Was ist und was soll Wahrscheinlichkeit?

MICHAEL OBERGUGGENBERGER (UNIVERSITÄT INNSBRUCK)

„Es gibt keine objektive Wahrscheinlichkeit“ – mit diesem Satz auf der ersten Seite der deutschen Ausgabe seines Buchs über Wahrscheinlichkeitstheorie markiert Bruno de Finetti den „subjektiven“ Standpunkt. Am anderen Ende des Spektrums steht die Quantenphysik, in der die Wahrscheinlichkeit eine Grundgröße der physikalischen Theorie ist und somit einen „objektiven“ Status besitzt. Dazwischen liegen zum Beispiel die Interpretationen der Wahrscheinlichkeit in den Technischen Wissenschaften („Risikoanalyse“), den Wirtschaftswissenschaften („Entscheidungstheorie“) oder auch im Alltagsleben („Lotto 6 aus 45“). Mit den Bezeichnungen von Wahrscheinlichkeit als „klassische“, „frequentistische“, „logische“, „operative“ sind weitere Ansätze zu deren Interpretation gemeint. Aufbauend auf eigenen Erfahrungen mit Stochastik in den Ingenieurwissenschaften sollen einige der Antworten auf die seit mehr als hundert Jahren kontrovers diskutierte, faszinierende Frage des Vortragstitels angesprochen werden.

1. Einleitung

Im Grundkompetenzenkatalog für die standardisierte Reifeprüfung AHS, SRDP (2021), findet man zum Thema „Wahrscheinlichkeitsechnung“ unter anderem die Punkte „WS 2.2 relative Häufigkeit als Schätzwert von Wahrscheinlichkeit verwenden und anwenden können“ und „WS 2.3 Wahrscheinlichkeiten unter der Verwendung der Laplace-Annahme (Laplace-Wahrscheinlichkeit) berechnen und interpretieren können, ...“ Man erkennt das Anliegen, die frequentistische Interpretation und die klassische Interpretation der Wahrscheinlichkeit zu vermitteln. Auffallend abwesend ist die subjektivistische Interpretation der Wahrscheinlichkeit. Diese ist jedoch in allen Bereichen, in denen *Entscheidungen unter Unsicherheit* zu fällen sind, von wesentlicher Bedeutung (dazu gehören nicht nur Planungsentscheidungen, sondern auch Risiko- und Sicherheitseinschätzungen in den Technischen Wissenschaften).

Dieser Aufsatz verfolgt drei Anliegen. Erstens, um Wahrscheinlichkeitstheorie in der Realität anzuwenden zu können, braucht es Interpretationsregeln. Zweitens, es gibt sehr viel mehr Zugänge zur Wahrscheinlichkeitslehre als die drei genannten. Insbesondere soll die bedeutende Rolle der subjektivistischen Interpretation herausgearbeitet werden. Drittens, der axiomatische Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie kann auf viele verschiedene Arten erfolgen, nicht nur nach den Axiomen von Kolmogoroff.

Aufbauend auf meinen Anwendungserfahrungen mit Stochastik und Risikoanalyse in den Ingenieurwissenschaften, möchte ich in diesem Aufsatz einen Rundblick wagen. Dabei soll auch die kritische und teilweise kontrovers geführte Debatte über den „richtigen Zugang“ angeschnitten werden. Unterschiedlichste Blickwinkel von Techniker*innen, Risikoanalyst*innen bis zu Quantenphysiker*innen sollen angesprochen werden.

Der Aufsatz beginnt im Abschnitt 2 mit Überlegungen zur naturwissenschaftlichen Modellbildung, kontrastiert mit stochastischer Modellbildung. Ein paar Beispiele aus den Ingenieurwissenschaften mögen die Leser*innen an die Problematik des Wahrscheinlichkeitsbegriffs heranführen, sobald dieser mit der Realität interagiert.

Im Abschnitt 3 wende ich mich den Semantiken des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu. Im Vordergrund stehen die drei verbreitetsten Interpretationen – die klassische, die frequentistische und die subjektivistische Interpretation. Ein Unterabschnitt ist den wechselseitigen Kritikpunkten gewidmet. Der Abschnitt endet mit einem Ausblick auf einige der weiteren Zugänge. Ziel des Abschnitts 4 ist es, meine Behauptung zu belegen, dass es neben der kolmogoroffschen Axiomatik auch andere Zugänge gibt. Ich führe hier die Grundüberlegungen von de Finetti aus. Der Einschub 5 stellt noch einmal die Frage, ob der Wahrscheinlichkeitsbegriff als objektiv oder als subjektiv zu sehen ist. Dies leitet zu den zwei Teilgebieten

Ich danke Hans Humenberger für die kritische Durchsicht des Manuskripts und Lukas Neumann für ausführliche Diskussionen, die zu einer deutlichen Verbesserung der Erstversion führten.

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 53, 2021, S. 89 - 106.

der Physik über – der statistischen Mechanik und der Quantenmechanik –, in denen Wahrscheinlichkeit eine im Theoriesystem selbst verhaftete Größe ist. Dies wird im Abschnitt 6 jedenfalls in Grundzügen erläutert.

Der Aufsatz möchte einen Rundblick (mit Lücken) ermöglichen. Er ist nicht für eine Umsetzung im Schulunterricht gedacht. Es gibt jedoch einige didaktische Fachliteratur, die sich mit verschiedenen Wahrscheinlichkeitsbegriffen und ihrer Umsetzung im Unterricht befasst (und insbesondere auch der subjektivistischen Interpretation Raum gibt). Einige Hinweise habe ich im Schlussabschnitt gesammelt.

2. Theorie und Realität

In der Regel beziehen sich mathematische Modelle nicht unmittelbar auf die Wirklichkeit[1], sondern dienen als Bausteine einer Fachdisziplin (etwa Physik, Biologie, Wirtschaftswissenschaften), die ihrerseits Aussagen über die Wirklichkeit macht. Dies trifft auf die Wahrscheinlichkeitstheorie nur teilweise zu – die Wahrscheinlichkeitstheorie ist eine der mathematischen Disziplinen, die beabsichtigt, selbst Wirklichkeit zu erklären. Ich möchte daher etwas ausholen und zunächst die naturwissenschaftliche Vorgangsweise in groben Zügen beschreiben.

2.1. Naturwissenschaft und Wirklichkeit

Eine naturwissenschaftliche Theorie bezieht sich auf einen Ausschnitt der Wirklichkeit, den intendierten Anwendungsbereich. Dazu gehört der Übergang vom einen zum anderen – Übersetzungsvorschriften, die Semantik/Interpretation der Theorie. Der Anwendungsbereich etwa der klassischen Mechanik ist die Bewegung makroskopischer Körper mit mäßigen Geschwindigkeiten. Interpretiert werden müssen Begriffe wie Kraft, Masse, Geschwindigkeit.

Spezialisiert auf konkrete Anwendungen, liefert die Theorie mathematische Modelle. Diese Modelle enthalten Zustandsgrößen und Modellparameter. Die Aufgabe der Interpretation ist es jetzt, die Zustandsgrößen in der Wirklichkeit zu identifizieren und Vorschriften zur Messung der Modellparameter anzugeben. Die Wirklichkeit steuert die Werte der Modellparameter (und Randbedingungen) bei, das Modell erzeugt eine Voraussage für die Zustandsgrößen, welche dann ihrerseits an der Wirklichkeit zu überprüfen ist. Zwei Beispiele mögen dies erläutern.

Beispiel 2.1 *Das berühmte SIR-Modell der Epidemiologie ist das System von Differentialgleichungen*

$$\dot{S}(t) = -\frac{\beta}{N}S(t)I(t), \qquad \dot{I}(t) = \frac{\beta}{N}S(t)I(t) - \gamma I(t), \qquad \dot{R}(t) = \gamma I(t).$$

Es soll die Ausbreitung einer Infektion innerhalb einer Bevölkerung modellieren. Die Zustandsgrößen zum Zeitpunkt t sind die Anzahl $S(t)$ der ansteckbaren Individuen, die Anzahl der $I(t)$ der Infizierten und die Anzahl $R(t)$ der aus dem Infektionsgeschehen Entfernten. Die Modellparameter sind die Gesamtzahl N der Individuen, die Infektionsrate β und die Entfernungsrate γ (durch Genesung oder Tod). Um den Epidemieverlauf vorhersagen zu können, müssen noch die Anfangsbedingungen $S(0)$, $I(0)$ und $R(0)$ angegeben werden. Die Wirklichkeit liefert die Modellparameter durch Beobachtung und statistische Auswertung. Umgekehrt liefert die Modellrechnung dann eine Prognose für den Wert der Zustandsgrößen $S(t), I(t), R(t)$ zu einem späteren Zeitpunkt t, welche wiederum an der Realität überprüft werden kann. Die Modellierung unterliegt offenbar drei Sorten von Unsicherheiten: Unsicherheit in den Modellparametern, Unsicherheit in den Anfangsdaten und Unsicherheit in der Wahl des Modells.

Beispiel 2.2 *Ein Beispiel aus der Elastostatik, einem Teilgebiet der klassischen Mechanik, ist der Euler-Bernoulli-Balken, der in den Technischen Wissenschaften häufig als einfaches Modell von balkenförmigen Objekten, wie etwa Brücken, eingesetzt wird. In der Balkengleichung*

$$EI\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}w(x) = q(x) \tag{1}$$

[1] Ich verwende das Wort „Wirklichkeit" oder „Realität" in naivem Sinn als „die Welt, in der wir leben", ohne auf eine philosophische Diskussion des Begriffs eingehen zu wollen.

ist die vertikale Auslenkung $w(x)$ an der Stelle x (in Längsrichtung) die Zustandsgröße; Modellparameter sind der Elastizitätsmodul E und das Flächenträgheitsmoment I der Querschnittsfläche (gemeinsam als Biegesteifigkeit EI bezeichnet) sowie die Streckenlast $q(x)$, in diesem Fall eine Funktion. Zur Vorhersage der Auslenkung muss noch die Art der Lagerung an den beiden Balkenenden vorgegeben werden. Abbildung 1 veranschaulicht den belasteten Balken und dessen Durchbiegung.

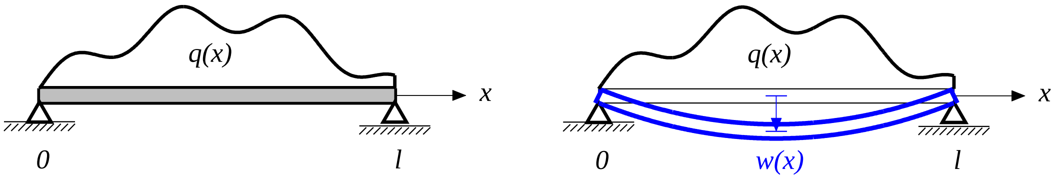

Abbildung 1: Schematische Darstellung des Euler-Bernoulli-Balkens

Dabei ist I eine geometrische Größe, E kann in Laborversuchen am verwendeten Material bestimmt werden; die Belastung $q(x)$ ist entweder durch den Verwendungszweck des Balkens vorgegeben oder kann in Parameterstudien variiert werden. Nach Einsetzen der Parameterwerte in Gleichung (1) ergibt deren Lösung eine Vorhersage der Durchbiegung $w(x)$. Parameterunsicherheiten ergeben sich durch Messfehler; die Modellunsicherheit besteht vor allem in der Frage, ob das eindimensionale Modell hinreichend genau ist oder ob zum Beispiel Querdehnungen und Verdrehungen berücksichtigt werden müssen.

2.2. Wahrscheinlichkeit und Wirklichkeit

Wenden wir uns dem Verhältnis von Wahrscheinlichkeit und Wirklichkeit zu. Legen wir – wie in der mitteleuropäischen universitären Ausbildung üblich – die von Kolmogoroff (1933) eingeführte Axiomatik der Wahrscheinlichkeitstheorie zu Grunde. Die Modelle beruhen bekanntlich auf dem Konzept eines Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, Σ, P), wobei Ω eine Menge, Σ eine σ-Algebra von Teilmengen von Ω und P eine Funktion von Σ nach $[0,1]$ ist, die die drei Axiome

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1 \quad \text{und} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{für alle} \quad A, B \in \Sigma$$

erfüllt. (Für die Zwecke dieser Darlegung möge der endlich additive Fall genügen.) In den beabsichtigten Anwendungen ist dann jeweils Ω und Σ und die Mengenfunktion P festzulegen, das heißt, es geht um die Übersetzung der Theorie in die Wirklichkeit. Im Gegensatz zu den Beispielen aus der Epidemiologie und Mechanik muss eine Übersetzungsvorschrift von außen eingeführt werden – und damit sind wir mitten im Disput über die Semantik der Wahrscheinlichkeitstheorie angelangt. Kolmogoroff selbst gibt in seinem grundlegenden Werk (dessen erklärtes Ziel ja die Axiomatisierung ist) nur eine vage Andeutung einer Interpretation von P als relativer Häufigkeit.

Beispiel 2.3 *Als bekanntes Beispiel sei der Münzwurf (K = Kopf, Z = Zahl) herangezogen. Ein naheliegender Wahrscheinlichkeitsraum ist $\Omega = \{K, Z\}$. Für Σ wird man die Potenzmenge $\{\emptyset, \{K\}, \{Z\}, \Omega\}$ wählen. Ist p die Wahrscheinlichkeit, Kopf zu werfen, so folgt aus den Axiomen, dass die Wahrscheinlichkeit, Zahl zu werfen, gleich $1 - p$ ist. Aber woher bekommt man p? Im Abschnitt 3 werden die wichtigsten Interpretationen der Wahrscheinlichkeit ausführlich diskutiert, daher hier nur kurz angerissen. Vom klassischen Standpunkt aus wird man – unter Annahme einer ungezinkten Münze – aus dem Prinzip vom unzureichenden Grund $p = 1/2$ annehmen. Vom frequentistischen Standpunkt aus würde man eine Serie von sehr vielen Münzwürfen unter identischen Bedingungen vornehmen und dann p als die relative Häufigkeit des Ergebnisses K in der Serie schätzen. In der subjektivistischen Herangehensweise wäre p der Einsatz, den man für eine Wette bereit ist zu zahlen, die einen Gewinn von 1 bei Auftreten von K abwirft.*

Beispiel 2.4 *Etwas näher an der Wirklichkeit des Alltagslebens liegt die Hochwasserprognose. Was ist ein 1000-jähriges Hochwasser und was bedeutet eine Wahrscheinlichkeitsangabe von „einmal in tausend Jahren“? Dem liegt folgende Vorgangsweise zugrunde. Eine einjährige Messreihe von täglichen Durchflüssen Q [m^3/s] an einer Pegelmessstelle ergibt eine Stichprobe von 365 oder 366 Durchflüssen.*

Das Jahresmaximum HQ als Maximum einer Stichprobe unterliegt einer Extremwertverteilung. Hat man die Jahresmaxima über mehrere Jahre, so kann man daran eine Extremwertverteilung anpassen. Aus der zugehörigen kumulativen Verteilungsfunktion kann man das $p \cdot 100\%$-Quantil Q_p ablesen, definiert durch $P(HQ \leq Q_p) = p$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Jahresmaximum größer als Q_p ist, ist folglich $p_{\text{ü}} = 1 - p$. Die Jährlichkeit ist dann $J = 1/p_{\text{ü}}$ mit dem zugehörigen Hochwasserwert $HQ_J = Q_p$. Das 100-jährige Hochwasser erhält man als das 99%-Quantil der kumulativen Verteilungsfunktion, das 50-jährige als das 98%-Quantil usw.; die Darstellung erfolgt üblicherweise in einem halblogarithmischen Diagramm, Jährlichkeit längs Abszisse unf Durchfluss längs Ordinate. In Abbildung 2 links[2] sieht man das Hochwasser des Inn in Innsbruck aus dem Jahr 2005. In der Graphik rechts wurde an eine zehnjährige Messreihe (1971 – 1980) am Pegel Innsbruck eine Gumbelverteilung angepasst. (Die Punkte entsprechen den gemessenen Jahresmaxima, gewonnen aus der empirischen Verteilungsfunktion der Stichprobe vom Umfang zehn.) Der am 23.08.2005 gemessene Durchfluss war 1525 m^3/s und entsprach nach dieser Rechnung ungefähr einem 1000-jährigen Hochwasser.

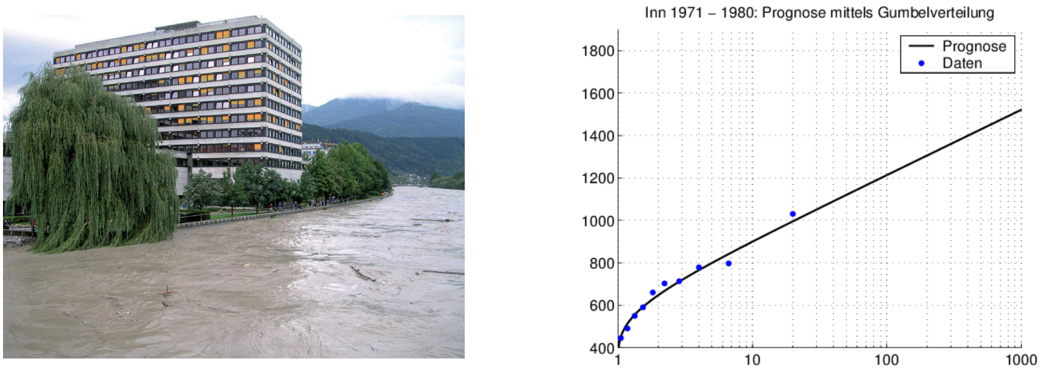

Abbildung 2: Links: Hochwasser des Inn am 23.08.2005 am Universitätsgebäude in Innsbruck. Rechts: Hochwasserprognose Inn am Pegel Innsbruck mittels Gumbelverteilung

Das beschriebene Prognoseverfahren ist ein Standardverfahren; natürlich wird man möglichst längere Datenreihen zu Grunde legen, mehrere verschiedene Extremwertverteilungen vergleichen, Daten bereinigen oder gewichten, Konfidenzintervalle für die Jährlichkeiten ermitteln. Klar ist jedoch, dass man nicht Messreihen über tausende Jahre zur Verfügung hat und der Inn sich in solchen Zeiträumen natürlich verändert. Die Angabe einer Wahrscheinlichkeit von „einmal in tausend Jahren“ ist also eher ein etabliertes Ritual als eine Aussage über die Wirklichkeit. Dennoch müssen zur Bemessung zukünftiger Hochwasserschutzmaßnahmen derartige Prognosen herangezogen werden. Hier begegnen wir zum ersten Mal einer „operativen Wahrscheinlichkeit“, welche keine wörtlich interpretierbare Bedeutung hat, aber im Rahmen normierter Bemessungsvorschriften anzuwenden ist.

Beispiel 2.5 *Als paradigmatisches Beispiel aus den Ingenieurwissenschaften möge die Bemessung erdverlegter Rohre dienen. Ein Bauzustand während der Verlegung ist in Abbildung 3 links[3] dargestellt. Auf die Rohre wirken im Endzustand die Last der Überdeckung und die Verkehrslasten; entlastend wirkt die elastische Auflage unter den Rohren (in der Regel verpresster Kies), schematisch skizziert in der Graphik rechts[4]. Häufig wird zur Modellierung die Balkengleichung (1) durch die entlastende Wirkung der elastischen Auflagerkraft ergänzt (die so genannte Winkler-Bettung), proportional zur Auslenkung des Balkens:*

$$EI \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4} w(x) + bc\, w(x) = q(x). \tag{2}$$

Dabei ist EI die Biegesteifigkeit der Rohre, b die so genannte effektive Dicke (deren Wirkung auf die Auflage von der Geometrie der Rohre abhängt) und c der Bettungskoeffizient, der die linear-elastische

[2] Quelle: alpS, PDF-Seite 8 in https://www.uibk.ac.at/iup/buch_pdfs/alpine_space_vol.14.pdf (Zugriff: 27.10.2021)
[3] Quelle: Gammel Engineering, https://www.gammel.de/de/lexikon/Fernwarme-Nahwarme/4760? (Zugriff: 27.10.2021)
[4] Quelle: Bolotin (1969), Abschnitt 61

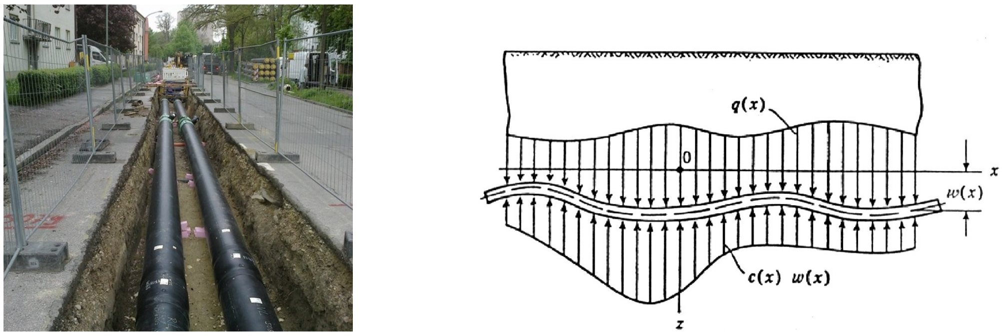

Abbildung 3: Links: Erdverlegte Rohre im Bauzustand. Rechts: schematische Skizze der Winkler-Bettung

Reaktion der Auflage beschreibt. Alle diese Modellparameter unterliegen zufälligen, jedenfalls nicht vollständig bekannten Schwankungen. Die Größen E, I und b und deren statistische Schwankungsbreiten (zum Beispiel bei im Schleuderguss hergestellten Rohren nicht unbedeutend) werden vom Rohrhersteller angegeben. Der Bettungskoeffizient hängt von der Qualität der Verlegungsarbeit ab und ist nach Rohrverlegung de facto unmessbar (außer man gräbt alles wieder aus). Die zu erwartende Belastung $q(x)$ *ist ein ortsabhängiges Zufallsfeld und kann nur vermutet werden.*

*In der Entwurfsphase ist es Aufgabe der planenden Ingenieur*innen, die Rohre so zu bemessen, dass sie bei gegebener Last* $q(x)$ *nicht versagen, also „halten". Ein typisches Versagenskriterium ist, dass das maximale Biegemoment* $EIw''(x)$ *an keiner Stelle einen maximal zulässigen Wert M überschreitet. Dies geschieht durch geeignete Materialwahl (E), Geometrie (b, I) und Bettung (c).*

Seit Anfang der 2000er Jahre gilt die probabilistische europäische Norm EN 1990:2002, Eurocode (2002). Alle genannten Modellparameter sind als Zufallsgrößen aufzufassen. Die Bemessung eines Bauwerks hat so zu erfolgen, dass eine vorgegebene Versagenswahrscheinlichkeit nicht überschritten wird. Die Versagenswahrscheinlichkeit ist definiert als

$$p_f = P(Last > Belastbarkeit).$$

Diese lässt sich bei bekannten Verteilungsfunktionen der Modellparameter aus Gleichung (2) berechnen. Die Norm fordert nun

$$p_f \leq 10^{-6} = \frac{1}{1000000}$$

für das instantane Versagen und $p_f = 10^{-5}$ *für das Versagen über die geplante Lenbenszeit (bei erdverlegten Rohren in der Regel 50 bis 100 Jahre).*

Das erstaunliche – und bei Einführung der Norm in der Ingenieurliteratur heftig diskutierte – Faktum ist die Erfordernis, immens kleine Wahrscheinlichkeiten abzuschätzen, und das unter der Bedingung weitgehender Unkenntnis der probabilistischen Eigenschaften der verwendeten Modelle. (Die Norm umgeht das Problem durch in den Normungskommissionen ausgehandelte Sicherheitsbeiwerte, basierend auf den probabilistischen Ansätzen – die Bemessung nach den strikten Konzepten der probabilistischen Vorgaben bleibt allerdings eine erlaubte Option.)

Für unsere Zwecke sei vermerkt, dass Wahrscheinlichkeit hier in sehr unterschiedlichen Erscheinungsformen auftritt:

- mit statistischen Daten hinterlegbare Werte (E, I, b);
- subjektive Einschätzungen von Bauzuständen (c);
- Vermutungen (oder normativ vorgeschriebene) Annahmen über die zukünftigen Belastungen $(q(x))$;
- normativ geforderte Wahrscheinlichkeitswerte.

Dies erkennt die Norm auch an, indem sie von einem „operativen“ Wahrscheinlichkeitsbegriff spricht (mehr dazu im Abschnitt 3.5).

3. Semantiken des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Die Beispiele aus Abschnitt 2 zeigen den dringenden Bedarf, dem mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Anwendung auf die Wirklichkeit eine Bedeutung zu geben. Es geht hier um die *Interpretation* oder *Semantik* der Wahrscheinlichkeitstheorie, das heißt, wie deren Begriffe in der Realität zu interpretieren sind. Die Wahl der Interpretation hat deutliche Konsequenzen für die empirischen Mess- und Entscheidungsmethoden. Entsprechend verwundert es nicht, dass seit der ersten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts eine teilweise leidenschaftliche Auseinandersetzung zwischen verschiedenen „Schulen“ im Gange ist.

Welche Interpretationen gibt es? Terry Fine (1973) listet in seiner Monographie „Theories of Probability“ (man beachte die Mehrzahl im Titel) elf verschiedene Zugänge auf; Ziel des Werks ist die Analyse und der Vergleich von sieben dieser Zugänge.

Dieser Abschnitt greift zunächst die drei verbreitetsten und wohl auch im Schulunterricht wichtigsten Interpretationen der Wahrscheinlichkeit heraus: die *klassische*, die *frequentistische* und die *subjektivistische* Deutung. Anschließend folgt ein kurzer Abriss über weitere Zugänge.

3.1. Klassische Wahrscheinlichkeit

Dieser Wahrscheinlichkeitsbegriff wird oft mit dem Namen *Laplace* verbunden. Der Zugang ruht auf dem Prinzip vom unzureichenden Grund, sehr schön formuliert in Carnap/Stegmüller (1959): „Wenn keine Gründe dafür bekannt sind, um eines von verschiedenen möglichen Ereignissen zu begünstigen, dann sind die Ereignisse als gleichwahrscheinlich anzusehen.“ Auf dasselbe hinaus läuft die bekannte Formulierung, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A durch

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}} \tag{3}$$

anzugeben ist, laut Laplace (1825) „ ... la probabilité ... est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles.“

Diese Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs wird vor allem angewendet, wenn man ein *kombinatorisches Modell* des zu beschreibenden Vorgangs hat. Typische Beispiele sind bekanntlich viele Arten von Spielen, bei denen vermutet wird, dass sie sich gemäß des Postulats verhalten, darunter natürlich das Würfeln mit einem ungezinkten Würfel (jede Augenzahl gleich wahrscheinlich) oder das Zahlenlotto.

Beispiel 3.1 *Wird beim Zahlenlotto 6 aus 45 das Ereignis „Sechs Richtige“ mit A bezeichnet, so ist die Anzahl der günstigen Fälle gleich 1, die Anzahl der möglichen Fälle gleich der Anzahl aller möglichen Sechser unter 45 Zahlen, also gleich* $\binom{45}{6} = 8145060$. *Somit ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gleich*

$$P(A) = \frac{1}{8145060} = \dots 0.0000001227738 \dots \approx 10^{-7}.$$

Der kombinatorische Ansatz geht aber über die Modellierung von Spielen weit hinaus. Er dient zum Beispiel häufig zur Begründung der Wahl statistischer oder probabilistischer Modelle.

Beispiel 3.2 *Der Typ der Verteilungsfunktion der Lebensdauer eines radioaktiven Partikels kann aus dem radioaktiven Zerfallsgesetz abgeleitet werden. Ist von einer radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt* $t = 0$ *eine Menge* $M(0)$ *vorhanden, so besagt das Zerfallsgesetz, dass zum Zeitpunkt* $t > 0$ *noch*

$$M(t) = M(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

übrig ist, wobei sich λ *aus der Halbwertszeit* τ *ergibt:* $\lambda = \ln 2/\tau$. *Bezeichnet* T *die Lebenszeit eines einzelnen radioaktiven Partikels, so gilt demnach*

$$P(T > t) = \frac{M(t)}{M(0)} = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

da T *eben größer* t *ist, falls das Partikel zu diesem Zeitpunkt noch nicht zerfallen ist. Man erhält damit die Verteilungsfunktion und Verteilungsdichte der Zufallsgröße* T *zu*

$$F_T(t) = 1 - P(T > t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad f_T(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \textit{für } t \geq 0,$$

also eine Exponentialverteilung.

3.2. Frequentistische Interpretation

In dieser wohl am weitesten verbreiteten Interpretation wird die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A durch die relative Häufigkeit des Auftretens von A in einer Zufallsstichprobe hinreichend großen Umfangs angenähert, also

$$\text{Wahrscheinlichkeit} \quad \approx \quad \text{relative Häufigkeit.}$$

Zur Schätzung einer solchen Wahrscheinlichkeit wird idealerweise davon ausgegangen, dass eine größere Zahl unter identischen Bedingungen unabhängig gewonnener Beobachtungen zur Verfügung steht.

Die Interpretation wird durch Konzepte der beschreibenden Statistik motiviert; man erhält zahlreiche nützliche abgeleitete Entsprechungen, wie

$$\begin{aligned} \text{Erwartungswert} &\quad \approx \quad \text{Stichprobenmittel,} \\ \text{Varianz} &\quad \approx \quad \text{Stichprobenvarianz.} \end{aligned}$$

Die frequentistische Interpretation legt jedenfalls eine Übersetzungsvorschrift nahe, wonach die Wahrscheinlichkeit eine Eigenschaft von Ereignissen in großen Stichproben sei. Die Umsetzung erfordert, dass die Stichprobe so präpariert wird (statistische Versuchsplanung), dass $P(A)$ zumindest näherungsweise als relative Häufigkeit realisiert wird.

Dass sich in Folgen von Zufallsexperimenten die relativen Häufigkeiten auf einen Wert stabilisieren, wird von Befürwortern der frequentistischen Interpretation als objektive Eigenschaft der Realität gesehen. Dies wurde von Popper (1959) durch die Forderung ergänzt, dass nicht nur die Folge selbst, sondern auch deren Erzeugungsbedingungen einzubeziehen sind. Diese gemeinsam ergeben objektiv nachprüfbare Wahrscheinlichkeiten in Form einer objektiv vorliegenden Verwirklichungstendenz (Propensitätsinterpretation).

In Anbetracht des weiten Bekanntheitsgrads der frequentistischen Interpretation mögen diese Hinweise genügen. Die Zuschreibung von Objektivität wird von vielen Physiker*innen geteilt und von vielen Entscheidungstheoretiker*innen abgelehnt (siehe dazu Abschnitt 3.4). Andererseits ist die Deutung konsistent mit der statistischen Entscheidungstheorie: unter gewissen Zusatzforderungen (vor allem „Austauschbarkeit“, de Finetti (1981), Abschnitt 11.3.2) ist die relative Häufigkeit der eindeutige erwartungstreue Schätzer der Wahrscheinlichkeit (Fine (1973), Abschnitt IVJ.3). Dies erklärt allerdings nicht, warum die so gewonnene Schätzung auch eine zuverlässige Vorhersage über das zukünftige Verhalten der Zufallsfolge abgeben soll.

3.3. Subjektivistische Interpretation

Voranstellen möchte ich diesem Abschnitt den berühmten Zuruf des Begründers der subjektiven Wahrscheinlichkeit, Bruno de Finetti: „Es gibt keine objektive Wahrscheinlichkeit“, einer der ersten Sätze im Vorwort zur deutschen Übersetzung (de Finetti (1981)) seines Werks (de Finetti (1970)), noch deutlicher in der englischen Übersetzung (de Finetti (1974/75)): „Probability does not exist“. Gemeint ist, dass

Wahrscheinlichkeit keine Eigenschaft der Wirklichkeit ist, sondern ein mentales Konzept[5]: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist als Vertrauensgrad in sein Auftreten zu deuten. Hier wird bewusst in Kauf genommen, dass dieser Vertrauensgrad eine subjektive Einschätzung bedeutet und daher von verschiedenen Expert*innen verschiedene Werte zugewiesen bekommen kann. Selbstverständlich muss die Bewertung rational und unter Zuhilfenahme aller verfügbaren Informationen erfolgen.

Um das Konzept nachprüfbar in der Wirklichkeit zu machen, bedarf es einer operativen Methode, den subjektiven Vertrauensgrad zu quantifizieren. Im Abschnitt 4 soll ausführlich auf de Finettis Überlegungen dazu eingegangen werden.

An dieser Stelle sei nur kurz eine der vorgeschlagenen Methoden vorgestellt, nämlich die Ermittlung des Vertrauensgrads als Indifferenzpreis für ein gedachtes Wettspiel. Das Spiel ergebe einen Gewinn von 1, falls A auftritt, und von 0, falls A nicht auftritt. Dann ist

$$P(A) = \text{Indifferenzpreis für das Spiel} = \text{maximaler Kaufpreis} = \text{minimaler Verkaufspreis}.$$

Soll zum Beispiel die Erfolgswahrscheinlichkeit einer Alternativverteilung beurteilt werden, also etwa bei einem Münzwurf die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A = *Kopf*, so würde das Wettspiel in einem Münzwurf bestehen mit der Gewinnausschüttung von 1,00 Euro, falls *Kopf* auftritt. Als Spieler*in wären Sie vermutlich interessiert, diese Wette um einen Einsatz von 0,00, 0,10, 0,20 Euro zu kaufen; bei einem Kaufpreis von 1,00, 0,90, 0,80 Euro wären Sie wahrscheinlich nicht interessiert, einzusteigen. Schwieriger wird es schon bei einem Kaufpreis von 0,45 oder 0,55 Euro. Wenn Sie die Münze für ungezinkt halten, werden Sie das Kaufinteresse voraussichtlich genau bei 0,50 Euro verlieren, das heißt, es wird für Sie egal sein, ob Sie mitwetten oder nicht. Dies ist also Ihr Indifferenzpreis, und damit ist Ihre subjektive Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von *Kopf* gerade $P(A) = 0.5$. Dieselbe Überlegung gilt natürlich für einen Verkäufer der Wette in umgekehrter Richtung.

Dieses gedachte operative Verfahren wird natürlich bei der Festlegung von Wahrscheinlichkeiten in der Risikoanalyse, im Ingenieurwesen und anderen angewandten Wissenschaftszweigen so nicht umgesetzt. Als Einzelperson wird man seine Informationen sammeln und dann abwägen (*Introspektion*). In einer Runde von Expert*innen wird man durch Diskussion und Befragung zu Wahrscheinlichkeitseinschätzungen kommen (*Mediation, Delphi-Methode*). Im Englischen gibt es dazu den schönen Begriff der „Elicitation“ (zu Deutsch „das Herauslocken“), zu dem ausführliche Literatur in der Risikoanalyse vorliegt (etwa Meyer/Booker (2001)). Ein Prozedere zur Festlegung kontinuierlicher Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der Expert*innenrunde mittels subjektiver Wahrscheinlichkeiten findet sich bei O’Hagan (1998).

Eine typische Situation ist die Erstellung eines Kostenvoranschlags in der Planungsphase eines Bauprojekts und die Abschätzung des Kostenüberschreitungsrisikos. Für die meisten der Risikofaktoren (technische, wirtschaftliche, juridische, politische Risiken) stehen statistische Daten nicht zur Verfügung. Es müssen daher Methoden der Risikoanalyse mit subjektiven Wahrscheinlichkeiten herangezogen werden.

Nicht vergessen werden darf in diesem Zusammenhang die Bayes-Statistik, bei der subjektives Vorwissen mit Messdaten verknüpft wird. (Eine Beschreibung der in letzter Zeit große Akzeptanz findenden bayesschen Methoden würde den Rahmen des Artikels sprengen. Eine konzise Einführung findet man etwa in Viertl (2003); für Anwendungen im Ingenieursbereich, siehe etwa Yuen (2010).

Zur Gegenüberstellung der frequentistischen und der subjektivistischen Sicht kann die Lektüre zweier prononcierter Verfechter der einen und der anderen Seite empfohlen werden: Gnedenko (1978) und Lindley (2006).

3.4. Kritik an den Wahrscheinlichkeitskonzepten

Ich möchte in diesem Abschnitt ein wenig auf die kontroverse Diskussion der drei vorgestellten Wahrscheinlichkeitsbegriffe eingehen. Dabei werden nur streiflichthaft einige Aspekte herausgegriffen. Für eine systematische Auseinandersetzung ist das Werk von Fine (1973) zu empfehlen.

5 Der Gedanke findet sich bereits in de Finetti (1931).

Diskussion des klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs

So plausibel der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff erscheinen mag, gibt es doch schwerwiegende Einwände. Erstens ist es kein empirischer Begriff; vielmehr werden die so ermittelten Wahrscheinlichkeiten als a priori gültig erachtet. Zweitens muss zunächst ein Modell des zu beschreibenden Vorgangs vorhanden sein – dies liegt außerhalb der Wahrscheinlichkeitstheorie (wie etwa das Zerfallsgesetz in Beispiel 3.2). Drittens verlangt die Anwendung von Formel (3), dass alle Alternativen bekannt sind (Spezifität). Viertens ist das Prinzip mehrdeutig. Wenn zum Beispiel von einer Zufallsgröße X nur bekannt ist, dass sie Werte im Intervall $[a,b]$ annimmt, so führt das Prinzip zur Annahme, dass X im Intervall $[a,b]$ gleichverteilt ist. Wendet man das Prinzip auf ihren Kehrwert an, so müsste man schließen, dass $1/X$ gleichverteilt im Intervall $[1/b,1/a]$ ist, offenbar zwei widersprüchliche Ergebnisse (solche Paare gibt es in den Anwendungen zuhauf: man denke an Kreisfrequenz/Periode oder Dichte/spezifisches Volumen). Für eine ausführliche kritische Diskussion sei auf Fine (1973), Kapitel VI und die Einleitung in Carnap/Stegmüller (1959) verwiesen.

Wenn das Prinzip „unserer Erfahrung nach“ in den Anwendungen erfolgreich ist, so liegt dies daran, dass wir es nur auf solche Situationen anwenden, wo es erfolgreich sein kann.

Diskussion des frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Offensichtlich ist die im Abschnitt 3.2 gegebene Beschreibung einigermaßen vage („hinreichend großer Umfang“, „identische Bedingungen“). Versuchen wir eine Präzisierung mit Hilfe des Bernoulli-Experiments. Bekanntlich beschreibt es eine Größe, die nur zwei Werte annehmen kann: 0 oder 1, etwa den Münzwurf. Das „Erfolgsereignis“ A sei das Auftreten der Eins; seine Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit $p = P(A)$. Wiederholt man ein Bernoulli-Experiment n-mal (unter identischen Bedingungen, ohne wechselseitige Beeinflussung der einzelnen Experimente), so erhält man eine Folge $x_1,\dots,x_n$ von Nullen und Einsen, mit der Hoffnung, dass

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{4}$$

gilt. Modelliert man die Folge von Bernoulli-Experimenten als Folge von identisch Null-Eins-verteilten, unabhängigen Zufallsgrößen, so besagt das starke Gesetz der großen Zahlen, dass der Grenzwert (4) mit Wahrscheinlichkeit 1 eintritt.

Aber was für eine Wahrscheinlichkeit ist hier gemeint? Ausgehend vom Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{0,1\}$ mit dem durch $P(A) = p$ gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaß ist es der Produktraum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mit dem Produktmaß. (Das heißt, für Teilstücke der Länge n hat jede endliche Folge mit $k \le n$ Einsen die Wahrscheinlichkeit $p^k(1-p)^{n-k}$.) Nennen wir dieses Produktmaß p-Wahrscheinlichkeit. Das starke Gesetz der großen Zahlen besagt, dass die Menge C_p jener Folgen, die (4) erfüllen, im Raum $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen die p-Wahrscheinlichkeit Eins hat. Folgen, die divergieren oder gegen einen anderen Grenzwert konvergieren, haben die p-Wahrscheinlichkeit Null. Darunter sind aber alle konvergenten Folgen, die (4) mit einem $p' \neq p$ erfüllen. Diese haben wiederum p'-Wahrscheinlichkeit Eins. Kurz: die Folgen, welche (4) nicht erfüllen, haben zwar p-Wahrscheinlichkeit Null, bilden aber eine riesige Menge. Tatsächlich hat die Menge C_p wie auch deren Komplementärmenge die Kardinalität der reellen Zahlen, siehe Fine (1973), Kapitel IV.

Will man also die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeiten in einer Folge von Bernoulli-Experimenten bestimmen, so muss man daran glauben, dass diese Folge in C_p liegt. Das starke Gesetz der großen Zahlen ist ein wichtiger Satz der Wahrscheinlichkeits*theorie*. Es taugt aber nicht, die frequentistische Interpretation der Wahrscheinlichkeit in der Wirklichkeit zu rechtfertigen.

Ein Ausweg ist, das Problem vom anderen Ende anzugehen, also zuerst die Folgen, und dann die Wahrscheinlichkeit. Welche Folgen können zugelassen werden, für die man dann die Gültigkeit des starken Gesetzes der großen Zahlen erreicht? Ein erster Ansatz ist der Begriff des Kollektivs nach von Mises (1918). Ein Kollektiv ist eine Folge in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, zusammen mit einer abzählbaren Menge von Auswahlregeln mit der Eigenschaft, dass für alle nach den Auswahlregeln konstruierten Teilfolgen (4) erfüllt ist. Der Ansatz mündete schließlich in die komplexitätstheoretische Begründung der Wahrscheinlichkeit, siehe die Ausführungen im Abschnitt 3.5.

Warum ist es dann scheinbar eine Erfahrungstatsache, dass die relativen Häufigkeiten sich empirisch bei Vergrößerung der Stichprobe stabilisieren? Eine Antwort darauf ist, dass wir die Wahrscheinlichkeitstheorie eben nur auf Experimente anwenden, bei denen das passiert. (Eine Verifikation ist allerdings unmöglich, da man ja nicht warten kann, bis alle unendlich vielen Folgenglieder beobachtet wurden. Auch erlaubt das starke Gesetz der großen Zahlen keine Quantifizierung des Konvergenzverhaltens.) Ein Beispiel des erzwungenen Verhaltens ist die Erzeugung von Folgen mittels Zufallszahlengeneratoren. Wir wissen zwar, dass diese Folgen nicht zufällig sind, sondern periodisch – aber mit riesiger Periode. Alle ihre beobachtbaren auch sehr langen Anfangsstücke verhalten sich so, als ob (4) gelte – das ist unsere Erfahrung.

Diskussion des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Kritik am Konzept der subjektiven Wahrscheinlichkeit kommt natürlich von Seiten der frequentistischen Schulen. Für Popper (1957) ist die subjektivistische Sichtweise schlichtweg falsch, da sie im Widerspruch zur naturwissenschaftlichen Methode des Aufstellens von Hypothesen mit anschließender Überprüfung steht. Abrams (2012) entwickelt eine objektive Interpretation der Wahrscheinlichkeit, die – unter festgelegten Rahmenbedingungen – eine kausale Erklärung des Auftretens stabiler relativer Häufigkeiten erlaubt. Er argumentiert auch, dass sich solche objektiven Wahrscheinlichkeiten bei biologischen Evolutionsprozessen einstellen (Abrams (2015)). Schließlich gibt es zwei große Teilgebiete der Physik – die statistische Mechanik und die Quantenmechanik –, in denen Wahrscheinlichkeit eine Grundgröße ist. In der Quantenmechanik spielt das präparierte Experiment eine große Rolle. Die relativen Häufigkeiten der Beobachtungen an der Messapparatur stellen sich nach der prognostizierten Wahrscheinlichkeitsverteilung ein. Man denke an das Doppelspaltexperiment, bei dem sich nach Durchsenden einer großen Zahl von Photonen stets dasselbe Beugungsbild ergibt. Die Entdeckung neuer (Bestandteile von) Elementarteilchen gelingt oft durch Detektion extrem seltener Abweichungen in riesigen Stichproben. Mehr dazu in Abschnitt 6.

Ein gänzlich anderer Einwand kommt von Seiten der Verhaltensforschung: Der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff ist nicht subjektiv genug! Die operative Begründung der subjektiven Wahrscheinlichkeit erfordert ein gewisses Befolgen von Postulaten des rationalen Entscheidens. Zum Beispiel erhält man den genannten Indifferenzpreis durch die Forderung, dass man ein Spiel mit sicherem Verlust nicht eingehen sollte („avoiding sure loss"). Im Rahmen der Begründung der Wahrscheinlichkeitslehre durch die rationale Entscheidungstheorie (etwa Savage (1954)) wurde argumentiert, dass die Entscheider*innen, die sich an gewisse simple Axiome rationalen Entscheidens halten, notwendigerweise ihre Unsicherheiten wahrscheinlichkeitstheoretisch modellieren müssen. Es gibt mittlerweile zahlreiche Ergebnisse der Verhaltensforschung, die zeigen, dass reale Menschen sich nicht an diese Regeln halten, siehe etwa das Ellsberg-Paradoxon (Ellsberg (1961)). Die „Unscharfe Wahrscheinlichkeitstheorie" hält entgegen, dass reale Entscheider*innen in der Regel nur untere und obere Schranken $\underline{P}(A)$, $\overline{P}(A)$ angeben können, also ein Wahrscheinlichkeitsintervall, aber keinen exakten Wert $P(A)$. Die Wahrscheinlichkeitsaxiome wären demnach entsprechend abzuschwächen (Walley (1991)). Diese Richtung zu verfolgen, würde allerdings den Rahmen des Artikels sprengen. Siehe dazu Augustin/Coolen/de Cooman/Troffaes (2014) und den historischen Abriss in Weichselberger (2001).

3.5. Weitere Zugänge

Zur Vervollständigung des Bilds seien hier einige weitere Zugänge zur Begründung und Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs angeführt (ohne Anspruch auf Vollständigkeit).

Rationale Entscheidungstheorie. Wie oben schon kurz erwähnt, geht dieser Zugang von Axiomen der Entscheidungstheorie aus, an die sich rationale Entscheider*innen halten müssen. Bei Entscheidung unter Unsicherheit leiten sich daraus die üblichen Regeln der Wahrscheinlichkeitstheorie ab. Der Gedanke geht schon auf de Finetti zurück, wird aber tiefergehend von Savage (1954) entwickelt.

Logische Wahrscheinlichkeit. Hier werden die Wahrscheinlichkeiten (genauer: bedingte Wahrscheinlichkeiten) Aussagen und induktiven Schlüssen zugewiesen. Auch dieser Zugang hat eine lange Geschichte. Verwiesen sei auf das lesenswerte Werk von Jaynes (2003). Von Interesse für fachdidaktische Zwecke dürfte sein, dass Jaynes zuerst die „Summenregel" und die „Produktregel" einführt, bevor überhaupt das Konzept einer quantitativen Wahrscheinlichkeit auftritt.

Spieltheorie. Eine von wirtschaftstheoretischen Überlegungen geleitete Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie durch Konzepte der Spieltheorie stammt von Shafer/Vovk (2001), weiterentwickelt in Shafer/Vovk (2019).

Komplexitätstheorie. Mittels Konzepten der Komplexitätstheorie wird definiert, was eine Zufallsfolge sein soll. Darauf aufbauend können Hypothesentests, aber auch Wahrscheinlichkeiten selbst eingeführt werden. Wie oben erwähnt, beginnt diese Entwicklungslinie mit von Mises (1918); Kolmogoroff (1963) selbst hat diesen Zugang später seiner ursprünglich etwas vagen frequentistischen Interpretation vorgezogen. Wesentliche Beiträge stammen von Solomonoff (1964). Als Einstiegslektüre sei Schnorr (1971) empfohlen.

Operative Wahrscheinlichkeit. Im Beispiel 2.5 wurde das probabilistische Sicherheitskonzept nach europäischer Norm Eurocode (2002) erläutert. In dieser Norm sind zwar die Grundkonzepte probabilistisch, die tatsächliche Anwendung der Norm ist aber höchst komplex und schreibt im Wesentlichen für alle Einflussgrößen auf ein Bauwerk einzuhaltende Sicherheitsbeiwerte vor. Diese Sicherheitsbeiwerte sind nicht nur aus den probabilistischen Ansätzen herleitbar, sondern vielmehr Verhandlungsergebnisse in den Normungsausschüssen. Insbesondere kann die „Versagenswahrscheinlichkeit" zwar als Zielwert, aber keineswegs als Maßzahl für tatsächliche Fälle möglichen Versagens herangezogen werden. Dies steht bereits in den Werken der Begründer des Konzepts (etwa Bolotin (1969), Abschnitt 26) und in manchen Lehrbüchern (Klingmüller/Bourgund (1992), Abschnitt 1.3), vor allem aber als Anmerkung in der Norm selbst, Anhang C.4 in Eurocode (2002): „Die Versagenswahrscheinlichkeit und der zugehörige Zuverlässigkeitsindex sind lediglich operative Werte, die nicht die wirklichen Versagensraten ausdrücken, sondern nur für die Kalibrierung der Normen und für Vergleiche der Zuverlässigkeitsgrade verschiedener Tragwerke verwendet werden." Wahrscheinlichkeit als Verhandlungsmasse – welchen Objektivitätsstatus hat sie dann?

Dass die sich tatsächlich einstellende Versagenswahrscheinlichkeit theoretisch weit (um mehrere Zehnerpotenzen) von der in der Norm geforderten abweichen kann, wurde von etlichen Autoren festgestellt, etwa Elishakoff (1999) oder Fellin/Oberguggenberger (2004). Praktisch kann dies ja in der Regel nicht überprüft werden, da die meisten Bauwerke Unikate sind.

Anwendungen der Wahrscheinlichkeit ohne Semantik. Gemeint sind hier numerische Verfahren auf probabilistischer Basis als innermathematische Methoden. Am leichtesten zugänglich ist wohl die numerische Integration von Funktionen mittels Monte-Carlo-Simulation. Sei etwa f eine stetige Funktion auf dem d-dimensionalen Einheitskubus $D = [0,1]^d$. Wählt man eine endliche Folge von in $[0,1]^d$ gleichverteilten d-dimensionalen Zufallszahlen $y_1,\dots,y_N$, so kann man das Integral von f über D approximieren durch

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1,\dots,x_d)\,\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_d \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(y_j).$$

Interpretiert man die linke Seite als Erwartungswert der Zufallsgröße $f(x_1,\dots,x_d)$ (über dem Wahrscheinlichkeitsraum D mit der Gleichverteilung), so ist die rechte Seite gerade die Approximation durch ein Stichprobenmittel. Man kann dann herleiten, dass der mittlere Fehler von der Größenordnung $1/\sqrt{N}$ ist, unabhängig von der Dimension d. Deterministische Integrationsmethoden mit N Stützpunkten haben eine Fehlerordnung von $N^{-2/d}$, was für große d dramatisch schlechter ist – daher die Nützlichkeit der Monte-Carlo-Simulation (Niederreiter (1992)).

Monte-Carlo-Simulation kann auch ohne probabilistische Interpretation zur *Sensitivitätsanalyse* verwendet werden, das heißt zur Analyse, welche Eingangsparameter in einem Modell größeren oder kleineren

Einfluss auf den Ausgang haben. Am Beispiel 2.5 könnte man etwa EI und bc als gleichverteilte Zufallsgrößen modellieren, die beide $\pm 10\%$ um ihren Nominalwert schwanken. Nach einer Monte-Carlo-Simulation mit einer künstlichen Stichprobe vom Umfang N der Eingangsgrößen EI, bc erhält man eine Stichprobe der Ausgangsgröße, etwa der Auslenkung $w(x_0)$ in einem Punkt x_0 des Balkens. Die Korrelationskoeffizienten von EI und bc jeweils mit $w(x_0)$ schätzen die Größenordnung des Einflusses ab. Alternativ kann man Regressionskoeffizienten oder Varianzzerlegungsmethoden (Sobol-Indizes) verwenden – siehe etwa Saltelli et al. (2008) oder im Überblick Oberguggenberger (2014).

Unter dem Titel „Probabilistische Numerik" werden numerische Lösungsverfahren probabilistisch analysiert oder auf probabilistischer Basis entworfen – darunter für lineare Gleichungssysteme, Optimierung, aber auch Differentialgleichungen. Hier möge ein einziger Hinweis auf die weit verzweigte Literatur genügen (Bartels/Cockayne/Ipsen/Hennig (2019)).

4. Der Zugang von de Finetti

De Finettis Anliegen war es, die Wahrscheinlichkeitstheorie so zu begründen, dass sie ihre Interpretation bereits in sich enthält, mit seinen Worten (de Finetti (1981), Abschnitt I.2.2): „Für mich ist die Mathematik ein Instrument, das sich streng den Anforderungen des Gebiets anpassen muss, in dem es angewandt werden soll. Man kann nicht für die eigene Bequemlichkeit Axiome einführen, die nicht durch wesentliche Motive gefordert werden oder gar im Gegensatz zu diesen stehen."

De Finettis Grundobjekte sind *Zufallsgrößen*[6] und *Prävisionen*[7]. In seinem Sinn ist eine Zufallsgröße eine auf einer Grundmenge S definierte reellwertige, beschränkte Funktion. Die Menge aller reellwertigen, beschränkten Funktionen bilden einen Vektorraum mit einer Halbordnung ($X \leq Y$ heißt $X(s) \leq Y(s)$ für alle $s \in S$). Die in Betracht kommenden Zufallsgrößen gehören einem zu wählenden Untervektorraum $\mathcal{Z}$ an.

Eine Prävision ist eine Abbildung $\mathrm{E} : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (für alle $X, Y \in \mathcal{Z}$):

(L) Linearität: $\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathrm{E}(X) + \mu \mathrm{E}(Y)$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(B) Beschränktheit: $\inf X \leq \mathrm{E}(X) \leq \sup X$

(N) Normierung: $\mathrm{E}(I) = 1$ (dabei bedeutet I die Einsfunktion).

Nach de Finetti ist das so zu interpretieren: X ist ein zufällig auftretender Wert; $\mathrm{E}(X)$ ist Dein maximaler Preis, den Du für X (bei einer Wette auf X) zu zahlen bereit bist – oder äquivalent – Dein minimaler Preis, zu dem Du eine Wette auf X zu verkaufen bereit bist.[8]

Bedingung (N) impliziert, was de Finetti *Kohärenz* nennt: die Vermeidung eines sicheren Verlusts. (Würdest Du im Kaufsfall zum Beispiel $\mathrm{E}(I) = 2$ setzen, hieße das, Du seist bereit, für eine Wette, deren Ergebnis immer 1 Geldeinheit ist, 2 Geldeinheiten zu bezahlen.)

Was bedeutet nun Wahrscheinlichkeit? In de Finettis Zugang sind die Ereignisse A gerade die Zufallsgrößen, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen (also die Indikatorfunktionen). Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A wird dann als $\mathrm{E}(A)$ *definiert*.

Falls der Grundraum S eine endliche Menge mit d Elementen ist, etwa $S = \{1, 2, \ldots, d\}$, so kann man für $\mathcal{Z}$ einfach $\mathbb{R}^d$ nehmen (den Raum aller Funktionen von $\{1, 2, \ldots, d\}$ nach $\mathbb{R}$). Das Beispiel von Wetten mit Würfeln möge dies erläutern. Eine Zufallsgröße X ist ein Element von $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^6$; die Koordinaten $X(i) = x_i$, $i = 1, \ldots, 6$, bedeuten, dass bei Auftreten der Augenzahl i die Zufallsgröße (der Gewinn/Verlust) den Wert x_i hat.

Nehmen wir etwa zwei Wetten mit einem Auszahlungswert von jeweils 6 Euro:

6 „Guadagno aleatorio" im italienischen Original – ein zufälliger Gewinn oder Verlust.

7 De Finetti spricht hier von „Preisen", erläutert aber auch, dass man synonym „Erwartungswerte" sagen könnte.

8 Das großgeschriebene Personalpronomen ist de Finettis Notation. De Finetti schreibt P an der Stelle von E – dem folge ich hier nicht, um einen Notationskonflikt zu vermeiden.

- X = einmaliges Würfeln, wenn ein Zweier auftritt, Gewinn von 6 Euro. Als Punkt im $\mathbb{R}^6$ ist $X = (0,6,0,0,0,0)$.
- Y = einmaliges Würfeln, wenn eine ungerade Zahl auftritt – Gewinn von 6 Euro. Als Punkt im $\mathbb{R}^6$ ist $Y = (6,0,6,0,6,0)$.

Falls Du der Meinung bist, dass der Würfel ungezinkt ist, so wird Dein maximaler Kaufpreis sein:

$$\mathrm{E}(X) = 1 \text{ Euro}, \qquad \mathrm{E}(Y) = 3 \text{ Euro}.$$

Mit dieser Festlegung wirst Du auch bereit sein, für die Wettspiele $2X$ oder $X+Y$ jeweils

$$\mathrm{E}(2X) = 2 \text{ Euro}, \qquad \mathrm{E}(X+Y) = 4 \text{ Euro}$$

einzusetzen. Dies unterstreicht die geforderte Linearität einer Prävision. Die Kohärenzforderung hat zur Folge, dass

$$\mathrm{E}\big(X - \mathrm{E}(X)\big) = 0 \tag{5}$$

ist. Im $\mathbb{R}^6$ ist $X - \mathrm{E}(X) = (-1,5,-1,-1,-1,-1)$, das heißt, bei Auftreten eines Zweiers erfolgt eine Auszahlung von 5 Euro, in allen anderen fünf Fällen ist 1 Euro einzuzahlen. Das erklärt noch einmal den Wert 0 der Prävision in (5).

Wie kommt man nun auf die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen? Wie gesagt, Ereignisse werden durch Zufallsgrößen mit den Werten 0 oder 1 dargestellt. Die Wahrscheinlichkeit, einen Zweier zu werfen, wird mit Hilfe der Wette

- X' = einmaliges Würfeln, wenn ein Zweier auftritt, Gewinn von 1 Euro (als Punkt im $\mathbb{R}^6$ ist $X' = (0,1,0,0,0,0)$)

ermittelt. Deren Wert ergibt sich aus der Linearität der Prävision zu

$$\mathrm{E}(X') = \mathrm{E}(\tfrac{1}{6}X) = \tfrac{1}{6}\mathrm{E}(X) = \tfrac{1}{6}.$$

Dies ist dann Deine Wahrscheinlichkeit für einen Zweier.

Vergleich Kolmogoroff – de Finetti. Ausgangspunkt für die kolmogoroffsche Theorie ist ein Grundraum Ω, eine Familie messbarer Teilmengen Σ von Ω und ein Wahrscheinlichkeitsmaß P. Messbare Funktionen und Erwartungswerte sind abgeleitete Größen. Dem gegenüber geht de Finetti von einem Grundraum S, einem Raum beschränkter Funktionen $\mathcal{Z}$ auf S und einer Prävision E aus. (Man könnte in diesem Kontext $\mathcal{Z}$ als die im Sinne von de Finetti messbaren Funktionen betrachten.) Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen und messbare Mengen sind abgeleitete Größen; messbare Mengen sind jene, deren Indikatorfunktion zu $\mathcal{Z}$ gehört.

Im Fall eines endlichen Grundraums sind die beiden Zugänge äquivalent. Im Fall unendlicher Grundräume (sowohl im diskreten als auch im kontinuierlichen Fall) sind die Zugänge nicht äquivalent, da de Finetti nur die endliche Additivität, nicht aber die σ-Additivität der Wahrscheinlichkeiten fordert (welche er allerdings auch nicht ausschließt). Am einfachsten kann dies im Fall $S = \mathbb{N}$, also eines abzählbar unendlichen Grundraums erläutert werden.

Ein bisschen Notation ist nötig. Die Räume ℓ^∞ und ℓ^1 bezeichnen die beschränkten Folgen und die Folgen, deren Betragssumme endlich ist. Für jedes σ-additive Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathbb{N}$ gilt[9]

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(\{j\}) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\{j\}\right) = P(\mathbb{N}) = 1,$$

[9] Sofern alle einpunktigen Teilmengen von $\mathbb{N}$ zu Σ gehören.

die Punktwahrscheinlichkeiten bilden also eine Folge, welche in ℓ^1 liegt. Umgekehrt definiert jede Folge $(p_1, p_2, p_3, \ldots) \in \ell^1$ eine lineare Abbildung $\mathrm{E} : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ gemäß

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i \quad \text{für} \quad X = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^\infty.$$

Sofern die Koeffizienten p_i nichtnegativ sind und deren Summe gleich 1 ist, erfüllt die Abbildung E die drei Bedingungen (L), (B) und (N), ergibt also eine Prävision. Die Prävisionen auf $\mathcal{Z} = \ell^\infty$, die durch Folgen in ℓ^1 definiert sind, entsprechen somit gerade den σ-additiven Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{N}$. Der Vektorraum *aller* Prävisionen auf $\mathcal{Z} = \ell^\infty$ besteht aber gerade aus allen nichtnegativen, normierten Linearformen auf ℓ^∞. Von diesem weitaus größeren Raum ist bekannt, dass er aus den endlich additiven Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{N}$ besteht (Köthe (1966), Abschnitt 31.1). Ein ähnliches Bild ergibt sich im kontinuierlichen Fall $S = \mathbb{R}$ (III.5.7 und V.6.4 in Conway (1990)).

Der Zugang von de Finetti erlaubt es auch, für $\mathcal{Z}$ kleinere Teilräume zu nehmen, also eine noch größere Wahlmöglichkeit; siehe dazu (de Finetti (1974/75), Abschnitt VI.4.4).

5. Einschub

Fassen wir noch einmal zusammen, welches Bild der Wahrscheinlichkeit sich aus Sicht der Wirtschafts-, Human-, Ingenieurwissenschaften, der Risikoanalyse und auch der Quantifizierung von Unsicherheit in den Naturwissenschaften ergibt. Die meisten der Modelle, insbesondere in den Ingenieurwissenschaften, sind Input-Output-Modelle. Bei gegebenem Modell, gegebenen Parameterwerten und gegebenen Eingangs- und Randwerten ist der Modell-Output deterministisch.

Die Wahrscheinlichkeit selbst ist nicht Teil des Modells; sie dient (sozusagen in beratender Funktion) zur Beschreibung der Unsicherheit in den Parameterwerten (eventuell auch der Modellwahl) und damit auch der Unsicherheit der Prognose. Messdaten sind unverzichtbar, reichen aber zur Beschreibung der Unsicherheiten in der Regel nicht aus. Sowohl was als korrekte Prognose akzeptiert wird als auch welche Konsequenzen daraus entzogen werden, ist eine *Entscheidung*, kein Naturgesetz.

Statistik und Wahrscheinlichkeit gehören zur Entscheidungstheorie, nicht zur Naturwissenschaft.

In den genannten Wissenschaftszweigen werden in der Regel frequentistische und subjektivistische Ansätze gleichzeitig und vermischt verwendet. Wahrscheinlichkeit wird nicht als materielle Eigenschaft realer Objekte/Vorgänge angesehen, sondern vielmehr als eine Beurteilungshilfe.

Können wir noch etwas zur Rettung eines naturwissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsbegriffs tun? Ja – es gibt zwei Teilgebiete der Physik, in denen die Grundgrößen Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind: die statistische Mechanik und die Quantenmechanik. Werfen wir abschließend einen Blick auf die Quantenmechanik.

6. Die Rolle der Wahrscheinlichkeit in der Quantenmechanik

In der klassischen Mechanik wird ein Massenpunkt durch seinen Ort x und seinen Impuls p beschrieben. Sind x und p zu einem Zeitpunkt t_0 bekannt, so kann – unter Kenntnis der einwirkenden Kräfte – sein Ort und Impuls zu jedem beliebigen Zeitpunkt t berechnet werden. Der *Zustand* des Massenpunkts ist damit durch Angabe von (x, p) vollständig beschrieben. Die beiden Größen x und p können – zumindest in idealisierter Vorstellung – jederzeit beliebig genau gemessen werden. Der Zustand des Massenpunkts zu jedem Zeitpunkt auf seiner Bahnkurve kann aus Kenntnis des Anfangszustands eindeutig vorhergesagt werden.

In der Quantenmechanik kann der Zustand nicht vom Messvorgang getrennt werden. Überdies besagt die heisenbergsche Unschärferelation, dass Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig mit beliebiger Genauigkeit messbar sind. Die Vorhersagen der Quantenmechanik haben die Form von Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Messergebnissen unter festgelegten experimentellen Bedingungen. Ein kurzer Blick auf den Hilbertraum-Formalismus der Quantenmechanik möge dies verdeutlichen.

Der *Zustand* eines quantenmechanischen Systems wird durch die *Wellenfunktion* beschrieben. Zum Beispiel ist der Zustand eines einzelnen Teilchens auf der reellen Achse eine Funktion $\psi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ ($L^2(\mathbb{R})$ ist der Raum der komplexwertigen, quadratintegrablen Funktionen auf $\mathbb{R}$). Dabei hat $|\psi|^2$ die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeitsdichte. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[a,b)$ anzutreffen, ist $\int_a^b |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x$. Der Erwartungswert des Aufenthaltsorts des Teilchens im Zustand ψ ist $\int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2 \mathrm{d}x$ (definiert für jene $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, für die $|x\psi(x)|^2$ integrierbar ist).

Allgemein wird der Zustand eines quantenmechanischen Systems durch einen Einheitsvektor ψ in einem komplexen Hilbertraum $\mathcal{H}$ angegeben. Eine experimentelle Beobachtung wird durch eine *Observable* beschrieben, einen selbstadjungierten Operator $A : \mathcal{D} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Der Erwartungswert für die Beobachtung im Zustand ψ ist das innere Produkt von $A\psi$ mit ψ. Es gibt Projektionen $E_c : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $c \in \mathbb{R}$, sodass die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtung im Intervall $[a,b)$ liegt, wenn das System im Zustand ψ ist, gleich $\|E_b\psi - E_a\psi\|^2$ ist.

Es wird deutlich, dass in der Quantenmechanik die Wellenfunktion ψ, gemeinsam mit der Observablen A, nach Definition eine Wahrscheinlichkeitsverteilung in sich trägt. Die Wahrscheinlichkeit kommt also nicht von außen als Zusatz zur Modellierung von Unsicherheiten/zufälligen Schwankungen, sondern ist selbst Teil des quantenmechanischen Formalismus. Die Zeitentwicklung der Zustände erfolgt deterministisch nach der Schrödingergleichung.

Was bedeutet die Wahrscheinlichkeitsaussage? Dabei spielen das quantenmechanische Experiment und seine Beobachter*innen eine wesentliche Rolle. Es kann hier nicht auf die komplexen Zusammenhänge und die verschiedenen Interpretationen der Quantenmechanik eingegangen werden, siehe etwa das klassische Werk (von Neumann (1932)). Eine gängige Vorstellung ist, dass dasselbe Experiment mit im selben Zustand ψ präparierten Teilchen sehr oft wiederholt wird. Die relativen Häufigkeiten der abgelesenen Messergebnisse stellen sich dann gemäß der prognostizierten Wahrscheinlichkeitsverteilung ein (Schwabl (1990)). Die Quantenmechanik macht also nur Prognosen über die durch das quantenmechanische Experiment hergestellte Realität. Dies kann als frequentistische Propensitätsinterpretation gesehen werden, wobei durch die Rolle der Beobachter*innen subjektive Aspekte eingebracht werden. Einige launige Anmerkungen dazu findet man im Abschnitt IXB.4 von Fine (1973).

Aus der Quantenmechanik haben sich weitere Wahrscheinlichkeitskonzepte entwickelt, etwa die Quantenwahrscheinlichkeit (Meyer (1993)). Axiomatisch ist diese ähnlich dem Zugang de Finettis aufgebaut, allerdings gehören die Zufallsgrößen nicht einer kommutativen Algebra von beschränkten Funktionen an, sondern können Elemente einer abstrakten nichtkommutativen Algebra sein. Im nichtkommutativen Rahmen muss der Begriff der unabhängigen Zufallsvariablen durch den Begriff der freien Zufallsvariablen ersetzt werden, was letztlich in der *freien Wahrscheinlichkeitstheorie* mündet (Voiculescu/Dykema/Nica (1992)). Diese wiederum hat enge Beziehungen zur Theorie der Zufallsmatrizen.

7. Zusammenfassung

Es gibt also sehr verschiedene Sichtweisen auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit. Etwas pointiert könnte man sagen: Risikoanalyst*innen, Entscheidungstheoretiker*innen und Naturwissenschaftler*innen leben in verschiedenen Welten. In der einen Welt ist Wahrscheinlichkeit eine Eigenschaft der Realität. In der anderen ist sie ein mentales Konstrukt. (Übergang von einer Welt zur anderen ist möglich.)

Mathematiker*innen, die sich nicht um die *Semantik der Wahrscheinlichkeit* kümmern, leben in noch einer anderen Welt. (Und sie versäumen einen faszinierenden historischen Diskurs.)

Ein Wort zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastik als mathematische Disziplin: Selbstverständlich hat es seine vollste Berechtigung, die Methoden und Konzepte in wissenschaftlicher Weise mit oder ohne Praxisbezug weiterzuentwickeln. Der beeindruckende Fortschritt in Tiefe und Breite der letzten Jahrzehnte (etwa von stochastischen Differentialgleichungen bis zur Zahlentheorie) wurde vor allem durch die Rückführung der Wahrscheinlichkeit auf die Maßtheorie durch Kolmogoroff ermöglicht, allerdings auch durch die Einführung von Methoden der Funktionalanalysis (gerade im Gebiet der stochastischen Prozesse).

Was die Anwendungen in den Ingenieurwissenschaften betrifft, möchte ich die Leser*innen nicht mit dem Eindruck einer verzweifelten Lage entlassen, der vielleicht durch die Beispiele aus Abschnitt 2.2 erweckt werden könnte. Die meisten Akteur*innen in den Ingenieurwissenschaften haben eine pragmatische Beziehung zur Wahrscheinlichkeit. Der erste Ruf ist immer: „Wir brauchen Daten!“ – also Bodenproben, Laborversuche, Beobachtungsreihen. Gefolgt wird dieser Ruf meist mit der Feststellung „Unsere Daten sind knapp!“ – weil Laborversuche in großer Zahl nicht zur Verfügung stehen oder weil geforderte Modellparameter einer Messung nicht zugänglich sind. In dieser Situation – und die ist häufig – beruft man sich auf die Ingenieurliteratur oder Erfahrungswerte aus dem eigenen Bereich. (Wie beispielsweise Bodenkennwerte und ihre statistischen Eigenschaften publiziert werden, ersieht man im Aufsatz von Rackwitz (2000).) Eine weitere wichtige Möglichkeit sind Modellrechnungen und Monte-Carlo-Simulationen, in denen die Ergebnisse der Rechnungen mit Messungen abgeglichen werden. So kann man auch nicht messbare Modellparameter abschätzen – indem die „besten“ Parameter durch Minimierung des Fehlers Modellrechnung/Messung bestimmt werden – ein so genanntes *inverses Problem*. In diesem Kontext hat die Methode „Markov Chain Monte Carlo (MCMC)“ große Bedeutung gewonnen, die nicht nur eine Schätzung der Modellparameter erlaubt, sondern auch der zugehörigen (gemeinsamen) statistischen Verteilung. Die Methodik wird etwa in Fischer et al. (2020) im Zusammenhang mit Ermittlung von Reibungsparametern von Lawinen und nachfolgender Prognose beschrieben.

Vieles konnte in diesem kurzen Abriss nicht gesagt werden. Zwei Punkte möchte ich noch herausgreifen. Erstens, der Standpunkt hat schon Konsequenzen auf die Methodenwahl. Zum Beispiel sind Konfidenzintervalle und p-Wert-Hypothesentests frequentistische Konstrukte. Das subjektivistisches Pendant sind Glaubwürdigkeitsintervalle und bayessche Hypothesentests (beides findet man etwa in Viertl (2003)). Zweitens gibt es auch andere Methoden, Unsicherheit zu modellieren, darunter die Intervallmathematik und andere mengenwertige Abschätzungen, deren Kombination mit Wahrscheinlichkeit in der Theorie der zufälligen Mengen, und schließlich das Gebiet der unscharfen Mengen; mehr zu dem allen etwa in Oberguggenberger (2012).

Zum Abschluss – was können diese Ausführungen zur Schulmathematik beitragen? Mein Eindruck bei Lektüre des Grundkompetenzenkatalogs ist, dass die klassische Wahrscheinlichkeit und der frequentistische Zugang im Vordergrund stehen, aber die subjektiven Wahrscheinlichkeiten eigentlich nicht vorkommen. Die fachdidaktische Literatur hat sich des Themas durchaus angenommen, auch im Hinblick darauf, wie Wahrscheinlichkeitskonzepte im Unterricht vermittelt werden können. Verwiesen sei hier unter anderem auf den Aufsatz von Humenberger (2019) sowie die Lehrbücher Krüger/Sill/Sikora (2015), Sill/Kurtzmann (2019) und Batanero/Borovcnik (2016). Zusätzliche empirische Aspekte werden eingebracht in Kapadia/Borovcnik (1991).

Literatur

Abrams, M. (2012): Mechanistic probability. In: *Synthese* 187(2), 343–375.

Abrams, M. (2015): Probability and manipulation: evolution and simulation in applied population genetics. In: *Erkenntnis* 80(3, Suppl.), 519–549.

Augustin, T.; F. Coolen, G.; de Cooman;, M. Troffaes, M. (Hrsg., 2014): *Introduction to Imprecise Probabilities.* Chichester: John Wiley & Sons Ltd.

Bartels, S.; Cockayne, J.; Ipsen, I.C.F.; Hennig, P. (2019): Probabilistic linear solvers: a unifying view. In: *Statistics and Computing* 29(6), 1249–1263.

Batanero, C.; Borovcnik, M. (2016): *Statistics and Probability in High School.* Rotterdam: Sense Publishers.

Bolotin, V.V. (1969): *Statistical Methods in Structural Mechanics.* San Francisco: Holden-Day Inc.

Carnap, R.; Stegmüller, W. (1959): *Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit.* Wien: Springer-Verlag.

Conway, J.B. (1990): *A Course in Functional Analysis.* 2. Aufl. New York: Springer.

de Finetti, B. (1931): Probabilismo. Saggio critico sulla teoria delle probabilità e sul valore della scienza. In: Aliotta, A. (Hrsg.): *Biblioteca di Filosofia.* Napoli: Editrice F. Perrella, 1–57.

de Finetti, B. (1970): *Teoria delle probabilità: sintesi introduttiva con appendice critica. Volumi primo e secondo.* Nuova Biblioteca Scientifica Einaudi, 25* et 25**. Torino: Giulio Einaudi Editore.

de Finetti, B. (1974/75): *Theory of Probability: a Critical Introductory Treatment. Vol. 1 and Vol. 2.* Chichester: John Wiley & Sons Ltd.

de Finetti, B. (1981): *Wahrscheinlichkeitstheorie: Einführende Synthese mit kritischem Anhang.* Wien/München: R. Oldenbourg Verlag.

Elishakoff, I. (1999): What may go wrong with probabilistic methods? In: Elishakoff, I. (Hrsg.): *Whys and Hows in Uncertainty Modelling: Probability, Fuzziness and Anti-Optimization.* Wien/New York: Springer-Verlag, 265–283.

Ellsberg, D. (1961): Risk, ambiguity, and the Savage axioms. In: *The Quarterly Journal of Economics* 75(4), 643–669.

European Committee for Standardization (2002): *EN 1990:2002. Eurocode – Basis of Structural Design.* Brussels: CEN.

Fellin, W.; Oberguggenberger, M. (2004): The fuzziness and sensitivity of failure probabilities. In: Fellin, W.; Lessmann, H.; Oberguggenberger, M.; Vieider, R. (Hrsg.): *Analyzing Uncertainty in Civil Engineering*. Berlin: Springer-Verlag.

Fine, T.L. (1973): *Theories of Probability. An Examination of Foundations.* New York: Academic Press.

Fischer, J.-T.; Kofler, A.; Huber, A.; Fellin, W.; Mergili, M.; Oberguggenberger, M. (2020): Bayesian inference in snow avalanche simulation with r.avaflow. In: *Geosciences* 10, 191.

Gnedenko, B.V. (1978): *The Theory of Probability.* 4. Aufl., übersetzt aus dem Russischen von G. Yankovskiĭ. Moskau: Mir Publishers.

Humenberger, H. (2019): Der „empirische Wahrscheinlichkeitsbegriff" – gut gemeint, aber auch wirklich gut? In: *Stochastik in der Schule* 39(3), 17–19.

Jaynes, E.T. (2003): *Probability Theory. The Logic of Science.* Cambridge: Cambridge University Press.

Kapadia, R.; Borovcnik, M. (Hrsg., 1991): *Chance Encounters – Probability in Education.* Dordrecht: Springer Science+Business Media.

Klingmüller, O.; Bourgund, U. (1992): *Sicherheit und Risiko im Konstruktiven Ingenieurbau.* Braunschweig: Verlag Vieweg.

Köthe, G. (1966): *Topologische lineare Räume I.* 2. Aufl. Berlin/New York: Springer-Verlag.

Kolmogoroff, A. (1933): *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Berlin: Springer-Verlag.

Kolmogorov, A.N. (1963): On tables of random numbers. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A* 25(4), 369–376.

Krüger, K.; Sill, H.-D.; Sikora, C. (2015): *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I.* Berlin: Springer Spektrum.

Laplace, P.-S.: *Essai philosophique sur les probabilités.* 5. Aufl. Paris: Bachelier 1825.

Lindley, D.V. (2006): *Understanding Uncertainty.* Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Meyer, M.A.; Booker, M.J. (2001): *Eliciting and Analyzing Expert Judgement.* Philadelphia PA: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Meyer, P.-A. (1993): *Quantum Probability for Probabilists.* Lecture Notes in Mathematics, Bd. 1538. Berlin: Springer-Verlag.

Niederreiter, H. (1992): *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods.* Philadelphia PA: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Oberguggenberger, M. (2012): Combined methods in nondeterministic mechanics. In: Elishakoff, I.; Soize, C. (Hrsg.): *Nondeterministic Mechanics.* CISM International Centre for Mechanical Sciences, Bd. 539. Wien: Springer, 263–356.

Oberguggenberger, M. (2014): Sensitivity and reliability analysis of engineering structures: sampling based methods. In: Hofstetter, G. (Hrsg.): *Computational Engineering.* Cham: Springer International Publishing Switzerland, 85–112.

O'Hagen, A. (1998): Eliciting expert beliefs in substantial practical applications. In: *The Statistician* 47, 21–35.

Popper, K. (1957): Probability magic or knowledge out of ignorance. In: *Dialectica* 11, 354–374.

Popper, K. (1959): The propensity interpretation of probability. In: *British Journal for the Philosophy of Science* 10, 25–42.

Rackwitz, R. (2000): Reviewing probabilistic soils modelling. In: *Computers and Geotechnics* 26(3), 199–223.

Saltelli, A.; Ratto, M.; Andres, T.; Campolongo, F.; Cariboni, J.; Gatelli, D.; Saisana, M.; Tarantola, S. (2008): *Global Sensitivity Analysis. The Primer.* Chichester: John Wiley & Sons Ltd.

Savage, L.J. (1954) *The Foundations of Statistics.* New York: Wiley.

Schnorr, C.-P. (1971): *Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit. Eine algorithmische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie.* Lecture Notes in Mathematics, Bd. 218: Berlin/New York: Springer-Verlag.

Schwabl, F. (1990): *Quantenmechanik.* 2. Aufl. Berlin: Springer-Verlag.

Shafer, G.; Vovk, V. (2001): *Probability and Finance. It's Only a Game!* New York: Wiley-Interscience.

Shafer, G.; Vovk, V. (2019): *Game-Theoretic Foundations for Probability and Finance.* Hoboken NJ: Wiley & Sons, Inc.

Sill, H.-D.; Kurtzmann, G. (2019): *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe.* Berlin: Springer Spektrum.

Solomonoff, R.J. (1964): A formal theory of inductive inference, I and II. *Information and Control* 7, 1–22 und 224–254.

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (2021): *Mathematische Grundkompetenzen für die SRP in Mathematik (AHS)*. Online: https://www.matura.gv.at/srdp/mathematik (Zugriff: 27. 10. 2021).

Viertl, R. (2003): *Einfuhrung in die Stochastik. Mit Elementen der Bayes-Statistik und der Analyse unscharfer Information.* 3. Aufl. Wien: Springer-Verlag.

Voiculescu, D.V.; Dykema, K.J.; Nica, A. (1992): *Free Random Variables.* Providence RI: American Mathematical Society.

von Mises, R. (1918): Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: *Mathematische Zeitschrift* 5, 52–99.

von Neumann, J. (1932): *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Berlin: Springer-Verlag.

Walley, P. (1991): *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities.* London: Chapman & Hall.

Weichselberger, K. (2001): *Elementare Grundbegriffe einer allgemeinen Wahrscheinlichkeitsrechnung I.* Heidelberg: Physica-Verlag.

Yuen, K.-V. (2010): *Bayesian Methods for Structural Dynamics and Civil Engineering.* Singapore: John Wiley & Sons (Asia).

Anschrift des Verfassers

Michael Oberguggenberger

Fakultät für Technische Wissenschaften
Universität Innsbruck
Technikerstraße 13
A – 6020 Innsbruck
Österreich

michael.oberguggenberger@uibk.ac.at