# Lernpfade als Wegweiser zur Ausbildung von Begründungskompetenz im Mathematikunterricht

STEFAN GÖTZ, WIEN; EVELYN SÜSS-STEPANCIK, BADEN

In diesem Beitrag wird kompetenzorientierter Mathematikunterricht entlang des von den Bildungsstandards M8 bekannten Handlungsbereichs „Argumentieren, Begründen“ konzipiert. Dazu werden spezifische unterschiedliche Kompetenzstufen identifiziert, die jeweils mathematische Handlungen von Schülerinnen und Schülern im Blickpunkt haben. Die dabei intendierte Eigentätigkeit von Schülerinnen und Schülern soll nachhaltige Erkenntnisprozesse bei ihnen in Gang setzen bzw. sichern. Mithilfe von Lernpfaden kann dieser Ansatz für den Unterricht zugänglich gemacht werden.

Eine ausführliche Ausarbeitung dieses Themas erscheint in „**Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Lernpfade als Weg zum Ziel**“, herausgegeben von Jürgen Roth, Evelyn Süss-Stepancik und Heike Wiesner, Springer Spektrum Wiesbaden 2015.

## 1. Lernpfade

### 1.1 Was ist ein Lernpfad?

Wir verstehen im Folgenden unter einem Lernpfad eine internetbasierte Lernumgebung, die Informationen (Formeln, Merksätze, …) und interaktive Materialien (Aufgaben, Applets, …) bereitstellt. Meist ist eine Sequenz mehr oder weniger aufeinander abgestimmter Arbeitsaufträge zu einem bestimmten Teilaspekt des zugrunde liegenden Themas (z. B. Lehrsatz des Pythagoras) von den Schülerinnen und Schülern in Eigentätigkeit zu erledigen. Dabei werden sie angeregt zu erkunden, formulieren, begründen, üben, wiederholen und vertiefen (vgl. Roth & Wiesner 2014).

Manche Lernpfade eignen sich auch zur Differenzierung im Unterricht. Das primäre Thema bildet den roten Faden des Lernpfades. Daneben werden vertiefende oder erweiternde Aspekte des in Rede stehenden Themenfeldes angeboten, die je nach Interesse und Einstellung von einzelnen Schülerinnen und Schülern zusätzlich bearbeitet werden können.

### 1.2 … und wie wird mit ihm gearbeitet?

Die intendierte Selbsttätigkeit der Schülerinnen und Schüler weist den Lernenden also eine aktive Rolle im Unterrichtsgeschehen zu. Diese interpretieren wir handlungsorientiert und werden sie im Folgenden anhand des Begründens exemplarisch beschreiben. Selbsttätigkeit ist in unserer Sicht auch immer mit Eigenverantwortung verbunden. Das heißt, Schülerinnen und Schüler müssen zum Beispiel ein der jeweiligen Situation angemessenes Zeitmanagement entwickeln und dann auch realisieren.

Für die Lehrenden bleibt die passive Rolle der die Schülerinnen und Schüler bei der Arbeit mit dem Lernpfad Unterstützenden. Es stellt sich als wichtig heraus, die Lernenden beim Durchschreiten des Lernpfades immer wieder neu zu orientieren, da Lernpfade oft eine breite Palette an möglichen Erweiterungen und Vertiefungen eines bestimmten Themas zur Verfügung stellen. Die Gefahr des Verzettelns ist durch die verzweigte Struktur eines Lernpfads gegeben. Außerdem obliegt das Anstiften zum Einordnen des neu Gelernten und zum Anknüpfen an alt Bekanntes im Allgemeinen den Lehrenden (vgl. Integrationsprinzip bei Wittmann 2009, S. 77 f.).

### 1.3 Konsequenzen für die Lernumgebung

Die im vorigen Abschnitt beschriebene Rollenaufteilung zwischen Lehrenden und Lernenden macht abrufbare Hilfen und Ergebniskontrollen in einem Lernpfad notwendig. Um die gewünschte Eigentätigkeit der Schülerinnen und Schüler zu initiieren, sind gezielte Aufforderungen zum Experimentieren, Formulieren, Argumentieren, Reflektieren sehr wesentliche Elemente eines Lernpfades. Des Weiteren ist eine Dokumentation der Ergebnisse und Vorgangsweisen unabdingbar, um den (fehlenden) Lernerfolg der Schülerinnen bzw. Schüler nachzuweisen. Daher muss ein Lernpfad entsprechende Anregungen vorsehen.

## 2. Kompetenzen

### 2.1 Zum Kompetenzbegriff

> „Unter **Kompetenzen** werden hier *längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten* verstanden, die von Lernenden entwickelt werden können und sie befähigen, bestimmte Tätigkeiten in variablen Situationen auszuüben, sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten einzusetzen." (IDM Klagenfurt 2007, S. 9)

Dieses Zitat stammt aus dem Standardskonzept M8, dort finden wir ein dreidimensionales Kompetenzmodell. Neben Inhalts- und Handlungsdimension wird dort die Komplexität einer Aufgabe berücksichtigt (drei Stufen, vgl. IDM Klagenfurt 2007, S. 14). Das hat uns auf die Idee gebracht, für die ebendort genannten Handlungsbereiche ebenfalls unterschiedliche Ansprüche an Schülerinnen- und Schülertätigkeiten zu formulieren. Im Folgenden wird speziell für das Begründen eine solche Stufung vorgestellt, dabei haben wir uns auf Bürger (1979) gestützt.

### 2.2 Kompetenzstufen für das Begründen

Ein Stufenmodell zum Kompetenzaufbau beim Begründen könnte so aussehen (Götz & Süss-Stepancik im Druck):

*Stufe 1:* Bereitschaft sich auf mathematische Aufgabenstellungen einzulassen, die eine (einfache) Begründung einfordern.

*Stufe 2:* Vorgegebene Begründungen verstehen, nachvollziehen und erklären können. Ein wesentlicher Aspekt besteht im Erkennen der Argumentationsbasis.

*Stufe 3:* (Mathematische) Begründungen in Kommunikationssituationen (z. B. Warum ist ein Lösungsweg/eine Konstruktion/ … korrekt/richtig/zielführend/ …?) darlegen und argumentieren können.

*Stufe 4:* Eigenständiges Finden einer Begründung zu einer (mathematischen) Aussage/Vermutung und/oder Argumentation derselben, inklusive Wahl der Argumentationsbasis.

Im Lernpfad „Einführung in die Integralrechnung" (Hohenwarter et al. 2005) treffen wir drei der vier Begründungsstufen an: z. B. Stufe 1 in Abbildung 1a. Durch Manipulieren dieses Applets wird ein Zusammenhang zwischen Verfeinerung der Zerlegung des Intervalls und den Werten von Ober- bzw. Untersumme offenbar. (Diese sollen im ersten Arbeitsschritt von den Schülerinnen und Schülern beschrieben werden.) Das Erklären dieses Phänomens erfordert ein Einlassen auf die vom Applet gezeigte Situation und verlangt letztlich ein Plausibelmachen und darauf aufbauend eine Begründung.

In Abbildung 1b sehen wir einen erklärenden Text neben der Darstellung der mathematischen Situation und damit ist Stufe 2 angesprochen.

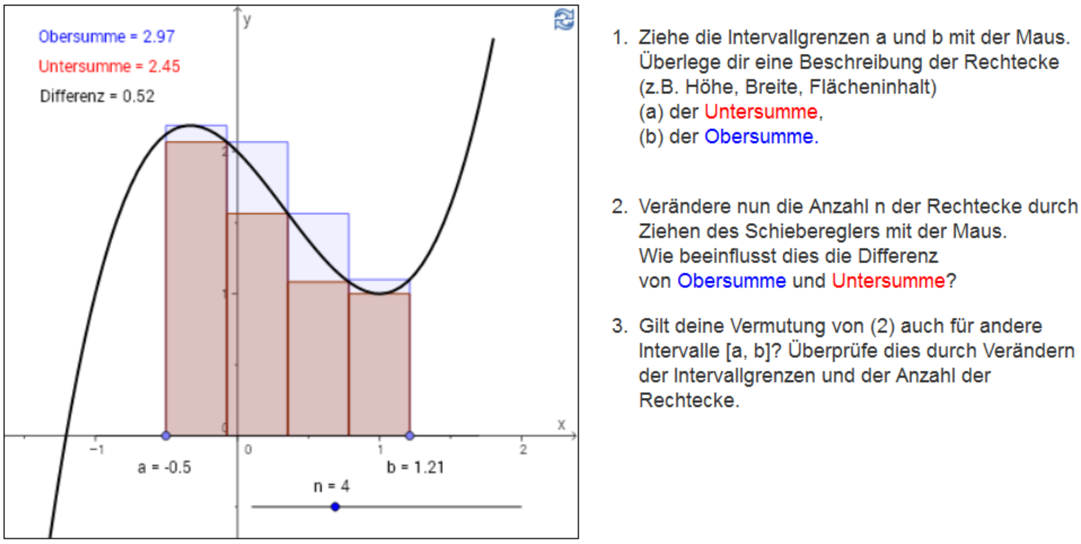


Abb. 1a: Interaktives Lernobjekt zu Unter- und Obersumme

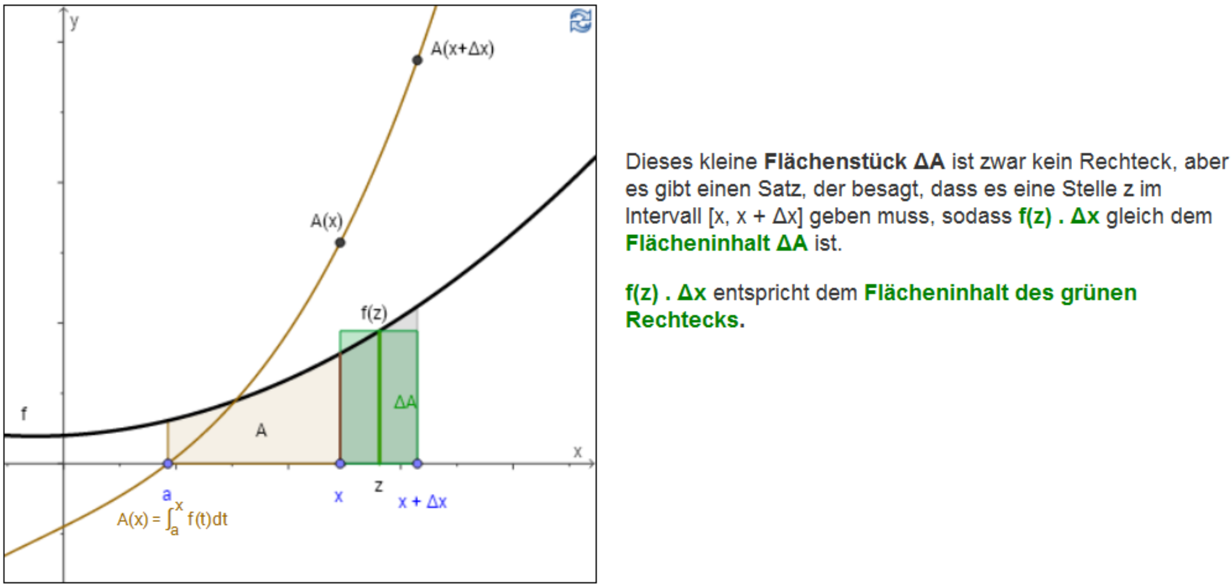


Abb. 1b: Interaktives Lernobjekt zum Hauptsatz 1

Abbildung 1c ist im Lernpfad die Aufforderung „ […] und versuche, die dargestellten Beweisschritte in Worten zu erläutern.“ (Hohenwarter et al. 2005) beigestellt, sie zielt damit auf Stufe 3 des Begründens ab. Denkbar wäre, dass die verschiedenen Beweisschritte des Hauptsatzes von unterschiedlichen Schülerinnen bzw. Schülern studiert werden und dann in Form eines Gruppenpuzzles gegenseitige Präsentationen stattfinden, sodass insgesamt am Schluss eine vollständige Begründung dieser wichtigen und zentralen Aussage vorhanden ist.

Es ist also der Nachweis gelungen, dass Lernpfade existieren, die mehrere (alle?) Kompetenzstufen zum Begründen ansprechen. Will man aber wirklich in der Wahl des Kompetenzniveaus flexibel sein, so ist die Entwicklung eigener Aufgaben dazu wohl meist notwendig.

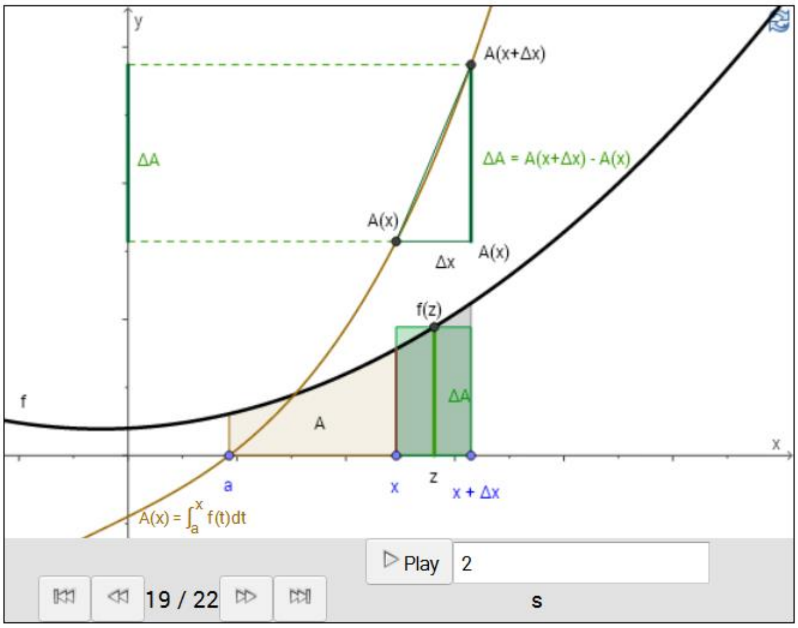


Abb. 1c: Interaktives Lernobjekt zum Hauptsatz 2

## 3. Nachhaltiger Kompetenzerwerb

Im Sinne des Spiralprinzips bietet es sich an, verschiedene Kompetenzstufen über die Jahrgangsstufen hinweg immer wieder an einem bestimmten Thema aufzugreifen. Für das Begründen im Unterricht ist die Geometrie eine reichhaltige Quelle. Elementargeometrische Phänomene können analytisch beschrieben und erklärt werden. Als Beispiel hierzu wollen wir den Lernpfad „Besondere Punkte und Linien im Dreieck“ (Schwaiger et al. 2009) heranziehen.

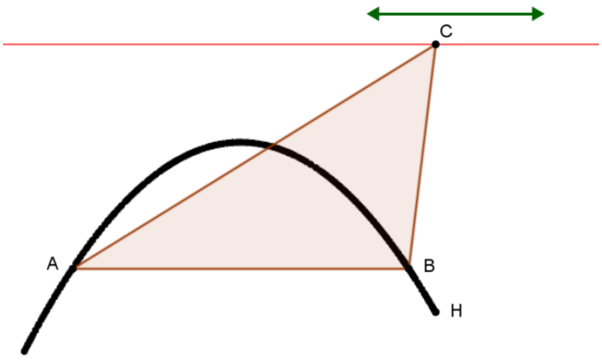


Abb. 2: Spur des Höhenschnittpunkts *H* eines Dreiecks *ABC*

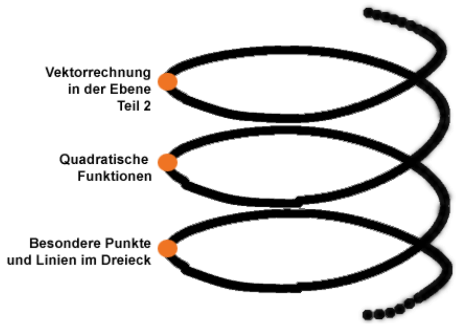


Abb. 3: Das Spiralprinzip für das Spurproblem von *H*

In Abbildung 2 sehen wir ein Dreieck *ABC*, dessen Eckpunkt *C* sich parallel zur gegenüberliegenden Seite *AB* bewegt. Für die dabei entstehenden Dreiecke betrachten wir jeweils den *Höhenschnittpunkt H* und seine Spur. Ihr parabelförmiger Verlauf ist ebenfalls in Abbildung 2 zu sehen. Nun kann Schritt für Schritt auf unterschiedlichen Niveaus (und dementsprechend in verschiedenen Schulstufen) die Spur von *H* analysiert werden. Schließlich mündet der Prozess in einer Begründung dafür, dass die Spur von *H* eine Parabel ist. Eine Visualisierung des dazugehörenden Spiralprinzips mit den dabei berührten schulmathematischen Gebieten zeigt Abbildung 3. Eine genauere Analyse möglicher Bearbeitungen demonstriert, dass dabei wiederum die ersten drei Stufen des vorgestellten Kompetenzstufenmodells erklommen werden (siehe 2.2, Götz & Süss-Stepancik im Druck).

Möchte man im Anschluss daran eine Aufgabe auf der vierten Stufe stellen, so bietet sich das analoge Spurproblem für den *Umkreismittelpunkt* eines Dreiecks an. Die Abbildung 4a zeigt als Spur einen Strahl, der normal auf die Seite $AB$ steht. Im Detail ist in Abbildung 4b der „Beginn“ des Strahls zu sehen. Der Umkreismittelpunkt $U$ ist offenbar im Falle der Symmetrie des Dreiecks $ABC$ (gleichschenkelig) an seiner tiefsten Stelle.

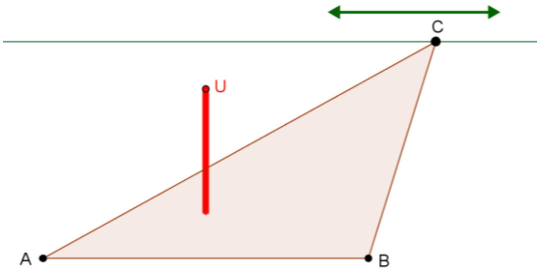


Abb. 4a: Spur des Umkreismittelpunkts *U* eines Dreiecks *ABC*

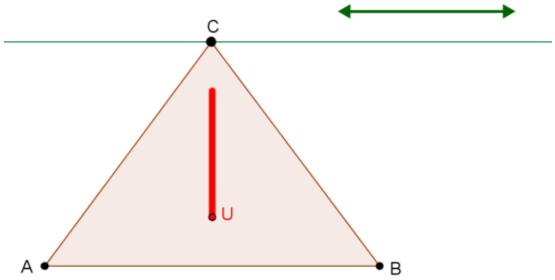


Abb. 4b: Tiefste Stelle der Spur des Umkreismittelpunkts *U* eines Dreiecks *ABC*

Um die Lage der Spur analytisch zu bestimmen, führen wir ein Koordinatensystem ein (Abbildung 5). Die Eckpunkte $A$, $B$ liegen auf der $x$-Achse mit den Koordinaten $(u|0)$ bzw. $(v|0)$, dabei ist $u < v$. Der Eckpunkt $C$ hat die fixe $y$-Koordinate $w$ und die variable $x$-Koordinate $z$. Der Schnitt zweier Streckensymmetralen ($s_{AB}$ und $s_{BC}$ in Abbildung 5) liefert die Koordinaten von $U$:

$$U\left(\frac{u+v}{2}\middle|\frac{w^2+(u-z)\cdot(v-z)}{2w}\right).$$

Da die Eckpunkte $A$ und $B$ fix sind, ändert sich auch die $x$-Koordinate des Umkreismittelpunkts nicht, denn die Streckensymmetrale $s_{AB}$ bleibt unveränderlich. Daher richten wir unser Augenmerk auf die $y$-Koordinate von $U$. In Abbildung 6 ist sie funktional in Abhängigkeit von der $x$-Koordinate von $C$ dargestellt, wobei für $u = -2$, $v = 4$ und $w = 4$ angenommen wird. Der Graph der quadratischen Funktion $y$ hat seinen Scheitel an der Stelle $\frac{u+v}{2} = 1$ in der Höhe $\frac{w}{2} - \frac{(u-v)^2}{8w} = \frac{7}{8}$. Also ist der Punkt $(1|0{,}875)$ der tiefste Punkt der Spur.

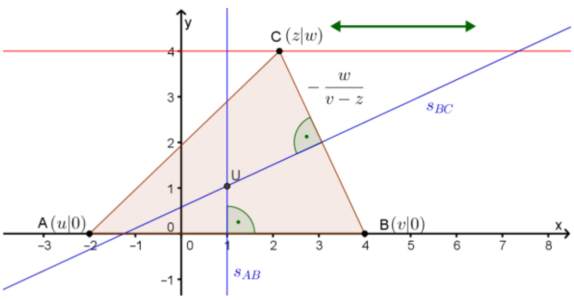


Abb. 5: Dreieck *ABC* in einem Koordinatensystem

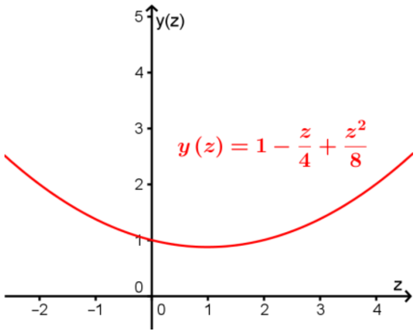


Abb. 6: Die *y*-Koordinate von *U* in Abhängigkeit von der *x*-Koordinate von *C*

Die Spur des *Inkreismittelpunkts I* verlangt nach Stufe 4+, wie Abbildung 7 demonstriert. Sie ist ellipsenähnlich und geht im Grenzwert $z \to \pm\infty$ durch die Eckpunkte *A* und *B*. Der höchste Punkt *P* der Spur wird an der Stelle $\frac{u+v}{2}$ angenommen. Eine explizite Darstellung der *x*- und *y*-Koordinate der Spur von *I* kann Abbildung 7 entnommen werden. Eine Halbellipse mit den Hauptscheiteln *A* und *B* und dem Nebenscheitel *P* ist ebenfalls in Abbildung 7 eingezeichnet. Sie unterscheidet sich von der Spur von *I*.

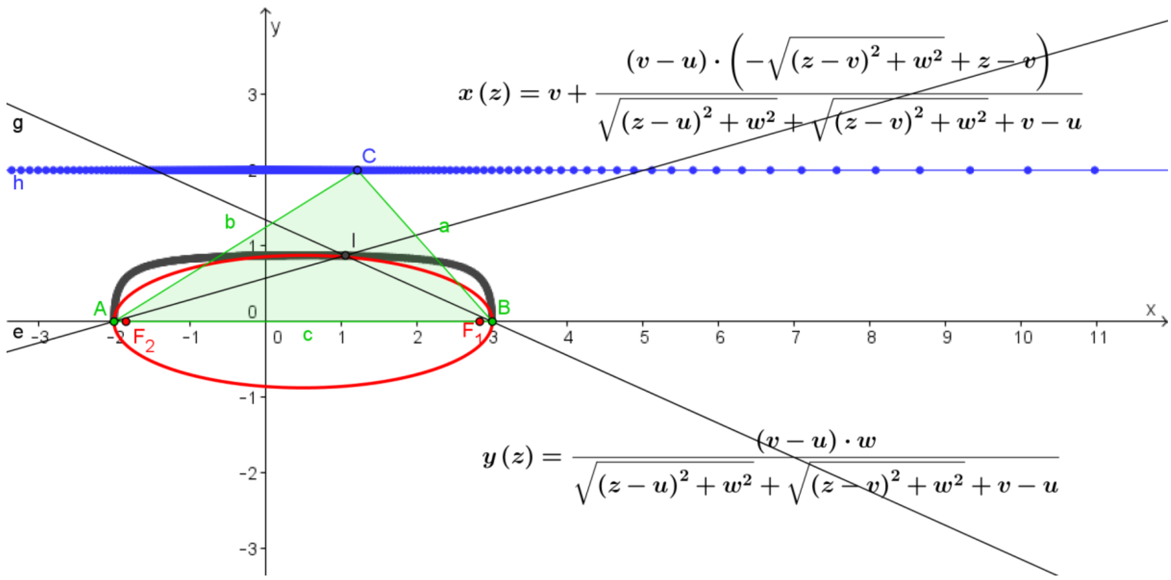


Abb. 7: Spur des Inkreismittelpunkts *I* eines Dreiecks *ABC*

## 4. Resümee

Ausgangspunkt unserer Überlegungen in Abschnitt 3 war der Lernpfad „Besondere Punkte und Linien im Dreieck“ (Schwaiger et al. 2009). Der Unterpunkt „Erkundungen“ lädt ein, die Spuren von besonderen Punkten im Dreieck zu verfolgen: Abbildung 8. Bei der analytischen Identifizierung dieser Spuren haben wir wesentliche Tätigkeiten ausgeführt, die Vollrath und Roth (2012, S. 253) für den Computereinsatz beim Erarbeiten von Sachverhalten nennen:

- „Sachverhalte entdecken,
- Ideen visualisieren […],
- Beweisideen erarbeiten, vermitteln und überblicksartig wiederholen […]“

Die von uns dabei verwendeten GeoGebra-Applets könnten in einem Lernpfad zum obigen Thema integriert werden, um die von uns propagierte Vertiefung Schülerinnen und Schülern zugänglich zu machen. Entsprechende Hinweise zur „Koordinatisierung“ des Problems (der Schlüssel zu dessen Lösung) müssten wohl in eine solche Lernumgebung eingebettet werden (vgl. 1.3), um den Erfolg der Eigentätigkeit der Schülerinnen und Schüler nicht zu gefährden.

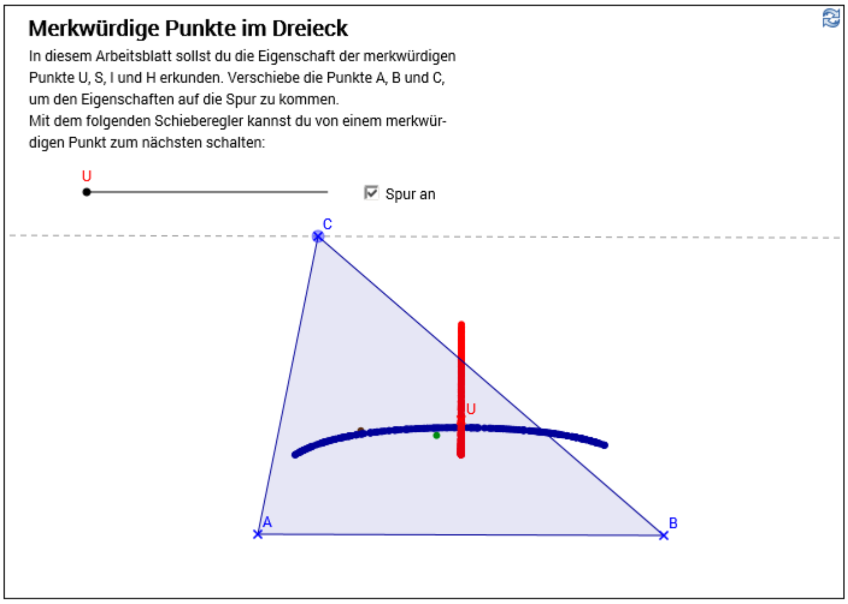


Abb. 8: Erkundungen im Lernpfad „Besondere Punkte und Linien im Dreieck“

Teilaspekte des in Rede stehenden Problems können mit den Lernpfaden „Quadratische Funktionen“ (Schmidt et al. 2009) und „Vektorrechnung in der Ebene, Teil 2“ (Lindner et al. 2005) behandelt werden.

Inhaltlich sind bei der Problembearbeitung in Abschnitt 3 mehrere Gebiete der Schulmathematik angesprochen worden: Ausgehend von einem elementargeometrischen Problem, das wir mittels eines Applets im oben zitierten Lernpfad erkundet haben, haben wir Entdeckungen gemacht, die wir als allgemeine Vermutungen formuliert haben. Ihre Begründung fanden wir mithilfe von Methoden der analytischen Geometrie (Einführung eines Koordinatensystems, Schnitt zweier Geraden). Schließlich haben wir funktionale Abhängigkeiten gebraucht, um die Ergebnisse zu interpretieren. Dabei sind sogar Werkzeuge der Analysis (Grenzwertbildung) zum Einsatz gekommen.

Didaktisch sind wir nach der genetischen Methode vorgegangen (vgl. Wittmann 2009, S. 130 ff.). Den „Anschluß an das Vorverständnis der Adressaten“ haben wir beim Schneiden zweier Geraden in der Ebene berücksichtigt. Das Identifizieren von Ortslinien entspricht der „Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte […] innerhalb der Mathematik“. Die „Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze“ geschah durch die Einführung eines Koordinatensystems. Das übergeordnete Thema „Spuren von besonderen Punkten im Dreieck“ sorgte für „durchgehende und Motivation und Kontinuität“ genauso wie die zahlreichen Anlässe dabei, Schülerinnen und Schüler selbsttätig arbeiten zu lassen. Insgesamt konstatieren wir die „während des Voranschreitens allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerungen.“ (Wittmann 2009, S. 131)

Lernpfade können also dazu dienen, dass Schülerinnen und Schüler eigene Erfahrungen sammeln und mittels (darin integrierter) dynamischer Geometriesoftware selbstständig Experimente durchführen. So verhelfen Lernpfade zu individuellen Einsichten und Zugängen. Ein solcher geistiger Prozess, der zu (für Schülerinnen und Schüler) neuen Erkenntnissen führt, braucht diese Eigenständigkeit: „Dem liegt die Überzeugung zugrunde, dass ein derartiger Prozess zwar angestoßen und durch Hinweise hilfreich begleitet werden kann, dass aber das Wesentliche in den Schülerinnen und Schülern selbst geschehen muss.“ (Vollrath & Roth 2012, S. 247)

Die bei diesen Entwicklungen angestrebte Nachhaltigkeit können Lernpfade in hohem Maße unterstützen. Online-Materialien sind im Allgemeinen rasch verfügbar, der gesamte von den Schülerinnen und Schülern geleistete Argumentationsprozess kann im (Wiki-)Lernpfad dokumentiert werden. Dadurch wird ihr Begründungsrepertoire erweitert und gesichert.

## Literatur


Bürger, H. (1979). Beweisen im Mathematikunterricht – Möglichkeiten der Gestaltung in der Sekundarstufe I und II. In: Dörfler, W.; Fischer, R. (Hrsg.): *Beweisen im Mathematikunterricht*. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Band 2, 103–134. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky & Stuttgart: B. G. Teubner.

Götz, S., Süss-Stepancik, E. (im Druck): Lernpfade zur Unterstützung der Ausbildung von Begründungskompetenz im Mathematikunterricht. Erscheint in: Roth, J.; Süss-Stepancik, E.; Wiesner, H. (Hrsg.): *Medienvielfalt im Mathematikunterricht – Lernpfade als Weg zum Ziel*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hohenwarter, M., Jauck, G., Lindner, A., Gassner, C. (2005 bzw. 2011): *Einführung in die Integralrechnung*. http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/Medienvielfalt/Medienvielfalt3/lernpfad_integralrechnung/2011-03-22-Integral/Lernpfad/ (Zugriff: 24.04.2014)

IDM (2007): *Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe.* Version 4/07. Herausgegeben vom Institut für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik – Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung – Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.
http://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/Standardkonzept_Version_4-07.pdf (Zugriff: 24.04.2014)

Lindner, A., Hohenwarter, M., Himmelbauer, T. (2005): *Vektorrechnung in der Ebene, Teil 2*. http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/Vektoren2/lernpfad/MV_Vektor2/index.htm (Zugriff: 24.04.2014)

Roth, J., Wiesner, H. (2014): *Lernpfade. Ein Weg zur selbständigen und sinnvollen Nutzung von digitalen Werkzeugen durch Schüler/innen*. Vortrag gehalten auf der 48. GDM-Jahrestagung in Koblenz.

Schmidt, R., Schmidt, C., Eirich, M., Schellmann, A., Haberl, K. (2009 bzw. 2011): *Quadratische Funktionen*. http://wikis.zum.de/medienvielfalt/index.php?title=Quadratische_Funktionen_2 (Zugriff: 24.04.2014).

Schwaiger, E., Urban-Woldron, H., Schmidt, R., Stepancik, E. (2009 bzw. 2011): *Besondere Punkte und Linien im Dreieck*.
http://rfdz.ph-noe.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/Medienvielfalt/Medienvielfalt3/lernpfad_BesonderePunkteUndLinienImDreiecke/ (Zugriff: 24.04.2014)

Vollrath, H.-J., Roth, J. (2012): *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Wittmann, E. Ch. (2009): *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. 6., neu bearbeitete Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.


## Verfasser/in


Stefan Götz
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Oskar-Morgenstern-Platz 1
1090 Wien

stefan.goetz@univie.ac.at

Evelyn Süss-Stepancik
Pädagogische Hochschule für Niederösterreich
Mühlgasse 67
2500 Baden

evelyn.stepancik@ph-noe.ac.at