zahl“ eine reelle Zahl und kennen nur Addition und Multiplikation von reellen Zahlen.

Können sie diesem Text entnehmen, was „ i “ ist, was mit „ i^2 “ gemeint ist und was „Vielfache von i “ sind? Und wie addiert man eine reelle Zahl zur „imaginären Einheit“? Sind die Zahlen $3+2\cdot i$ und $2+3\cdot i$ verschieden? Wenn ja, warum?
Ist der Begriff „imaginäre Zahl“ notwendig? Oder legt er die Fehlvorstellung nahe, dass diese Zahlen „eigentlich“ nicht existieren?
Es gibt nicht nur eine komplexe Zahl, deren Quadrat -1 ist, sondern zwei, nämlich $(0,1)$ und $(0,-1)$, daher ist „i ist jene Zahl, ...“ irreführend.

Ich vermute, dass der Zugang dieses Schulbuchs den folgenden mathematischen Hintergrund hat: Mit einem „mathematischen Ausdruck der Form $a+b\cdot i$“ ist das mit Hilfe der Variablen i dargestellte Polynom $a+b\cdot i$ (vom Grad kleiner oder gleich 1) gemeint. Die Koeffizienten a und b sind durch das Polynom eindeutig bestimmt. $\mathbb{C}$ wird dann als die Menge aller dieser Polynome definiert. Als Addition verwendet man die übliche Addition von Polynomen, die Multiplikation muss aber anders definiert werden, weil das Produkt von zwei Polynomen vom Grad ≤ 1 auch Grad 2 haben kann. Man definiert daher das Produkt $(a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i)$ als den Rest des Produktes der zwei Polynome nach Division mit Rest durch das Polynom i^2+1, das ist $(ac-bd)+(ad+bc)\cdot i$.
Diese Definition der komplexen Zahlen ist mathematisch korrekt, aber für Schülerinnen und Schüler vermutlich nicht leicht nachvollziehbar. Betrachtet man nach dieser Definition komplexe Zahlen als Punkte der Gauß'schen Zahlenebene, geht man vom Polynom $a+b\cdot i$ zum Zahlenpaar (a,b) (und zum entsprechenden Punkt in einem Koordinatensystem) über.

Literatur

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2021): *Lehrpläne für allgemeinbildende höhere Schulen*, Fassung vom September 2021.
www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2021): *Lehrplan der Mittelschule*, Fassung vom September 2021.
www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=20007850

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2020): *Lehrplan der Handelsakademie - Wirtschaft und Recht*, Fassung vom 30. April 2020
www.hak.cc/unterricht/lehrplaene/lehrplan-der-handelsakademie-wirtschaft-und-recht

Freiler, Ph. et al. (2016): *Lösungswege 7*. Wien: Österreichischer Bundesverlag.

von Loyola, I.(1967): Geistliche Übungen. Übertragung und Erklärung von Adolf Haas. Freiburg: Herder.

Pauer, F., Stampfer, F. (2017): Diskret oder kontinuierlich modellieren. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* 50, 81–90. www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2017

Pauer, F. (2018): A Computational Approach to Systems of Linear Equations. In: Stewart, S. et al. (Eds.): *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra.* ICME-13 Monographs. Cham: Springer.

Schalk, H.-C., Steiner, G. (2007): *Mathematik 1*. 3. Auflage. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Anschrift des Verfassers

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik
Fakultät für LehrerInnenbildung
Universität Innsbruck
Innrain 52
A – 6020 Innsbruck
Österreich

franz.pauer@uibk.ac.at