Esther Ramharter

Mathematik – Revolution oder Reaktion? *Simone Weil und René Descartes*

1) Simone Weil

1.a) Wer war Simone Weil?

Simone Weil war eine große Philosophin, eine begeisterte Mathematikerin, die Schwester eines großen Mathematikers und – man kann meinen – eine Verrückte. Simone Weil hat von 1909 bis 1943 gelebt, also in einer nicht eben ruhigen Phase der Geschichte, und wo das Leben vielleicht zu ruhig gewesen wäre, hat sie es sich nach Kräften selbst unruhig gestaltet. Sie arbeitet freiwillig in einer Fabrik, um das Leben der Arbeiter kennenzulernen, sie geht 1932 nach Deutschland, um sich ein eigenes Bild der Ereignisse dort zu machen. 1936 reist sie nach Spanien, um sich am Bürgerkrieg zu beteiligen. Sie hat sich – u.a. aus religiösen Motiven, sie ringt sehr mit dem Christentum – zu Tode gehungert. (Es scheint mir eine Bemerkung wert, dass man als unterschiedlich verrückt gilt, je nachdem, wofür man sich zu Tode hungert.) André Weil, ihr Bruder, hat gesagt, ihre extreme Lebensart sei ihm immer fremd gewesen, erst nach ihrem Tod habe er verstanden, dass man an sie ganz eigene Maßstäbe anlegen muss.

Zum „normalen Teil“ ihres Lebens zählt man wohl, dass sie Philosophie studiert und unterrichtet hat (aufgrund ihres politischen Engagements hatte sie allerdings auch dabei viele Schwierigkeiten und wurde mehrfach verwarnt und sogar versetzt). In ihrem Unterricht hat sie auf die Mathematik immer wieder Bezug genommen, weil sie der Zusammenhang zwischen Wissenschaft und Leben bzw. Philosophie interessiert hat (was ja auch ein Punkt des derzeitigen Philosophielehrplans ist) – ein Beispiel ihres Unterrichts werden wir im Folgenden kennenlernen.

Sie war also eine politische Revolutionärin und – wie wir sehen werden – sie war auch in ihrem Umgang mit Wissenschaft insbesondere der Mathematik in gewisser Weise umstürzlerisch.

1.b) Der Aufsatz „L'Enseignement des mathématiques“ („Der Mathematikunterricht“)

Es handelt sich bei diesem Aufsatz[1] um ein Fragment, an dem man 4 Abschnitte ausmachen kann:

1.) DER PHILOSOPHISCH-POLITISCHE TEIL
2.) DAS UNTERRICHTSEXPERIMENT
3.) DAS PROGRAMM
4.) DER UNGESCHRIEBENE TEIL

[1] *Sur la science*, S.105-109; englische Übersetzung: *On Science, Necessity and the Love of God*, S.71-74

1.) DER PHILOSOPHISCH-POLITISCHE TEIL

Selbst Denker, die ihr philosophisch sehr nahe stehen, vertreten in Bezug auf die Mathematik eine gewisse Auffassung, die sie für verkehrt hält – so beginnt Simone Weil ihren Aufsatz. (Sie distanziert sich auch von „den Ihren", das ist ein vielfach zu beobachtendes Phänomen bei ihr.) Diese Auffassung, der u.a. Henri Poincaré anhängt, besteht darin, dass Mathematik eine revolutionäre Kraft dadurch erlange, dass sie als die Sprache der Physik verstanden wird. Weil weist nicht zurück, dass die Mathematik ein revolutionäres Potential habe, sondern nur, dass dieses darin bestünde, sie als Werkzeug der Physik auszuhändigen. Auch wenn man Marx recht gibt, dass die Trennung von manueller und intellektueller Arbeit ein Verhängnis ist, bedeutet das nicht, dass man auch die Grenze zwischen Theorie und Praxis aufheben muss. Eine Synthese setzt voraus, dass zuerst Getrenntes ist. Mathematik hat ihre eigene Geistesgeschichte, und wenn man sich ansieht, wie sie entstanden ist, dann erkennt man das auch. Die Wissenschaft wurde geboren in dem Moment, in dem es das erste Mal zweckfreie Forschung („disinterested research") gegeben hat. Unsere ganze Kultur, der Marxismus inklusive, beruht auf einem Wunder(!) – dem Wunder von Griechenland. Marx' Studien über die Gesellschaft ähneln der Wissenschaftsauffassung von Descartes eher als jener von Poincaré – so Weil.

2.) DAS UNTERRICHTSEXPERIMENT

Weil beschreibt eine Unterrichtssequenz, die sie selbst, wie sie behauptet, mit großem Erfolg abgehalten hat. Im folgenden werden die Stichworte wiedergegeben, die sie zur Angabe der Stationen ihres Experiments nennt. Es handelt sich dabei um eine Rekonstruktion der Geschichte der Infinitesimalrechnung in einem weiten Sinn. Die einzelnen Stationen stimmen mit der üblichen Geschichtsschreibung überein, unorthodox aber sind die Zusammenhänge, die sie herstellt, und ihre Begründungen.

- Längenmessung
- [...] der Satz über ähnliche Dreiecke, den die Legende Thales zuschreibt; die Kombination dieses Satzes mit dem von Pythagoras, der direkt aus ihm folgt, erlaubt es, alle Verhältnisse auf Geraden als numerische Verhältnisse zu behandeln

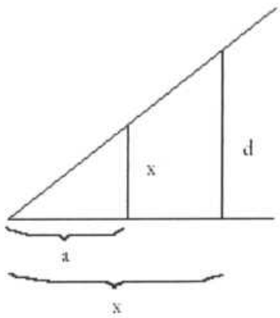
In der griechischen Mathematik wurden Längenverhältnisse der Form a:b=c:d studiert, wobei gewisse dieser Größen gegeben sind, eine davon (x) gesucht ist. Es treten folgende Fälle auf (alle anderen lassen sich auf diese zurückführen):

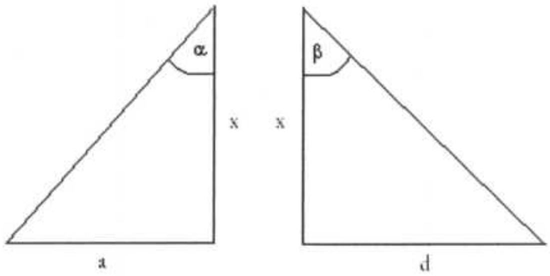
(1) $a : b = c : x$ (2) $a : x = x : d$

Im Fall (1) lässt sich x mittels Strahlensatz konstruieren und berechnen, im Fall (2) mittels Pythagoräischem Lehrsatz, genauer: Höhensatz (x^2=ad).

Nun drängt sich schon die erste Frage auf, nämlich wieso Simone Weil schreibt, der Satz von Pythagoras (Höhensatz) hätte den Griechen ermöglicht, die zweite Gleichung numerisch zu behandeln kann, wenn doch offensichtlich $a : x = x : d$ äquivalent ist mit x^2=ad und man somit ganz ohne Pythagoräischen Lehrsatz eine numerische Lösung des Problems kennt. Welche Kenntnis bzw. welche Fähigkeit hat ihnen gefehlt?

Sie konnten Proportionen *nicht umformen*, sie hatten *keine Algebra*. Sie haben durch geometrische Überlegungen erkannt, daß die Aufgabe gemäß der linken Skizze x zu bestimmen äquivalent ist damit, gemäß der rechten Skizze jenes x zu bestimmen, für das α und β zusammen 90° ergeben.





Und für diese Problemstellung verfügten sie über eine numerische Lösung, nämlich eben jene, die durch $x^2=ad$ (Höhensatz) gegeben ist. (Dass Simone Weil selbst an eine Überlegung dieser Art gedacht hat, kann man nicht dem Aufsatz entnehmen, sondern einem Brief an ihren Bruder André, der in *Sur la Science*, S.213-221 (siehe insbesondere S.214) abgedruckt ist.)

Hier haben wir es nun gleich mit einer Diskrepanz zwischen Weil und der üblichen Geschichtsinterpretation zu tun, die an der Basis von Simone Weils philosophischen Überzeugungen liegt. Es geht um die Frage: *Warum* hatten die Griechen keine Algebra?

Die kanonische Meinung dazu lautet: Sie hatten eine Proportionenlehre stattdessen, daher ist die Algebra mangels Bedarfs einfach nicht entstanden.

Simone Weil sagt (*Sur la Science*, S.213ff): Das ist Unsinn. Da schon die Babylonier Algebra entwickelt hatten und der geistig-kulturelle Austausch damals sehr rege war, ist es ganz unsinnig anzunehmen, den Griechen hätten die Voraussetzungen oder Motive zur Ausbildung einer Algebra gefehlt. Der wahre Grund liegt darin, dass es ihnen verboten war, und zwar aufgrund philosophisch-religiöser Überzeugungen. Die Griechen haben sich, so Weil, nur mit Problemen beschäftigt, die ihnen die Welt unmittelbar aufgetragen hat. Das ist nicht so misszuverstehen, dass sie die Welt auf physikalische Phänomene reduziert hätten, im Gegenteil, die Möglichkeiten dazu schreibt Weil erst der modernen Infinitesimalrechnung zu, sondern die Welt gibt quasi direkt mathematische Aufgaben auf, Harmonieverhältnisse in der Musik, in der Astronomie, zwischen dem Geraden und dem Ungeraden etc. Algebra aber ist gerade der Inbegriff der Loslösung vom Konkreten, die Hinwendung zum Abstrakten.

Wenn Weil recht hat, ist Philosophie für das Betreiben von Mathematikgeschichte relevant, aber auch für die Entwicklung der Mathematik selbst. Hätten nämlich die Pythagoräer eine andere philosophische Grundüberzeugung gehabt, hätten sie und nicht erst die Renaissance-Mathematiker die Algebra entwickelt.

Der Korrektheit wegen sei noch angemerkt, dass Weil konstatiert, die Griechen hätten zwar Variablen, aber keine Gleichungen. Wenn man sagt, sie hatten keine Algebra, dann heißt das nicht, dass sie nicht Buchstaben als Stellvertreter (übrigens nicht nur für Zahlen, sondern auch für Sätze z.B.) gehabt hätten, sondern nur, dass sie nicht Gleichungen gebildet und umgeformt haben. (*Sur la Science*, S.264)

➢ Die Entdeckung der Inkommensurablen schien die Grundlagen der Geometrie zu zerstören.

Zwei Strecken(längen) x und y heißen *inkommensurabel*, wenn sie kein gemeinsames Maß haben, d.h. wenn es keine natürlichen Zahlen m und n gibt, sodass x : y = m: n ist. (wenn es keine Strecke gibt, sodass x und y ganzzahlige Vielfache davon sind). Irrationalzahlen sind also inkommensurabel mit 1, mit der Einheit. Eine Geometrie aber, in der es Längen gibt (wie die Quadratdiagonlae), die nicht messbar, d.h. nicht Vielfache einer Einheit sind, ist natürlich problematisch.

Wieso konnten aber die Grundlagen der Geometrie überhaupt entwickelt werden, ohne dass das Problem der Inkommensurablen bemerkt wurde, sodass die Grundlagen zerstört worden wären, bevor überhaupt etwas vorhanden war, was in eine Krise geraten konnte? Wenn man es erst einmal mit dem Höhensatz vertraut ist und hantiert, dann hat man es doch unweigerlich schon mit $\sqrt{2}$ zu tun, welcher gute Geist sollte einen daran hindern, für a und d (siehe oben) jeweils 1 zu wählen?

Wann hat Columbus Amerika entdeckt? Als er in Amerika landete, oder als er feststellte, dass es nicht Indien ist? Dazu analog sind die Fragen: Wann hat man die Inkommensurablen entdeckt? Wenn man auf $\sqrt{2}$ gestoßen ist oder wenn man entdeckt hat, dass es keine rationale Zahl ist?

Man kann mit der Zahl $\sqrt{2}$ erstaunlich viel anfangen, ohne zu bemerken, dass sie inkommensurabel mit 1 ist. Insbesondere kann man sie etwa beliebig weit entwickeln ohne einen Unterschied zu einer rationalen Zahl festzustellen (rationale Zahlen können ja nicht-abbrechende Entwicklungen haben und sogar beliebig lange Perioden haben). Die Griechen konnten daher eine Weile mit der Länge der Diagonalen des Einheitsquadrats, mit der Proportion 1:x=x:2, etc umgehen, ohne das Problem zu bemerken.

Hier sind wir wieder an einem neuralgischen Punkt, denn auch hier weicht Simone Weil von der üblichen Geschichtsschreibung oder besser -interpretation (die Quellenlage nämlich ist unzureichend) ab. Zwar sind sich Weil und die Mathematikhistoriker einig, dass die Inkommensurablen in gewisser Hinsicht geometrisch entdeckt wurden; während aber nach der üblichen Vermutung das erste Bemerken der Irrationalität bzw. Inkommensurabilität im Verfahren der Wechselwegnahme besteht, siedelt Weil die Entdeckung im Bereich zahlentheoretischer Überlegungen an, die lediglich ihren Ursprung in geometrischen Fragestellungen haben. Ein Argument für die übliche Sichtweise besteht darin, dass Irrationalitätsbeweise zuerst für verschiedene Brüche jeweils einzeln geführt wurden; hätte man die Irrationalität auf arithmetischem Weg entdeckt, so hätte man wohl sogleich ein allgemeines Verfahren erkennen müssen.

Simone Weil entkräftet dieses Argument nicht, sondern führt starke Argumente für ihre Auffassung an: Die Suche nach der mittleren Proportionalen (dem geometrischen Mittel) war ein zentrales Anliegen für die Griechen, das religiös, philosophisch, mathematisch, astronomisch interessant für sie war. Ebenso interessant war ein anderer Themenkomplex, nämlich das Gerade und das Ungerade. Und da entdeckt man, so Weil, sehr natürlich die Inkommensurabilität. Eine (durchgekürzte) rationale Zahl x mit 1:x=x:2 zu suchen ist gleichbedeutend damit, eine ganze Zahl y mit m : y = y : (2m) zu suchen, wobei man y und m teilerfremd wählen kann. Dann sieht man aber unmittelbar, dass y gleichzeitig gerade und ungerade sein muss, also nicht existiert. (*Sur la Science*, S.228)

Eine weitere Uneinigkeit zwischen der herkömmlichen Geschichtsschreibung und der Auffassung von Simone Weil in diesem Zusammenhang besteht darin, was die Krise ausmacht, die den Untergang der Pythagoräer bewirkt hat. Die übliche Geschichtsschreibung sagt: Die Entdeckung der Inkommensurablen, dass doch nicht „alles Zahl ist", wie sie behauptet hatten.

Simone Weil meint ganz schlicht: Die Pythagoräer sind untergegangen, weil sie erschlagen worden sind, und das war deswegen, weil für die *Uneingeweihten*, nicht für die Pythagoräer, die Kenntnis der Inkommensurablen eine Überforderung war. (*Sur la Science*, S.224) Die Pythagoräer selbst haben nach Ansicht von Simone Weil von der Existenz der Irrationalzahlen nicht nur längst gewusst, sie müssen diese Zahlen sogar begeistert aufgenommen haben, haben sie doch ihre Meinung, dass alles Zahl sei, zumindest richtiger gemacht. Weil kommentiert: Zu sagen, alles sei Zahl, ist doch eine Dummheit, weil offenbar nicht alles Zahl ist; wenn die Griechen etwas entdeckt haben, das doch irgendwie Zahl ist, müssen sie sich doch gefreut haben! (*Sur la Science*, S.246) Sie weist darauf hin, dass diese Reaktion auch jene der SchülerInnen ist: Auch diese glauben, eine *Lösung* und nicht ein *Problem* gefunden zu haben, wenn sie eine Wurzel als Lösung einer quadratischen Gleichung angeben. (*Sur la Science*, S.225)

- Eudoxos hat auf einer höheren Ebene durch seine Theorie der Proportionen das Fundament wiederhergestellt

Eudoxos' Theorie wird wiedergegeben in Euklid, Elemente V, Def. 5 (Becker 1975, S.84):

„Größen stehen in demselben Verhältnis, die erste zur zweiten und die dritte zur vierten, wenn die gleichen Vielfachen der ersten und dritten und die gleichen Vielfachen der zweiten und vierten – bei jeder beliebigen Vervielfachung – einander entweder zugleich übertreffen oder gleichkommen oder unterschreiten, in entsprechender Ordnung genommen."

In heutiger Darstellung:
Die Proportion a:b=c:d besteht dann und nur dann, wenn für alle Zahlen m, n

$ma>nb$ und $mc>nd$ oder
$ma=nb$ und $mc=nd$ oder
$ma<nb$ und $mc<nd$ gilt.

Auf diese Weise konnte man in der Proportionenlehre nun auch Irrationalzahlen behandeln.

Man erkennt darin unschwer das die Dedekindschen Schnitte bzw. das Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen, wie wir es heute gewohnt sind.

- ...und durch seine Exhaustionsmethode (dem ersten Entwurf der Infinitesimalrechnung)"