

Mathematik und die Finanzmärkte

Markus Fulmek, Fakultät f. Mathematik
Univ. Wien

Kapitel 1

Einleitung

Bei weitem nicht alle Absolventinnen und Absolventen des Mathematik-Studiums finden ihr berufliches Fortkommen in Lehre und Forschung: Viele landen in EDV-nahen Bereichen, in der "klassischen Versicherungsmathematik" und (in Österreich eher beschränkt) in der Industriemathematik.

Daneben gibt es aber auch den Bereich der Banken und Kreditinstitute, in denen seit einigen Jahren mathematisches Know-How verstärkt nachgefragt wird. Diese Nachfrage resultiert aus der immer größer werdenden Bedeutung von

- Innovativen Finanzprodukten wie (exotischen) Optionen und strukturierten Anleihen,
- Messung und Management von verschiedenen Risiken (Marktrisiko, Kreditrisiko) im Zusammenhang mit dem Bankgeschäft.

1.1 Finanzmathematik

Unter "Finanzmathematik" findet man zwei recht verschiedene Disziplinen:

- "Herkömmliche Finanzmathematik": Zinseszinsrechnung und versicherungsmathematische Modelle,
- "Moderne Finanzmathematik": Eine mathematische Teildisziplin, die durchaus anspruchsvoll ist und (unter anderem) Kenntnisse aus Maßtheorie, stochastischer Differential- und Integralrechnung sowie Funktionalanalysis voraussetzt.

In diesem Vortrag möchte ich einen elementaren Zugang zu den grundlegenden Konzepten der modernen Finanzmathematik präsentieren, ohne die mathematisch schwierigen Details zu behandeln (auch verschiedene "Komplikationen in der Praxis" lasse ich hier weg).

Kapitel 2

Zinskurve und Barwert

2.1 Der "Zeitwert" des Geldes: Diskontfaktoren

Wenn ich in genau t Jahren 1.000,- € brauche, dann kann ich dieses Geld (wenn ich es habe) schon heute auf die Seite legen. Im Normalfall werde ich es auf ein Konto oder Sparbuch bei einer Bank einzahlen. Dann wird aber (in aller Regel) schon ein geringerer Betrag N , $N < 1.000,-$ €, genügen, damit in t Jahren 1.000,- € verfügbar sind, denn die Bank bezahlt für mein Guthaben *Zinsen*.

In einem gewissen Sinn sind also die 1.000,- € in t Jahren heute nur N € wert: Man sagt, N ist der *Barwert (Present Value)* der 1.000,- € in t Jahren. Der Barwert hängt von der *Laufzeit* t und von den Zinsen ab; dieser Zusammenhang wird durch den sogenannten *Diskontfaktor* oder *Abzinsungsfaktor* $D(t)$ ausgedrückt:

$$N = 1.000,00 \times D(t).$$

Umgekehrt wären 1.000,- €, die ich heute für t Jahre auf der Bank anlege, in t Jahren

$$1.000,00 \times \frac{1}{D(t)}$$

"wert" (d.h., mein Guthaben "wächst in t Jahren auf diesen Wert verzinslich an"): Der *Aufzinsungsfaktor* ist also einfach der Kehrwert des Abzinsungsfaktors.

In der Praxis wird dieser einfache Sachverhalt aber anders ausgedrückt: Die Bank gibt in der Regel keine aktuellen Diskontfaktoren für alle möglichen Laufzeiten bekannt, sondern *Zinssätze*, die *annualisiert* (d.h., auf ein Jahr bezogen) sind und üblicherweise in Prozent angegeben werden.

Die (ganz elementare) "Umrechnung" von annualisierten Zinssätzen in Diskontfaktoren ist Gegenstand der *Zinsezinsrechnung*.

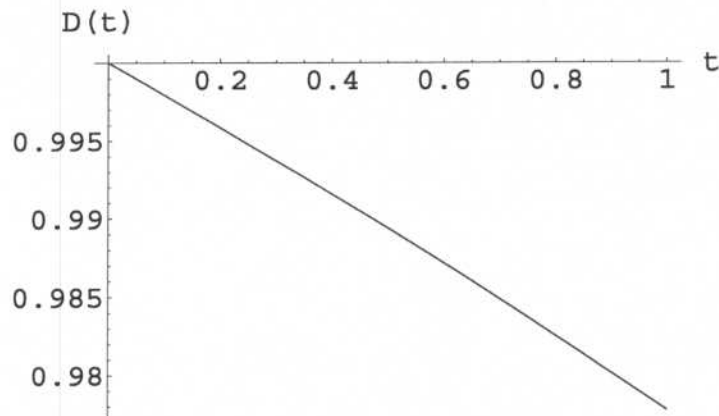


Abbildung 2.1: Diskontierungsfaktoren im €-Geldmarkt im Jahr 2004

2.2 Zinsenszinsrechnung

Betrachten wir das einfachste Beispiel dazu: Ein Guthaben G werde mit fixem jährlichem *Zinssatz* r auf *Laufzeit* n Jahre angelegt. Der Begriff *Zinseszins* bedeutet, daß die jährlich gezahlten Zinsen jeweils *weiterveranlagt* werden; das Guthaben wächst also im Ablauf der n Jahre folgendermaßen an:

0 Jahre	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	...	n Jahre
G	$G(1+r)$	$G(1+r)^2$	$G(1+r)^3$...	$G(1+r)^n$

Wenn $G = 1.000,00$, $n = 5$ und $r = 4\%$, dann sieht das also so aus:

0 Jahre	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
1000,00	1040,00	1081,60	1124,86	1169,86	1216,65

2.2.1 Diskontfaktoren und Barwerte

Angenommen, das Guthaben ist "*täglich fällig*"; d.h., es kann *jederzeit* behoben werden, wie das z.B. bei einem einfachen Sparbuch der Fall ist: Was ist der richtige Diskontfaktor für eine Laufzeit von t Jahren, wenn $t \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl ist (z.B. ein halbes Jahr)?

Für Mathematiker ist die Sache natürlich sofort klar: Potenzen $(1+r)^t$ sind ja für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ definiert, und zwar über die *Exponentialfunktion*:

$$(1+r)^t = e^{\log(1+r)t},$$

genauso muß also der *Diskontfaktor* (*discount factor*) für Laufzeit t lauten.

