Lineare (Un-)Gleichungen und lineare Optimierung

Franz Pauer
Institut für Mathematik, Universität Innsbruck
Technikerstr. 13/7, A-6020 Innsbruck, Österreich
franz.pauer@uibk.ac.at

1 Einleitung

In der linearen Optimierung betrachtet man Aufgaben wie die folgende:

Eine Firma stellt aus 3 Rohstoffen A, B und C zwei Produkte P und Q her. Von A bzw. B bzw. C sind 28 bzw. 32 bzw. 40 Tonnen verfügbar.
Für je ein Stück von P bzw. Q werden gebraucht:

	A	B	C
P	1kg	2kg	5kg
Q	4kg	4kg	2kg

Der Gewinn für ein Stück von P bzw. Q beträgt 4 bzw. 5 Euro.
Wie viele Stück von P und von Q soll die Firma produzieren, um einen möglichst großen Gewinn zu erzielen?

Um diese Aufgabe mathematisch zu modellieren, legen wir zuerst fest, was wir suchen. Gesucht sind zwei Zahlen: die Stückzahlen von Produkt P und von Produkt Q. Dann lesen wir aus dem Text ab, welche Bedingungen diese Zahlen erfüllen sollen. Weiters müssen wir Annahmen über die „Gewinnfunktion“ treffen. Also:

- *Gesucht* ist ein Zahlenpaar $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, dabei gibt p bzw. q an, wieviele Stück von P bzw. Q hergestellt werden sollen.

- Dieses Zahlenpaar (p, q) muss die folgenden *Bedingungen* erfüllen :
  - $p + 4q \leq 28000,\ 2p + 4q \leq 32000,\ 5p + 2q \leq 40000,$
    weiters $p \geq 0$ und $q \geq 0$, weil p und q als Stückzahlen nicht negativ sein können.
    Die Menge der Zahlenpaare (p, q), die diese Bedingungen erfüllen, nennen wir den *zulässigen Bereich* dieser Optimierungsaufgabe.
  - Der Gewinn soll möglichst groß sein, d.h.: wenn wir mit G die Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ bezeichnen, die jedem Zahlenpaar (x, y) den Gewinn (in Euro) bei Produktion von x Stück von P und y Stück von Q zuordnet, dann soll für alle (x, y) aus dem zulässigen Bereich
    $G(x, y) \leq G(p, q)$ sein.
- Wenn wir annehmen, dass die Funktion G linear ist, dann ist
  $G(x, y) = 4x + 5y$ für alle Zahlenpaare (x, y), also soll das Zahlenpaar (p, q) im zulässigen Bereich so gewählt werden, dass $4p + 5q$ größtmöglich ist.

Ist die Annahme, dass die Gewinnfunktion linear ist, sinnvoll? Diese Annahme bedeutet, dass sich der Gewinn verdoppelt, verdreifacht, ... , wenn man die Produktion verdoppelt, verdreifacht, ... Jede Firma weiß, dass das in der Regel nicht der Fall ist. Wenn der Markt mit einem Produkt „überschwemmt“ wird, verfällt der Preis. Wenn die Gewinnfunktion linear ist, dann muss der Gewinn bei gleichzeitiger Produktion von p Stück von P und q Stück von Q die Summe der Gewinne nach der Produktion von p bzw. q Stück von P bzw. Q sein. Auch das ist nicht immer so. Wenn die Kunden zum Beispiel das Produkt P besser als das Produkt Q empfinden, dann kann die Produktion von P den Absatz von Q beeinträchtigen.

Die Annahme, dass die Gewinnfunktion linear ist, ist jedoch unter gewissen Umständen sinnvoll. Zum Beispiel, wenn die Abnahme der Produkte von vorneherein gesichert ist. Oder, wenn nur kleine Veränderungen der Produktion geplant sind. Die Annahme, dass der Gewinn um 2 Prozent steigt, wenn die Produktion um 2 Prozent erhöht wird, scheint realistisch zu sein.

Natürlich geht es in der linearen Optimierung nicht nur darum, Gewinne von Firmen zu maximieren. Ebenso können mit diesen Methoden Aufgaben gelöst werden, in denen der Verbrauch von Energie und Rohstoffen minimiert werden soll oder möglichst viele Arbeitsplätze geschaffen werden sollen.

Das Thema „Lineare Optimierung“ ist aus mehreren Gründen gut für den Schulunterricht geeignet:

- Man kann damit zeigen, dass Mathematik in der Wirtschaft gebraucht und verwendet wird.

- Man kann Schülerinnen und Schülern damit nahebringen, dass ein gutes Verständnis von linearen Gleichungen und linearen Ungleichungen sehr nützlich ist.

- Es ist gut geeignet, mathematische Modellierung einzuüben und sich kritisch mit den Möglichkeiten und Grenzen der Modellbildung auseinanderzusetzen.

- Wenn man sich auf zwei Unbekannte beschränkt, braucht man nur wenige Vorkenntnisse (und zwar über lineare Gleichungen, Ungleichungen und lineare Funktionen).

Leider wird der linearen Optimierung in den Lehrplänen der Höheren Schulen nicht mehr viel Beachtung geschenkt, sie findet sich nur im Lehrplan des 2. Jahrganges von Höheren Technischen Lehranstalten und (als Erweiterungsstoff) im Lehrplan des 5. Jahrganges der Handelsakademien.

In diesem Beitrag wird die graphische Methode zur Lösung von Aufgaben der linearen Optimierung mit zwei Unbekannten dargestellt. Es soll gezeigt werden, dass dieses Verfahren mit wenig Aufwand unterrichtet werden kann, falls vorher ein gutes Verständnis von linearen Gleichungen und Ungleichungen (mit zwei Unbekannten), sowie von linearen Funktionen vermittelt wurde.

2 Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

Eine *lineare Gleichung mit zwei Unbekannten* ist die folgende Aufgabe:

- *Gegeben* sind drei reelle Zahlen a, b und c, wobei mindestens eine der Zahlen a oder b nicht 0 ist.

- *Gesucht* ist eine „gute Beschreibung“ der *Lösungsmenge*

$$L(a, b; c) := \{(x, y) \mid ax + by = c\} \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

Im Weiteren schreiben wir für diese Aufgabe kurz „die Gleichung $ax + by = c$“.

Was bedeutet eine „gute Beschreibung“ der Lösungsmenge? Da $L(a, b; c)$ eine unendliche Menge ist, ist nicht von vorne herein klar, wie man sie durch endlich viele Daten beschreiben kann.

Die folgenden zwei *Beobachtungen* sind einfach zu überprüfen, aber wichtig:

(1) Kennt man (irgend)eine Lösung der Gleichung

$$ax + by = c$$

dann erhält man alle Lösungen, indem man zu dieser alle Lösungen von $ax + by = 0$ addiert.
Also: Ist (x_c, y_c) (irgend-)eine Lösung der Gleichung $ax + by = c$, dann ist

$$L(a, b; c) = \{\, (x_c, y_c) + (u, v) \,|\, (u, v) \in L(a, b; 0) \,\} .$$

(2) Ist (u, v) eine Lösung von

$$ax + by = 0$$

und ist t eine Zahl, dann ist auch $t \cdot (u, v) := (tu, tv)$ eine Lösung.

Wir bestimmen zuerst $L(a, b; 0)$:

- Das Zahlenpaar $(-b, a)$ ist eine Lösung von $ax + by = 0$, daher (nach Beobachtung 2) auch alle Vielfachen davon. Daher ist

$$\mathbb{R}(-b, a) := \{\, t \cdot (-b, a) \,|\, t \in \mathbb{R} \,\} \subseteq L(a, b; 0) .$$

- Alle Lösungen von $ax + by = 0$ sind Vielfache von $(-b, a)$, d.h.

$$L(a, b; 0) \subseteq \mathbb{R}(-b, a) .$$

  Denn:
  Wenn (u, v) eine Lösung von $ax + by = 0$ ist, dann ist $au + bv = 0$.
  Wenn dann $a \neq 0$ ist, dann ist $u = \frac{v}{a}(-b)$ und $v = \frac{v}{a}a$, also ist

$$(u, v) = \frac{v}{a} \cdot (-b, a)$$

  ein Vielfaches von $(-b, a)$. Wenn $a = 0$ ist, muss $b \neq 0$ sein und $(u, v) = -\frac{u}{b} \cdot (-b, a)$ ist wieder ein Vielfaches von $(-b, a)$.

- Daher ist $L(a, b; 0) = \mathbb{R}(-b, a)$.

Wir können nun leicht $L(a, b; c)$ bestimmen:

- Wenn $a \neq 0$ bzw. $b \neq 0$ ist, ist $(\frac{c}{a}, 0)$ bzw. $(0, \frac{c}{b})$ eine Lösung von $ax + by = c$.

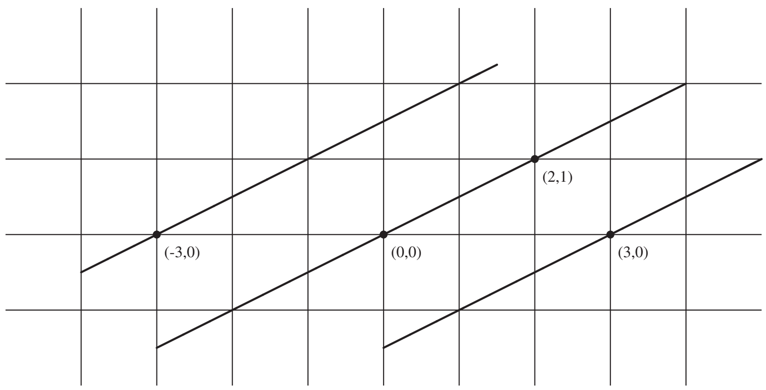
- Nach Beobachtung 1 ist

$$L(a, b; c) = \{(r, s) + (u, v) \,|\, (u, v) \in L(a, b; 0) \,\} =: (r, s) + \mathbb{R}(-b, a) ,$$

  wobei $(r, s) = (\frac{c}{a}, 0)$ oder $(r, s) = (0, \frac{c}{b})$ ist.

Wie kann man dieses Ergebnis geometrisch interpretieren?
Wenn wir in der Ebene ein Koordinatensystem wählen (ob rechtwinkelig oder nicht spielt dabei keine Rolle) können wir Zahlenpaare als Punkte auffassen. Die Menge $\mathbb{R}(-b, a)$ ist dann die Gerade durch $(0, 0)$ und $(-b, a)$.
Die Lösungsmenge von $ax+by = 0$ ist also eine Gerade durch $(0, 0)$, die Lösungsmenge von $ax + by = c$ ist eine dazu parallele Gerade.

Beispiel: Die Lösungsmenge $L(1, -2; 0)$ der linearen Gleichung $x - 2y = 0$ ist die Gerade $\mathbb{R}(2, 1)$, die Lösungsmenge von $x - 2y = 3$ bzw. $x - 2y = -3$ ist die dazu parallele Gerade $(3, 0) + \mathbb{R}(2, 1)$ bzw. $(-3, 0) + \mathbb{R}(2, 1)$.
Zu beachten ist, dass wir keine einzige Rechenoperation ausführen mussten, um diese Gleichungen zu lösen!



Ausführlichere Überlegungen zum Thema Gleichungen sind in [P] zu finden.

3 Lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten

Eine *lineare Ungleichung mit zwei Unbekannten* ist die folgende Aufgabe:

- *Gegeben* sind drei reelle Zahlen a, b und c, wobei mindestens eine der Zahlen a oder b nicht 0 ist.

- *Gesucht* ist eine „gute Beschreibung“ der *Lösungsmenge*

$$L(a, b; \leq c) := \{(x, y) \,|\, ax + by \leq c\} \subseteq \mathbb{R}^2 .$$

Im Weiteren schreiben wir dafür kurz „die Ungleichung $ax + by \leq c$“.

Die folgenden drei Beobachtungen sind einfach zu überprüfen, aber wichtig:

(1) Kennt man (irgend)eine Lösung der Gleichung

$$ax + by = c$$

dann erhält man alle Lösungen der Ungleichung

$$ax + by \leq c\,,$$

indem man zu dieser alle Lösungen der Ungleichung

$$ax + by \leq 0$$

addiert.

(2) Ist (u, v) eine Lösung von

$$ax + by \leq 0$$

und ist t eine *nicht-negative* Zahl, dann ist auch $t \cdot (u, v)$ eine Lösung.

(3) Die Summe von zwei Lösungen von

$$ax + by \leq 0$$

ist wieder eine Lösung.

Nach diesen Beobachtungen können wir leicht eine gute Beschreibung von $L(a, b; \leq c)$ finden:

- Es ist $L(a, b; 0) \subseteq L(a, b; \leq 0)$ und $(-a, -b) \in L(a, b; \leq 0)$.

- Nach Beobachtung 2 und 3 ist daher

$$L(a, b; \leq 0) = \mathbb{R}(-b, a) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-a, -b)\,.$$

  Dabei bezeichnen wir mit $\mathbb{R}_{\geq 0}$ die Menge aller reellen Zahlen, die größer oder gleich 0 sind.

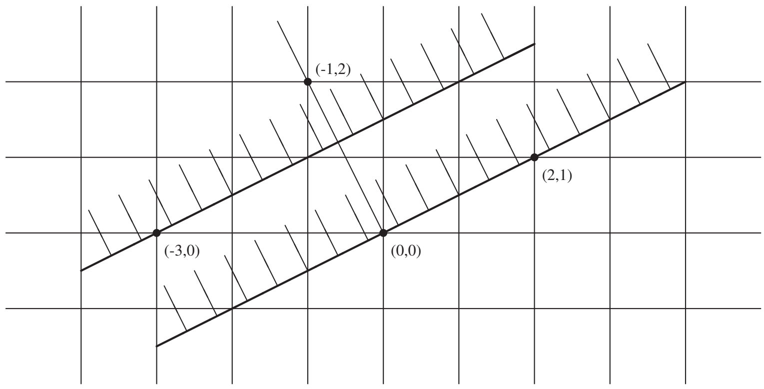
- Wenn (r, s) eine Lösung von $ax + by = c$ ist, folgt aus Beobachtung 1, dass

$$L(a, b; \leq c) = (r, s) + \mathbb{R}(-b, a) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-a, -b)$$

  ist.

Geometrisch formuliert bedeutet das:
$L(a, b; \leq 0)$ ist die Halbebene mit Rand $L(a, b; 0)$, die $(-a, -b)$ enthält.
$L(a, b; \leq c)$ ist die Halbebene mit Rand $L(a, b; c)$, die $(r, s) + (-a, -b)$ enthält.
Dabei ist (r, s) eine Lösung von $ax + by = c$.

Beispiel: Die Lösungsmenge $L(1, -2; \leq 0)$ der linearen Ungleichung $x - 2y \leq 0$ ist die Halbebene mit Rand $\mathbb{R}(2, 1)$, die den Punkt $(-1, 2)$ enthält.
Die Lösungsmenge der Ungleichung $x - 2y = -3$ ist daher die Halbebene mit Rand $(-3, 0) + \mathbb{R}(2, 1)$, die den Punkt $(-4, 2)$ enthält.



4 Lineare Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann *linear*, wenn für alle Paare reeller Zahlen $w := (w_1, w_2)$ und $z := (z_1, z_2)$ und für alle reellen Zahlen t gilt:

- $f(w + z) = f(w) + f(z)$ („der Funktionswert der Summe ist die Summe der Funktionswerte“) und

- $f(t \cdot w) = t \cdot f(w)$ („der Funktionswert des Vielfachen ist das Vielfache des Funktionswertes“).

Bemerkung: In vielen Schulbüchern wird der Begriff „linear“ allgemeiner für Funktionen, die Summen von linearen Funktionen (wie oben) und konstanten Funktionen sind, verwendet.

Eine lineare Funktion f ist eindeutig durch die Funktionswerte von $(1,0)$ und $(0,1)$ bestimmt: wenn $f(1,0)=a$ und $f(0,1)=b$ ist, dann ist

$$f(x,y) = x \cdot f(1,0) + y \cdot f(0,1) = ax + by\,.$$

Sei nun

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,, (x,y) \longmapsto ax + by$$

eine lineare Funktion, die nicht die Nullfunktion ist, also $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.

Für $c \in \mathbb{R}$ sei

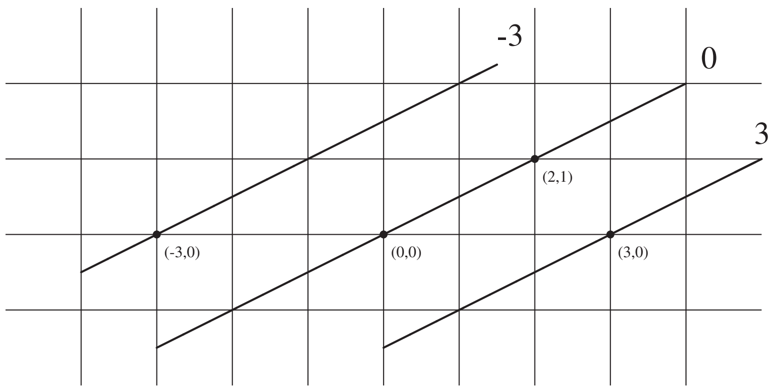
$$f^{-1}(c) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$$

die Menge aller Paare in $\mathbb{R}^2$, deren Funktionswert bezüglich f gleich c ist. Diese Mengen heißen *Niveaulinien* (oder *Urbilder*) von f. Die Niveaulinie $f^{-1}(c)$ ist also die Lösungsmenge der Gleichung $ax + by = c$. Somit sind die Niveaulinien von f zueinander parallele Geraden, insbesondere sind alle parallel zu

$$f^{-1}(0) = \mathbb{R}(-b,a)\,.$$

Beispiel: Die Urbilder von $-3, 0, 3$ bezüglich $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ (x,y) \longmapsto x - 2y$ sind die Lösungsmengen der linearen Gleichungen

$$x - 2y = -3 \text{ bzw. } 0 \text{ bzw. } 3$$



Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Funktion und $w \in \mathbb{R}^2$ so, dass $f(w) \neq 0$ ist.

- Wenn $f(w) > 0,\ c, d \in \mathbb{R}$ und $c < d$ ist, dann ist

$$f(c \cdot w) = c \cdot f(w) < d \cdot f(w) = f(d \cdot w)\,.$$

  Verschiebt man also die Gerade $f^{-1}(0)$ in Richtung eines Punktes mit positivem Funktionswert (bezüglich f), dann nimmt der Funktionswert der Punkte auf den verschobenen Geraden zu.

- Wenn $f(w) < 0,\ c, d \in \mathbb{R}$ und $c < d$ ist, dann ist

$$f(c \cdot w) = c \cdot f(w) > d \cdot f(w) = f(d \cdot w)\,.$$

  Verschiebt man also die Gerade $f^{-1}(0)$ in Richtung eines Punktes mit negativem Funktionswert (bezüglich f), dann nimmt der Funktionswert der Punkte auf den verschobenen Geraden ab.

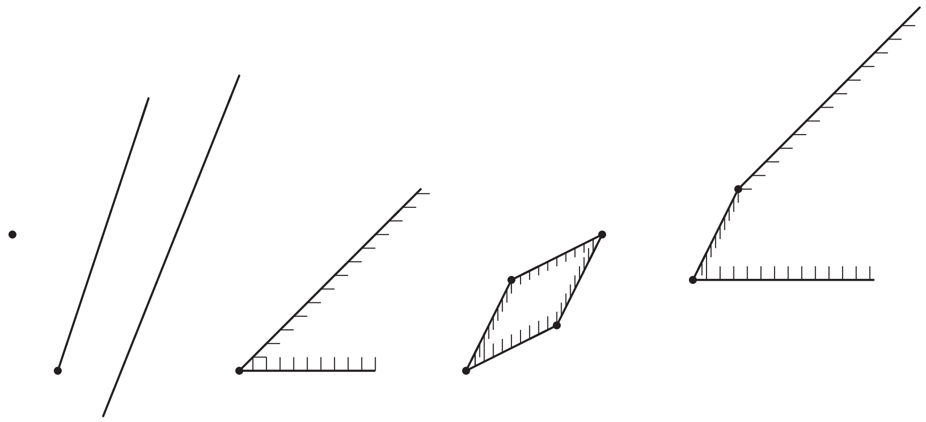
5 Lineare Optimierung mit zwei Unbekannten

Ein *lineares Programm* auf $\mathbb{R}^2$ ist die folgende Aufgabe:

- *Gegeben* sind endlich viele lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten und eine lineare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.
  Die Funktion f nennt man *Zielfunktion*, den Durchschnitt der Lösungsmengen aller linearen Ungleichungen nennt man den *zulässigen Bereich*.

- *Gesucht* ist ein *optimaler Punkt*, das ist ein Zahlenpaar im zulässigen Bereich mit größtmöglichem (oder kleinstmöglichem) Funktionswert bezüglich f.

Nach Abschnitt 3 ist der zulässige Bereich Durchschnitt von Halbebenen. Er kann leer, ein Punkt, eine Halbgerade, eine Gerade, eine Halbebene, ein spitzer Kegel (in der Ebene), ein konvexes Vieleck oder die Summe eines spitzen Kegels (in der Ebene) und eines konvexen Vielecks sein.



Ein optimaler Punkt kann *graphisch* wie folgt bestimmt werden:

- Für jede lineare Ungleichung $ax + by \leq c$ zeichne die Gerade

  $$L(a, b; c) = \{\, (x, y) \mid ax + by = c \,\}$$

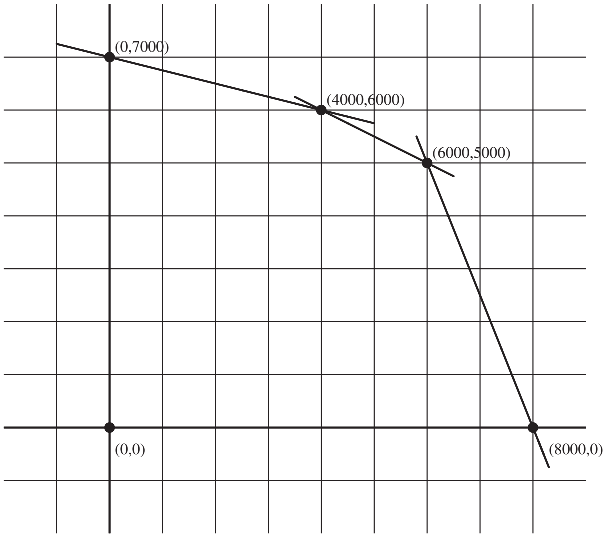
  ein (siehe dazu Abschnitt 2).
  Wähle dann irgendeinen Punkt (u, v), der nicht auf dieser Geraden liegt, und berechne $au + bv$. Wenn diese Zahl kleiner als c ist, dann liegt dieser Punkt auf der Halbebene $L(a, b; \leq c)$. Sonst ist $L(a, b; \leq c)$ die Halbebene, die $(-u, -v)$ enthält.

- Bestimme durch Zeichnung den Durchschnitt dieser Halbebenen, den zulässigen Bereich.
  Falls er leer ist, gibt es keinen optimalen Punkt. Wir nehmen daher im Folgenden an, dass der zulässige Bereich nicht leer ist.

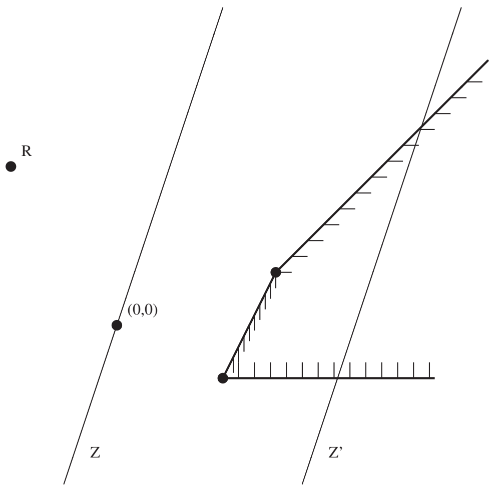
Beispiel: Als Lösungsmenge des Systems

$$\begin{aligned} x + 4y &\leq 28000 \\ 2x + 4y &\leq 32000 \\ 5x + 2y &\leq 40000 \\ -x &\leq 0 \\ -y &\leq 0 \end{aligned}$$

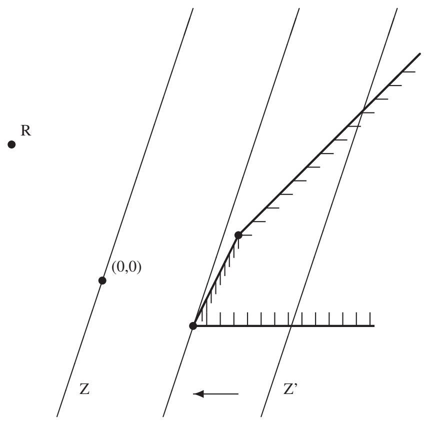
linearer Ungleichungen erhalten wir den folgenden umrandeten Bereich:



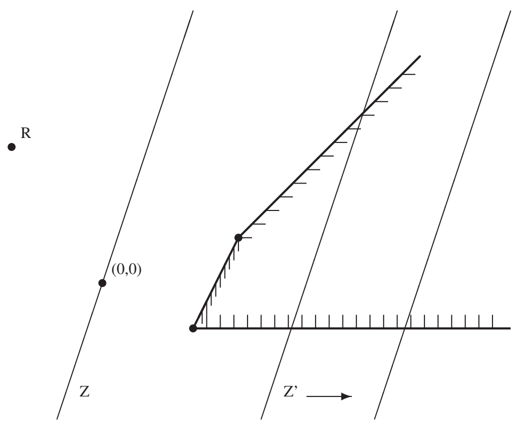
- Zeichne das Urbild von 0 bezüglich der Zielfunktion. Dieses ist eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ durch $(0, 0)$, wir nennen sie Z.
- Wir verschieben Z zunächst so, dass die verschobene Gerade Z' einen Punkt des zulässigen Bereichs enthält.
- Wähle einen Punkt R, dessen Funktionswert bezüglich der Zielfunktion positiv ist (o.E.d.A. nehmen wir an, dass die Zielfunktion nicht die Nullfunktion ist).



- Wenn wir ein *Maximum* suchen, dann verschieben wir Z' so lange in die Richtung von $(0, 0)$ nach R, wie noch ein zulässiger Punkt auf der verschobenen Geraden liegt. Die Funktionswerte bezüglich der Zielfunktion der Punkte auf den Geraden werden dabei immer größer.
  - Falls das beliebig weit möglich ist, gibt es keinen optimalen Punkt.
  - Sobald das nicht mehr möglich ist, ist jeder Punkt des zulässigen Bereichs, der dann noch auf dieser Geraden liegt, ein optimaler Punkt.



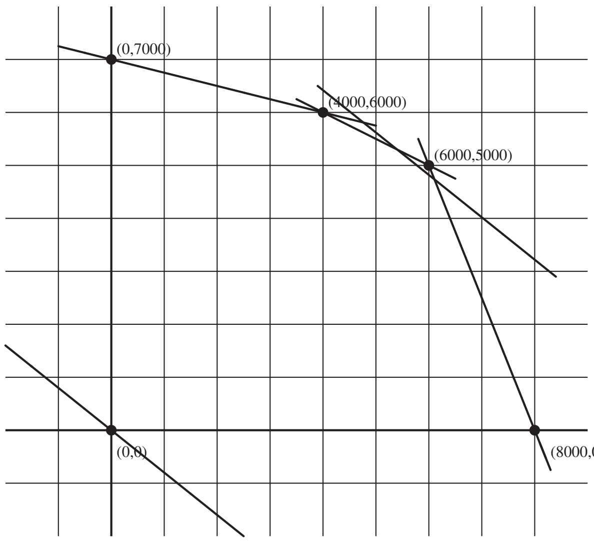
- Wenn wir ein *Minimum* suchen, dann verschieben wir Z' in die andere Richtung und gehen analog vor.



Wir lösen nun das lineare Programm aus der Einleitung:

$$x + 4y \leq 28000\,,\ 2x + 4y \leq 32000\,,\ 5x + 2y \leq 40000\,,\ -x \leq 0\,,\ -y \leq 0\,,$$
$$4x + 5y \text{ maximal}$$

Das Urbild von 0 bezüglich der Zielfunktion ist die Gerade $Z := \mathbb{R}(-5, 4)$. Diese Gerade enthält bereits einen Punkt des zulässigen Bereichs, nämlich $(0, 0)$. Werten wir die Zielfunktion zum Beispiel in $(1, 1)$ aus, erhalten wir die positive Zahl 9. Also verschieben wir die Gerade Z solange in der Richtung von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$, wie die verschobene Gerade noch Punkte des zulässigen Bereichs enthält. Schließlich liegt nur noch der Punkt $(6000, 5000)$ auf der verschobenen Geraden. Also ist der Gewinn maximal, wenn 6000 Stück von Produkt P und 5000 Stück von Produkt Q hergestellt werden.



Bemerkung: Aus den Überlegungen oben folgt unmittelbar: Wenn es einen optimalen Punkt gibt, dann ist mindestens einer der Randpunkte des zulässigen Bereichs ein optimaler Punkt. Das gilt auch für lineare Programme auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$ und ist die Grundlage für den *Simplexalgorithmus* zu ihrer Lösung (siehe zum Beispiel [S]).

Literatur

[P] Pauer, F.: Gleichungen - Aufgabenstellung und Lösungsstrategien. Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Nr. 39 (2007), Seiten 81-91

[S] Schrijver, A.: Theory of Linear and Integer Programming. John Wiley& Sons (1998)