Esther Ramharter

Mathematik – Revolution oder Reaktion? *Simone Weil und René Descartes*

1) Simone Weil

1.a) Wer war Simone Weil?

Simone Weil war eine große Philosophin, eine begeisterte Mathematikerin, die Schwester eines großen Mathematikers und – man kann meinen – eine Verrückte. Simone Weil hat von 1909 bis 1943 gelebt, also in einer nicht eben ruhigen Phase der Geschichte, und wo das Leben vielleicht zu ruhig gewesen wäre, hat sie es sich nach Kräften selbst unruhig gestaltet. Sie arbeitet freiwillig in einer Fabrik, um das Leben der Arbeiter kennenzulernen, sie geht 1932 nach Deutschland, um sich ein eigenes Bild der Ereignisse dort zu machen. 1936 reist sie nach Spanien, um sich am Bürgerkrieg zu beteiligen. Sie hat sich – u.a. aus religiösen Motiven, sie ringt sehr mit dem Christentum – zu Tode gehungert. (Es scheint mir eine Bemerkung wert, dass man als unterschiedlich verrückt gilt, je nachdem, wofür man sich zu Tode hungert.) André Weil, ihr Bruder, hat gesagt, ihre extreme Lebensart sei ihm immer fremd gewesen, erst nach ihrem Tod habe er verstanden, dass man an sie ganz eigene Maßstäbe anlegen muss.

Zum „normalen Teil“ ihres Lebens zählt man wohl, dass sie Philosophie studiert und unterrichtet hat (aufgrund ihres politischen Engagements hatte sie allerdings auch dabei viele Schwierigkeiten und wurde mehrfach verwarnt und sogar versetzt). In ihrem Unterricht hat sie auf die Mathematik immer wieder Bezug genommen, weil sie der Zusammenhang zwischen Wissenschaft und Leben bzw. Philosophie interessiert hat (was ja auch ein Punkt des derzeitigen Philosophielehrplans ist) – ein Beispiel ihres Unterrichts werden wir im Folgenden kennenlernen.

Sie war also eine politische Revolutionärin und – wie wir sehen werden – sie war auch in ihrem Umgang mit Wissenschaft insbesondere der Mathematik in gewisser Weise umstürzlerisch.

1.b) Der Aufsatz „L'Enseignement des mathématiques“ („Der Mathematikunterricht“)

Es handelt sich bei diesem Aufsatz[1] um ein Fragment, an dem man 4 Abschnitte ausmachen kann:

1.) DER PHILOSOPHISCH-POLITISCHE TEIL
2.) DAS UNTERRICHTSEXPERIMENT
3.) DAS PROGRAMM
4.) DER UNGESCHRIEBENE TEIL

[1] *Sur la science*, S.105-109; englische Übersetzung: *On Science, Necessity and the Love of God*, S.71-74

1.) DER PHILOSOPHISCH-POLITISCHE TEIL

Selbst Denker, die ihr philosophisch sehr nahe stehen, vertreten in Bezug auf die Mathematik eine gewisse Auffassung, die sie für verkehrt hält – so beginnt Simone Weil ihren Aufsatz. (Sie distanziert sich auch von „den Ihren“, das ist ein vielfach zu beobachtendes Phänomen bei ihr.) Diese Auffassung, der u.a. Henri Poincaré anhängt, besteht darin, dass Mathematik eine revolutionäre Kraft dadurch erlange, dass sie als die Sprache der Physik verstanden wird. Weil weist nicht zurück, dass die Mathematik ein revolutionäres Potential habe, sondern nur, dass dieses darin bestünde, sie als Werkzeug der Physik auszuhändigen. Auch wenn man Marx recht gibt, dass die Trennung von manueller und intellektueller Arbeit ein Verhängnis ist, bedeutet das nicht, dass man auch die Grenze zwischen Theorie und Praxis aufheben muss. Eine Synthese setzt voraus, dass zuerst Getrenntes ist. Mathematik hat ihre eigene Geistesgeschichte, und wenn man sich ansieht, wie sie entstanden ist, dann erkennt man das auch. Die Wissenschaft wurde geboren in dem Moment, in dem es das erste Mal zweckfreie Forschung („disinterested research“) gegeben hat. Unsere ganze Kultur, der Marxismus inklusive, beruht auf einem Wunder(!) – dem Wunder von Griechenland. Marx’ Studien über die Gesellschaft ähneln der Wissenschaftsauffassung von Descartes eher als jener von Poincaré – so Weil.

2.) DAS UNTERRICHTSEXPERIMENT

Weil beschreibt eine Unterrichtssequenz, die sie selbst, wie sie behauptet, mit großem Erfolg abgehalten hat. Im folgenden werden die Stichworte wiedergegeben, die sie zur Angabe der Stationen ihres Experiments nennt. Es handelt sich dabei um eine Rekonstruktion der Geschichte der Infinitesimalrechnung in einem weiten Sinn. Die einzelnen Stationen stimmen mit der üblichen Geschichtsschreibung überein, unorthodox aber sind die Zusammenhänge, die sie herstellt, und ihre Begründungen.

- Längenmessung
- [...] der Satz über ähnliche Dreiecke, den die Legende Thales zuschreibt; die Kombination dieses Satzes mit dem von Pythagoras, der direkt aus ihm folgt, erlaubt es, alle Verhältnisse auf Geraden als numerische Verhältnisse zu behandeln

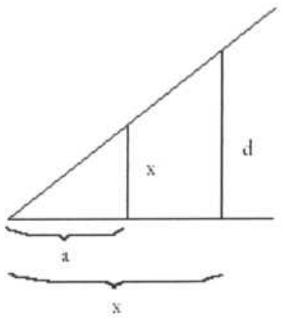
In der griechischen Mathematik wurden Längenverhältnisse der Form $a:b=c:d$ studiert, wobei gewisse dieser Größen gegeben sind, eine davon (x) gesucht ist. Es treten folgende Fälle auf (alle anderen lassen sich auf diese zurückführen):

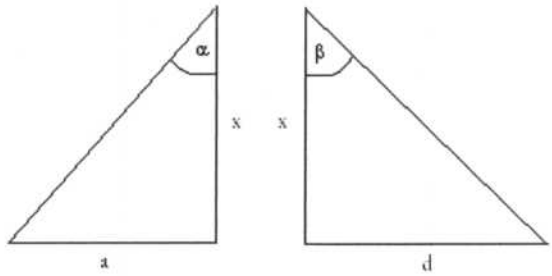
(1) $a : b = c : x$ (2) $a : x = x : d$

Im Fall (1) lässt sich x mittels Strahlensatz konstruieren und berechnen, im Fall (2) mittels Pythagoräischem Lehrsatz, genauer: Höhensatz ($x^2=ad$).

Nun drängt sich schon die erste Frage auf, nämlich wieso Simone Weil schreibt, der Satz von Pythagoras (Höhensatz) hätte den Griechen ermöglicht, die zweite Gleichung numerisch zu behandeln kann, wenn doch offensichtlich $a : x = x : d$ äquivalent ist mit $x^2=ad$ und man somit ganz ohne Pythagoräischen Lehrsatz eine numerische Lösung des Problems kennt. Welche Kenntnis bzw. welche Fähigkeit hat ihnen gefehlt?

Sie konnten Proportionen *nicht umformen*, sie hatten *keine Algebra.* Sie haben durch geometrische Überlegungen erkannt, daß die Aufgabe gemäß der linken Skizze x zu bestimmen äquivalent ist damit, gemäß der rechten Skizze jenes x zu bestimmen, für das α und β zusammen 90° ergeben.





Und für diese Problemstellung verfügten sie über eine numerische Lösung, nämlich eben jene, die durch x^2=ad (Höhensatz) gegeben ist. (Dass Simone Weil selbst an eine Überlegung dieser Art gedacht hat, kann man nicht dem Aufsatz entnehmen, sondern einem Brief an ihren Bruder André, der in *Sur la Science*, S.213-221 (siehe insbesondere S.214) abgedruckt ist.)

Hier haben wir es nun gleich mit einer Diskrepanz zwischen Weil und der üblichen Geschichtsinterpretation zu tun, die an der Basis von Simone Weils philosophischen Überzeugungen liegt. Es geht um die Frage: *Warum* hatten die Griechen keine Algebra?

Die kanonische Meinung dazu lautet: Sie hatten eine Proportionenlehre stattdessen, daher ist die Algebra mangels Bedarfs einfach nicht entstanden.

Simone Weil sagt (*Sur la Science*, S.213ff): Das ist Unsinn. Da schon die Babylonier Algebra entwickelt hatten und der geistig-kulturelle Austausch damals sehr rege war, ist es ganz unsinnig anzunehmen, den Griechen hätten die Voraussetzungen oder Motive zur Ausbildung einer Algebra gefehlt. Der wahre Grund liegt darin, dass es ihnen verboten war, und zwar aufgrund philosophisch-religiöser Überzeugungen. Die Griechen haben sich, so Weil, nur mit Problemen beschäftigt, die ihnen die Welt unmittelbar aufgetragen hat. Das ist nicht so misszuverstehen, dass sie die Welt auf physikalische Phänomene reduziert hätten, im Gegenteil, die Möglichkeiten dazu schreibt Weil erst der modernen Infinitesimalrechnung zu, sondern die Welt gibt quasi direkt mathematische Aufgaben auf, Harmonieverhältnisse in der Musik, in der Astronomie, zwischen dem Geraden und dem Ungeraden etc. Algebra aber ist gerade der Inbegriff der Loslösung vom Konkreten, die Hinwendung zum Abstrakten.

Wenn Weil recht hat, ist Philosophie für das Betreiben von Mathematikgeschichte relevant, aber auch für die Entwicklung der Mathematik selbst. Hätten nämlich die Pythagoräer eine andere philosophische Grundüberzeugung gehabt, hätten sie und nicht erst die Renaissance-Mathematiker die Algebra entwickelt.

Der Korrektheit wegen sei noch angemerkt, dass Weil konstatiert, die Griechen hätten zwar Variablen, aber keine Gleichungen. Wenn man sagt, sie hatten keine Algebra, dann heißt das nicht, dass sie nicht Buchstaben als Stellvertreter (übrigens nicht nur für Zahlen, sondern auch für Sätze z.B.) gehabt hätten, sondern nur, dass sie nicht Gleichungen gebildet und umgeformt haben. (*Sur la Science*, S.264)

➢ Die Entdeckung der Inkommensurablen schien die Grundlagen der Geometrie zu zerstören.

Zwei Strecken(längen) x und y heißen *inkommensurabel*, wenn sie kein gemeinsames Maß haben, d.h. wenn es keine natürlichen Zahlen m und n gibt, sodass x : y = m: n ist. (wenn es keine Strecke gibt, sodass x und y ganzzahlige Vielfache davon sind). Irrationalzahlen sind also inkommensurabel mit 1, mit der Einheit. Eine Geometrie aber, in der es Längen gibt (wie die Quadratdiagonlae), die nicht messbar, d.h. nicht Vielfache einer Einheit sind, ist natürlich problematisch.

Wieso konnten aber die Grundlagen der Geometrie überhaupt entwickelt werden, ohne dass das Problem der Inkommensurablen bemerkt wurde, sodass die Grundlagen zerstört worden wären, bevor überhaupt etwas vorhanden war, was in eine Krise geraten konnte? Wenn man es erst einmal mit dem Höhensatz vertraut ist und hantiert, dann hat man es doch unweigerlich schon mit $\sqrt{2}$ zu tun, welcher gute Geist sollte einen daran hindern, für a und d (siehe oben) jeweils 1 zu wählen?

Wann hat Columbus Amerika entdeckt? Als er in Amerika landete, oder als er feststellte, dass es nicht Indien ist? Dazu analog sind die Fragen: Wann hat man die Inkommensurablen entdeckt? Wenn man auf $\sqrt{2}$ gestoßen ist oder wenn man entdeckt hat, dass es keine rationale Zahl ist?

Man kann mit der Zahl $\sqrt{2}$ erstaunlich viel anfangen, ohne zu bemerken, dass sie inkommensurabel mit 1 ist. Insbesondere kann man sie etwa beliebig weit entwickeln ohne einen Unterschied zu einer rationalen Zahl festzustellen (rationale Zahlen können ja nicht-abbrechende Entwicklungen haben und sogar beliebig lange Perioden haben). Die Griechen konnten daher eine Weile mit der Länge der Diagonalen des Einheitsquadrats, mit der Proportion 1:x=x:2, etc umgehen, ohne das Problem zu bemerken.

Hier sind wir wieder an einem neuralgischen Punkt, denn auch hier weicht Simone Weil von der üblichen Geschichtsschreibung oder besser -interpretation (die Quellenlage nämlich ist unzureichend) ab. Zwar sind sich Weil und die Mathematikhistoriker einig, dass die Inkommensurablen in gewisser Hinsicht geometrisch entdeckt wurden; während aber nach der üblichen Vermutung das erste Bemerken der Irrationalität bzw. Inkommensurabilität im Verfahren der Wechselwegnahme besteht, siedelt Weil die Entdeckung im Bereich zahlentheoretischer Überlegungen an, die lediglich ihren Ursprung in geometrischen Fragestellungen haben. Ein Argument für die übliche Sichtweise besteht darin, dass Irrationalitätsbeweise zuerst für verschiedene Brüche jeweils einzeln geführt wurden; hätte man die Irrationalität auf arithmetischem Weg entdeckt, so hätte man wohl sogleich ein allgemeines Verfahren erkennen müssen.

Simone Weil entkräftet dieses Argument nicht, sondern führt starke Argumente für ihre Auffassung an: Die Suche nach der mittleren Proportionalen (dem geometrischen Mittel) war ein zentrales Anliegen für die Griechen, das religiös, philosophisch, mathematisch, astronomisch interessant für sie war. Ebenso interessant war ein anderer Themenkomplex, nämlich das Gerade und das Ungerade. Und da entdeckt man, so Weil, sehr natürlich die Inkommensurabilität. Eine (durchgekürzte) rationale Zahl x mit 1:x=x:2 zu suchen ist gleichbedeutend damit, eine ganze Zahl y mit m : y = y : (2m) zu suchen, wobei man y und m teilerfremd wählen kann. Dann sieht man aber unmittelbar, dass y gleichzeitig gerade und ungerade sein muss, also nicht existiert. (*Sur la Science*, S.228)

Eine weitere Uneinigkeit zwischen der herkömmlichen Geschichtsschreibung und der Auffassung von Simone Weil in diesem Zusammenhang besteht darin, was die Krise ausmacht, die den Untergang der Pythagoräer bewirkt hat. Die übliche Geschichtsschreibung sagt: Die Entdeckung der Inkommensurablen, dass doch nicht „alles Zahl ist", wie sie behauptet hatten.

Simone Weil meint ganz schlicht: Die Pythagoräer sind untergegangen, weil sie erschlagen worden sind, und das war deswegen, weil für die *Uneingeweihten*, nicht für die Pythagoräer, die Kenntnis der Inkommensurablen eine Überforderung war. (*Sur la Science*, S.224) Die Pythagoräer selbst haben nach Ansicht von Simone Weil von der Existenz der Irrationalzahlen nicht nur längst gewusst, sie müssen diese Zahlen sogar begeistert aufgenommen haben, haben sie doch ihre Meinung, dass alles Zahl sei, zumindest richtiger gemacht. Weil kommentiert: Zu sagen, alles sei Zahl, ist doch eine Dummheit, weil offenbar nicht alles Zahl ist; wenn die Griechen etwas entdeckt haben, das doch irgendwie Zahl ist, müssen sie sich doch gefreut haben! (*Sur la Science*, S.246) Sie weist darauf hin, dass diese Reaktion auch jene der SchülerInnen ist: Auch diese glauben, eine *Lösung* und nicht ein *Problem* gefunden zu haben, wenn sie eine Wurzel als Lösung einer quadratischen Gleichung angeben. (*Sur la Science*, S.225)

- Eudoxos hat auf einer höheren Ebene durch seine Theorie der Proportionen das Fundament wiederhergestellt

Eudoxos' Theorie wird wiedergegeben in Euklid, Elemente V, Def. 5 (Becker 1975, S.84):

„Größen stehen in demselben Verhältnis, die erste zur zweiten und die dritte zur vierten, wenn die gleichen Vielfachen der ersten und dritten und die gleichen Vielfachen der zweiten und vierten – bei jeder beliebigen Vervielfachung – einander entweder zugleich übertreffen oder gleichkommen oder unterschreiten, in entsprechender Ordnung genommen."

In heutiger Darstellung:
Die Proportion a:b=c:d besteht dann und nur dann, wenn für alle Zahlen m, n
ma>nb und mc>nd oder
ma=nb und mc=nd oder
ma<nb und mc<nd gilt.

Auf diese Weise konnte man in der Proportionenlehre nun auch Irrationalzahlen behandeln.

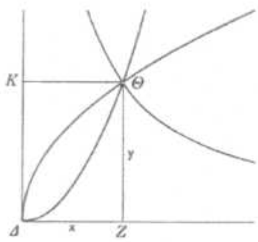
Man erkennt darin unschwer das die Dedekindschen Schnitte bzw. das Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen, wie wir es heute gewohnt sind.

- ...und durch seine Exhaustionsmethode (dem ersten Entwurf der Infinitesimalrechnung)"

Eudoxos approximiert Kreise durch Polygone.

Auf den Beitrag zur Integralrechnung werden wir noch zurückkommen, wundern kann man sich allerdings, was die Exhaustionsmethode mit der Wiederherstellung der Grundlagen der Geomterie und der Proportionenlehre zu tun haben soll. Die Proportionenlehre war wesentlich geometrisch ausgerichtet, nun war man aber mit Größen (zB Kreisumfang, -fläche) konfrontiert, die man mit (rationalen) Zahlen *nicht* in Relation setzen konnte. Das musste für die an konkreten geometrischen Aufgabenstellungen orientierten Griechen ein Problem darstellen, gegen das eben die Proportionenlehre von Eudoxos Abhilfe geschaffen hat.

- Menaechmus, der die Kegelschnitte und Formeln für sie entdeckt und damit die Möglichkeit eröffnet, Kurven durch Bezug auf Geraden zu definieren



Die Aufgabe, für die diese Zeichnung die Lösung präsentiert, besteht darin, zwei mittlere Proportionale x und y zwischen a und b zu ermitteln, d.h. x und y zu finden, sodass a:x=x:y=y:b gilt (das ist äquivalent zur Würfelverdopplung). Die Lösung findet man als Schnitt der Parabel x^2=ay und der Hyperbel xy=ab. (Van der Warden 1966, S.267)

- Archimedes und Apollonius machen nicht viel mehr als diese Ideen ein bisschen weiterentwickeln, das Entscheidende fehlt ihnen: die Algebra

Unabhängig davon, ob Weil recht hat, kann man jedenfalls sagen, sie rückt an der Geschichte herum – Archimedes und Apollonius gelten als *die* Riesen der griechischen Mathematik – und sich nach den Gründen oder Motiven dafür fragen. Es scheidet aus, dass sie Archimedes nicht gekannt hätte, in ihren Tagebüchern findet genaue Studien seiner Arbeit. Die Ursache liegt auf einer anderen Ebene: Es geht ihr nicht um Größen, sondern um Geistesgeschichte, sie ist an den Phänomenen orientiert.

- Bei Diophant gibt es erste Ansätze zur Algebra, aber erst seit der Renaissance gibt es eine Algebra im engeren Sinn

Bei Diophant findet man Aufgaben folgender Art: Zwei Zahlen zu finden, sodass ihre Summe und die Summe ihrer Quadrate gegebene Zahlen sind.

Als wirklicher Begründer der Algebra in einem systematischen Sinn gilt Vieta.

- Descartes entwickelt die Ideen von Menaechmus und Apollonius weiter

Auf Descartes komme ich im zweiten Teil ausführlich zu sprechen.

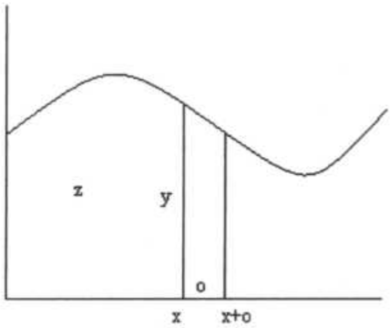
- Leibniz, Newton und Lagrange tun dasselbe für die Entdeckungen von Eudoxus, die Infinitesimalrechnung

Newton entwickelt 1669 (publ. 1711) in *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* eine Differential- und Intregralrechnung unter dem Namen „Fluxionsmethode“.

Gegeben sei eine Gleichung in x, y,... Die Größen x,y,... heißen Fluenten (sich verändernde Größen; für die Differentialrechnung benötigt Newton weiters sogenannte Fluxionen, daher der Name der Methode). o bezeichne eine unendlich kleine Größe. (oy ist dann ein Flächenmoment.)

Betrachten wir beispielsweise die Funktion $z=ax^m$ (Newton lässt ganz oder rational zu, wir beschränken uns hier auf m ganz) und untersuchen:

$$z+oy = a(x+o)^m$$



Man berechnet:

$$z+oy = a(x+o)^m = a\,(\binom{m}{0}x^m + \binom{m}{1}x^{m-1}o + \binom{m}{2}x^{m-2}o^2 + \ldots + \binom{m}{m}o^m)$$

$$(z+oy) - z = a\,(\binom{m}{0}x^m + \binom{m}{1}x^{m-1}o + \binom{m}{2}x^{m-2}o^2 + \ldots + \binom{m}{m}o^m - x^m)$$

$$\frac{(z+oy)-z}{o} = a\,(\binom{m}{1}x^{m-1} + \binom{m}{2}x^{m-2}o + \ldots + \binom{m}{m}o^{m-1})$$

Nun vernachlässigt man die Terme, in denen o vorkommt, und erhält:

$$y = a\,m\,x^{m-1}$$

Wenn die Kurve also $y = amx^{m-1}$ lautet, ist der Flächeninhalt unterhalb gleich $z=ax^m$

Dieser Zugang hat von allem Anfang den Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration implementiert. Er geht von der Vorstellung einer Flächen*veränderung* aus.

Bei Leibniz findet man das erste Mal die uns vertraute Vorstellung der Annäherung durch Rechtecke.

(Ein über Weil hinausgehender Kommentar von mir: In all dem erkennt man bereits eindeutig die Anfänge der modernen Integralrechnung (die nach Weil die Grundbedingung dafür war, dass die Mathematik auf die Physik angewendet werden konnte, siehe *Sur la Science*, S.104). Wie verhält es sich aber mit Eudoxos, kann man das tatsächlich schon als Vorläufer der Integralrechnung ansehen? Wäre das nicht so, als ob man sagte, die erste Berechnung eines Flächeninhalts eines Rechtecks wäre der Ursprung der Integralrechnung?

Für SchülerInnen heute ist Intergralrechnung: $\int \cos x = \sin x$, Substitutionsregel, bestenfalls Approximation durch Rechtecke; und tatsächlich hätte sich die Integralrechnung sicher nicht entwickeln können, wenn die Reihen nicht berechenbar wären, der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nicht gelten würde, etc. Dennoch: Das das Integral ist (in passenden

Räumen) das bis auf eine multiplikative Konstante eindeutige, stetige/beschränkte, translationsinvariante, positive, lineare Funktional. Und das heißt doch, dass man nichts anderes braucht, um das Integral zu identifizieren als das, was bereits in der Antike bereitgestellt war: Linear zusammensetzbare Approximationsfiguren und einen Grenzübergang.)

3.) DAS PROGRAMM

(1) Die Präsentation jeder Wissenschaft zumindest teilweise vom historischen Standpunkt aus (Lesen von Originaltexten)
(2) Ein historisch orientierter Zugang zum Verhältnis zwischen Wissenschaft und Technik
(3) Würdigung und Praktizieren von produktiven Techniken, kombiniert mit einem detaillierten Studium der Geschichte dieser Technik

Weils Unterrichtsexperiment stellt ein Beispiel für dieses Programm dar. Die Integralrechnung wird als etwas präsentiert, was nicht allein aus dem Bedürfnis nach Flächenberechnungen für sich genommen entsteht, sondern aus dem Kontext der Proportionenlehre erwächst.

4.) DER UNGESCHRIEBENE TEIL

Wie diese Auffassung und das Programm mit den politischen Aussagen von Teil 1.) zusammenhängt, wird noch erläutert werden. Feststeht, dass dieser Teil erst geschrieben werden müsste. Das bietet meines Erachtens einen reizvollen Ansatzpunkt für einen geistes- bzw. kulturwissenschaftlichen Umgang mit Mathematik im Unterricht, genau wie er auch Weil selbst mit ihrem Programm vorschwebt: SchülerInnen könnten versuchen, den Aufsatz zu beenden.[2]

1.c) Simone Weils „Revolutionen"

Ganz sicher ist Simone Weil eine politische Revolutionärin. Die Revolution, die sie sich *für die Mathematik* vorstellt, ist eigentlich besser eine Renaissance zu nennen. Sie möchte ein anderes Verständnis der Ideengeschichte (der Mathematik und Physik) insbesondere. Die Mathematik, wie sie ihr vorschwebt, operiert mit Begriffen, die auch im Leben verankert sind. An der Stelle, an der das Unterrichtsexperiment endet, ist das für Weil Entscheidende schon vorbei: der Durchbruch der Algebra ist schon erfolgt. Weil nimmt Anstoß an der Loslösung von den konkreten Problemen und meint sich dabei mit den Griechen in guter Gesellschaft. Sie wendet sich gegen die Abtrennung wissenschaftlicher Begriffe von der alltäglichen Praxis oder die Einengung der Praxis, die als paradigmatisch angesehen wird. Daher hat sie gegen die Algebra ebenso Vorbehalte wie gegen die „klassische" Physik zwischen der Renaissance und 1900, weil diese Sklavenarbeit als Paradigma ihres Begriffs von Arbeit und ihrer Weltsicht überhaupt nimmt.

Man kann irritiert sein, wieso sich Weil eingangs gegen die Bindung der Mathematik an die Physik ausspricht, wenn ihr die Bindung an die Praxis so wichtig ist. Sie möchte die Mathematik schon an die Probleme der Welt gekoppelt sehen, aber nicht eingeschränkt auf die Physik.

[2] Eventuell kann man dabei die Überlegung anregen, wie Weil zu neueren Entwicklungen wie der Charakterisierung des Integrals als ein gewisses lineares Funktional stehen würde.

2) René Descartes

2.a) Wer war René Descartes?

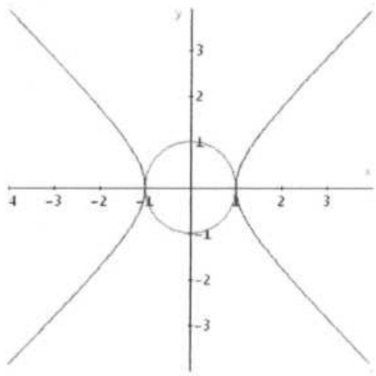
Diese Frage klingt wie jene nach Simone Weil in 1.a), ist aber eigentlich eine ganz andere. Nicht nur, weil eine Antwort für viele vermutlich entbehrlich ist, weil sie wissen, dass Descartes ein Philosoph des beginnenden 17. Jahrhunderts war, das Cogito gedacht hat und als der Erfinder der analytischen Geometrie gilt. Die Frage, wer Descartes war, ist mit einer Antwort in der Art von jener auf 1.a) gleichzeitig zu viel und zu wenig beantwortet: Zu viel, weil Descartes als Person zurück tritt hinter seine Wirkungen; es ist für die Kenntnis der Geistesgeschichte der Menschen wichtiger, um seine Arbeit zu wissen als um sein Liebesleben oder seine persönliche Religiosität (die etwa für das Verständnis des „Phänomens" Simone Weil eine große Rolle spielt). Zu wenig, weil Descartes aber dennoch selbst in gewisser Weise eine viel substantiellere Funktion in seiner Philosophie hat als Simone Weil in ihrer.[3] Darauf werden wir noch zurückkommen.

2.b) Descartes' Geometrie

Beginnen wir mit drei Aufgaben, Spezialfällen des sogenannten Pappus-Problems:

1) Gegeben seien die Geraden g: $y = 0$, h: $x = -1$, i: $x = 1$.
Gesucht sind jene Punkte, für die das Produkt der (Normal-)Abstände von h und i gleich dem Quadrat des Abstands von g ist.

Lösung:



1. Fall: $-1 \leq x \leq 1$
$(x + 1)(1 - x) = y^2$
$x^2 + y^2 = 1$

2.Fall: $x \leq -1$ oder $x \geq 1$
$(x - 1)(x + 1) = y^2$
$x^2 - y^2 = 1$

2) Gegeben seien die Geraden g: $y = 0$ (oder $=c$), h: $y = -x$, i: $y = x$.
Gesucht sind jene Punkte, für die das Produkt der (Normal-)Abstände von h und i gleich dem Quadrat des Abstands von g ist.

3) Gegeben seien die Geraden g: $x = 0$, h: $y = -1$, i: $y = -kx + d$
Gesucht sind jene Punkte, für die das Produkt der (Normal-)Abstände von h und i gleich dem Quadrat des Abstands von g ist.

---

[3] Diese wie auch viele andere Überlegungen verdanke ich der Descartes-Vorlesung von Richard Heinrich.

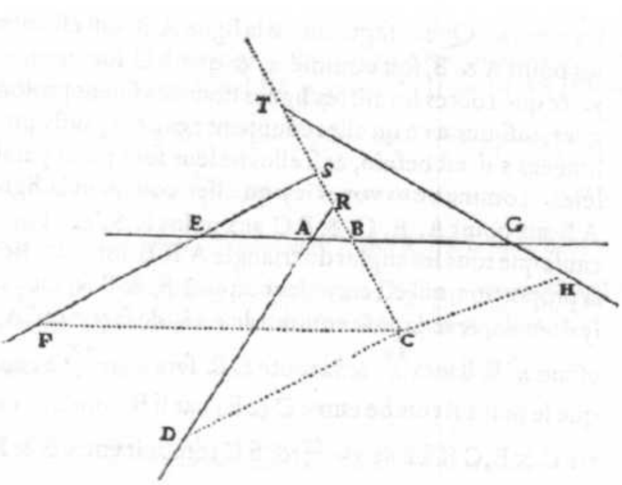
Diese Aufgaben erwecken vielleicht den Anschein, besonders wenig lebenspraktisch zu sein, gekünstelt, typisch nur dazu da, um SchülerInnen Mathematikaufgaben stellen zu können, und doch waren es genau diese Aufgaben, die als der Ursprung der analytischen Geometrie und der analytischen Behandlung von Kurven angesehen werden. Descartes hatte dabei allerdings eine Reihe von Vorläufern. (Er hat *nicht* (allein) das Koordinatensystem erfunden.)

Das allgemeine Problem von Pappus ist eine Verallgemeinerung der Aufgabe, alle Punkte zu finden, die von zwei schneidenden Geraden gleich weit entfernt sind, und lautet folgendermaßen:

Gegeben seien drei, vier oder mehr Geraden a,b,c,... und zu jeder der Geraden ein Winkel α, β, γ,... Gesucht ist ein Punkt P mit folgender Eigenschaft:
- bei drei Geraden: das Quadrat des Abstands zwischen P und a in Richtung α ist gleich dem Produkt der Abstände zwischen P und b in Richtung β und zwischen P und c in Richtung γ
- bei vier Geraden: das Produkt der Abstände zwischen P und a in Richtung α und zwischen P und b in Richtung β ist gleich dem Produkt der Abstände zwischen P und c in Richtung γ und zwischen P und d in Richtung δ
- bei fünf Geraden: das Produkt der Abstände zwischen P und a in Richtung α, zwischen P und b in Richtung β und zwischen P und c in Richtung γ ist gleich dem Produkt der Abstände zwischen P und d in Richtung δ und zwischen P und e in Richtung ε.
- usw.
Auf welcher Kurve liegen diese Punkte P?

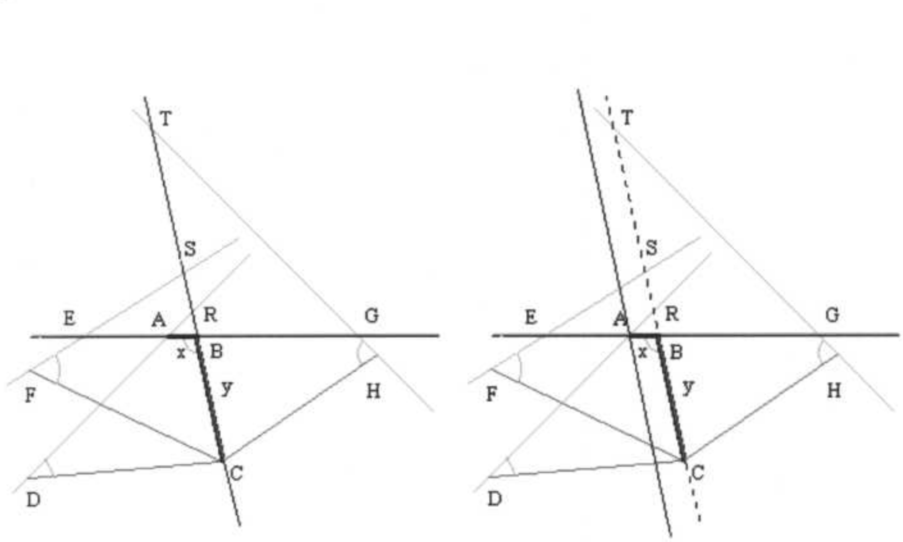
Was prädestiniert nun dieses seltsame Problem dazu, die Analytische Geometrie ins Leben zu rufen? Gehen wir dazu von der Frage aus: Wozu braucht man denn Koordinatensysteme? Man braucht sie nicht dazu, Rechtecke zu zeichnen. (Die Aufgaben, mit denen der Unterricht beginnt, sind vom Standpunkt des Bedarfes her ganz irrelevant.) Eine wissenschaftliche Umwälzung wird, so Thomas Kuhn[4], in der Regel aus einer Not, einer Krise geboren, zumindest aber eben aus einem Bedarf, und den gilt es im Folgenden herauszuarbeiten.

Descartes stellt sich das Problem zunächst für 4 Geraden und fertigt eine Skizze an:



[4] Kuhn 1976

Anhand dieser Zeichnung führt er folgendermaßen Koordinaten (x/y), wie wir heute sagen würden, ein:[5]



Nun berechnet man schrittweise $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, etc. in Abhängigkeit von x und y:

$\overline{CB} = y$

$x : \overline{BR} = c_1$ $\quad \overline{BR} = x/c_1$ $\quad \overline{CR} = x/c_1 + y$ $\quad \overline{CD} : \overline{CR} = c_2$ $\qquad \overline{CD} = (c_2/c_1)x + c_1 y$

usw.

Man sieht, dass immer nur Ausdrücke der Form $a\,x + b\,y + c$ vorkommen. Daher hat die Gleichung, die jene Punkte festlegt, die die gewünschte Eigenschaft haben, die Gestalt

$(a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2) = (a_3 x + b_3 y + c_3)(a_4 x + b_4 y + c_4)$

Es entsteht somit im Fall von 4 Geraden eine Gleichung von höchstens zweitem Grad. (Korrekter gesagt können es mehrere Gleichungen sein, Descartes unterlässt es aber, die nötigen Fallunterscheidungen betreffend der Lage der Punkte und somit der Vorzeichen zu treffen.[6])

Allgemein: Bei n Geraden entsteht höchstens eine Gleichung n-ten Grades ((n+1)/2-ten Grades).

Was ist Descartes' Leistung in diesem Zusammenhang?
(1) Er führt Koordinaten(achsen) ein.
(2) Er gibt die Lösung eines geometrischen Problems durch Koordinatenpaare an.
(3) Die Angabe der Lösung erfolgt algebraisch, durch eine Gleichung.
(4) Er zeigt die Möglichkeit auf, geometrische Probleme *systematisch* in algebraische zu übersetzen.[7]

---

[5] Diese Zeichnungen finden sich bei Descartes nicht!
[6] In der ganzen *Geometrie* deutet er alle Beweise eher an als dass er sie durchführt.

(5) Er vereinheitlicht die Untersuchungen zu Kurven.

Zur Zeit Descartes wurden eine Vielzahl von Kurven mit einer Vielzahl von Mitteln untersucht. Die Kurven wurden in sogenannte „ebene", „körperliche" und „lineare" eingeteilt, ohne dass man diese Einteilung sehr überzeugend rechtfertigen konnte. Da Zirkel und Lineal zur Behandlung der Probleme nicht reichten, wurden immer neue Prinzipien und Konstruktionsmethoden betrachtet. Descartes hat die Untersuchungen in zweierlei Hinsicht vereinheitlicht: Er hat erstens die algebraischen Kurven nach ihrem Grad klassifiziert (das hat sich als mit der bisherigen Klassifizierung als gut im Einklang erwiesen) und zweitens die Erweiterung der Konstruktionsmittel systematisiert, indem er jede Kurve höherer Art nur mittels Kurven niedrigerer Art entstehen hat lassen, ausgehend von Kreis und Gerade. Diese beiden Vereinheitlichungen hat er synchronisiert, und zwar eben genau über das Pappus-Problem.

Wenn jetzt auch umrissen ist was Descartes anhand des Pappus-Problems geleistet hat, bleibt aber noch die Frage: Warum gerade an diesem Problem?

Dafür gibt es innermathematische und außermathematische Antworten, zu letzteren zähle ich auch die mathematikhistorischen. Eine solche ist: Es war schon (so lang) da. Das Pappus-Problem galt seit dem 3. Jahrhundert als ungelöst und hat die Mathematiker beschäftigt. Es hat also zu einer Beschäftigung aufgrund seines Images gelockt. Pappus selbst war zudem der geistige Vorfahre Descartes in Hinblick auf die analytisch-synthetische Methode. Descartes benützt in seiner Behandlung des Pappus-Problems, die Idee *vom Ergebnis* auszugehen (man rechnet mit x, als ob man es kennen würde). Die Vorgangsweise fügt sich also in seine allgemeinen philosophisch-methodischen Anliegen ein. Man könnte noch mehrere solche Antworten nennen, wir gehen aber nun schon zu den rein innermathematischen über.

Unter diesen möchte ich wieder zwei Arten unterscheiden: diejenigen, die aus dem mathematischen Umfeld kommen und diejenigen, die aus dem Pappus-Problem selbst entspringen. Zu ersteren: Wie schon gesagt herrschte in der Geometrie zu Descartes Zeit Chaos, es gab „so viele Lösungsmethoden wie Aufgabenstellungen". Das ist ein unbefriedigender Zustand, allerdings ist die Abhilfe wohl kaum so zu schaffen, dass sich jemand „hinsetzt" und beschließt, eine allgemeine Methode zu finden. Die allgemeine Methode muss sich *anhand von etwas* finden lassen. Hier kam Descartes sicherlich der Umstand zu Hilfe, dass er sich bereits sehr früh, in Auseinandersetzung mit Vieta, überlegt hatte, geometrische Größen einheitlich als lineare Größen aufzufassen (siehe Fußnote 8). Das allein hätte aber nicht gereicht. (Man beachte den Aufbau der *Geometrie*: Das Buch beginnt mit systematischen Untersuchungen zur Algebraisierung, dann wird das Pappus-Problem eingeschoben, dann erst gehen die systematischen Überlegungen, nun zu Kurven, weiter.)

Nun zu zweiteren, also zu den Antworten, die angeben, wieso gerade das Pappus-Problem so reiche Früchte getragen hat. Die Lösung des Pappus-Problems ist ohne Zuhilfenahme von Koordinaten nur in speziellen Fällen angebbar, jedenfalls nicht auf *eine* Weise anggebbar. Das allerdings kann man erst im Nachhinein wissen, es konnte also Descartes nicht auf seinem Weg

---

[7] Wichtig dafür ist, dass er Größen einheitlich als linear auffasst: Vieta stellt a^2 manchmal als Quadrat dar, manchmal als Länge, etc., Descartes dagegen homogenisiert die Vorgangsweise, indem er sagt, dass Produkte von Längen wieder Längen ergeben sollen, weil es sonst in der Geometrie einen Bruch gibt, der keine Entsprechung in der Arithmetik hat (Produkte von Zahlen sind Zahlen). Das gelingt mit Hilfe des Strahlensatzes.