

DIDAKTIKHEFTE

Heft 29

Oktober 1998

Österreichische Mathematische Gesellschaft
Schriftenreihe zur Didaktik der
Mathematik der Höheren Schulen

H. Bürger	Gedanken zur analytischen Geometrie	1
A. Döllner-Gundacker gemeinsam mit M. Pick	Lernzielorientierte Leistungsbeurteilung und Leistungsfeststellung im Mathematikunterricht	13
M. Drmota	Merkwürdige Dezimalzahlen	26
G. Hanisch	Fehler - eine Chance zum Lernen	48
J. Humenberger	Ein Paradoxon bei Münzwurfsereien und bedingte Erwartungswerte	55
M. Koth	Konstruktion von Aufgabenstellungen zur analytischen Geometrie mit „schönen“ numerischen Werten	78
M. Kronfellner	Kurven: Von den Kegelschnitten der griechischen Antike zur fraktalen Geometrie. Ein Beispiel für einen Längsschnitt	99
G. Malle	Was ist ein Vektor? - Antworten aus der Geschichte der Mathematik	112
R. Müller	Mathematik mit dem TI-92	124
W. Peschek	Beschreibende Statistik: Zentrale Tätigkeiten, lokale Bedeutungen, globale Ideen	134
R. Taschner	Konvergenz in der sechsten Klasse	150
R. Viertl	Zur Beschreibung und Analyse unscharfer Daten	163

Vorträge der 20. Lehrerfortbildungstagung
am 17. April 1998 am Institut für Mathematik der Universität Wien

LEHRERFORTBILDUNGSTAGUNG

Freitag, 17. April 1998
durchgeführt von der
Didaktikkommission der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
an der
Universität Wien, Institut für Mathematik

EHRENSCHUTZ

Die Bundesministerin für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten
Elisabeth GEHRER

Der Rektor der Universität Wien
O.Univ.Prof.Dr. Alfred EBENBAUER

Der Landeshauptmann für Burgenland
Karl STIX

Der amtsführende Präsident des Stadtschulrates für Wien
Senatsrat Dr. Kurt SCHOLZ

Der amtsführende Präsident des Landesschulrates für Niederösterreich
Adolf STRICKER

Wien, 1998

Herausgegeben von der
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT
1040 Wien, Karlsplatz 13

unterstützt vom
Stadtschulrat für Wien
Landesschulrat für Niederösterreich
Landesschulrat für Burgenland

Druck: Stadtschulrat für Wien

Hinweise für Autoren:

Artikel für die DIDAKTIKHEFTE sollen Themen der Mathematik-Didaktik der Höheren Schulen, der Ausbildung und Fortbildung von Mathematiklehrern an diesen Schulen und Themen zur stofflichen Aufbereitung bzw. zur Didaktik der universitären Einführungsvorlesungen für diese Lehrer gewidmet sein. Einschlägige Darstellungen mit historischen Schwerpunkten sind ebenfalls erwünscht. Nur im Ausnahmefall sollten diese Artikel (samt graphischen Darstellungen und Literaturverzeichnis, beides im Text enthalten) eine Länge von 20 Seiten erreichen, wobei eine Seite aus etwa 50 Zeilen zu je 12--14 Wörtern (in Schriftgröße 12) besteht.

Autoren werden dringend gebeten, ihre Manuskripte in LaTeX oder WORD abzufassen.

Einsendungen und Korrespondenz sind an die folgende Adresse zu richten:

Dr. Maria Koth
Institut für Mathematik
der Universität Wien
Strudlhofgasse 4
1090 Wien

Heinrich Bürger, Wien

GEDANKEN ZUR ANALYTISCHEN GEOMETRIE

Warum sollen Schüler Analytische Geometrie betreiben? Antworten auf diese Frage hängen von den Zielsetzungen des Mathematikunterrichts und von den Möglichkeiten der Realisierung solcher Ziele durch einen entsprechenden Unterricht in Analytischer Geometrie ab. Im Zusammenhang mit konkreten Aufgabenstellungen für die Schüler sollen Probleme aufgezeigt und Unterrichtsvorschläge vorgestellt werden.

1. ANALYSE EINER AUFGABE IM HINBLICK AUF MÖGLICHE ZIELE

Die in der Unterrichtspraxis geforderten Tätigkeiten der Schüler sind weitgehend auf das rechnerische Lösen von Aufgaben beschränkt. Als Beispiel dazu die

Aufgabe 1:

Ein Dreieck hat die Eckpunkte $A = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Man berechne a) den Schwerpunkt, b) den Umkreismittelpunkt des Dreiecks.

Von den Schülern wird erwartet (und verlangt), daß sie eine Aufgabe dieser Art einwandfrei lösen können. Die Lösungen dieser Aufgabe sind:

$$\text{a) } S = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } U = \begin{pmatrix} 171/166 \\ 735/166 \end{pmatrix}$$

*Schülerfrage: Warum müssen wir diese Aufgabe lösen können?
Welchen Sinn hat sie?*

(Diese Frage könnte auch von der Lehrerin bzw. vom Lehrer gestellt werden.)

Augenscheinlich ist das numerische Ergebnis weder von Interesse noch von Bedeutung, auch wenn der Aufgabensteller sich bemüht hätte, "schönere" Zahlen zu erhalten. (Das numerische Ergebnis ist allerdings für eine Beurteilung der Schülerleistung von Bedeutung.)

Warum wird also eine solche Aufgabe gestellt?

Welche Ziele, können mit dieser Aufgabe beabsichtigt sein?

(1) Wissen und Können (Kenntnisse und Fertigkeiten) aktivieren, festigen, überprüfen.

Nötiges Wissen und Können:

a) $S = \frac{1}{3} \cdot (A+B+C)$

- b) - Umkreismittelpunkt = Schnittpunkt zweier Seitensymmetralen
- Seitensymmetrale von [AB] = Normale zu AB durch den Mittelpunkt M von [AB]
- Aufstellen einer Gleichung der Geraden normal zu AB durch M
- Schnittpunkt zweier Geraden ermitteln, System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten lösen

Daran kann die Frage anschließen:

Wozu muß dieses Wissen und Können erworben werden?

Mögliche Antwort: Um Analytische Geometrie betreiben zu können.

Wozu Analytische Geometrie? (Antwort in Abschnitt 2.)

Ein Vergleich der Anforderungen zeigt, daß der Aufgabenteil a) nur das Kennen einer Formel und das Einsetzen in diese Formel erfordert. Geometrische Vorstellungen und Kenntnisse (Schwerpunkt? Schwerlinie?) sind nicht nötig. Diese sind im Aufgabenteil b) nötig. Darüber hinaus stellt dieser Aufgabenteil noch die folgenden Anforderungen, die als übergeordnete Ziele für diese Aufgabenstellung angesehen werden können.

(2) Sachverhalte analysieren, Wissen und Können kombinieren

Diese Aktivitäten (analysieren, kombinieren) können als Formen von "Produktivem geistigen Arbeiten" angesehen und damit einem zentralen allgemeinen Lernziel des Unterrichts zugeordnet werden.

Problem: Üben dieser Aufgabe kann zum Abarbeiten eines Rezeptes führen.

Können durch Erweiterung der Aufgabenstellung weitere allgemeine Lernziele angestrebt werden?

(3) Zeichnerisches Darstellen

(Allgemeines Lernziel: "Darstellen und Interpretieren")

Aufgabe 2:

Man ermittle die Koordinaten des Umkreismittelpunktes in einer Zeichnung.

(4) Beschreiben des Lösungsweges in allgemeiner Form

(verbal oder formal)

(Allgemeines Lernziel: "Darstellen von Sachverhalten")

Aufgabe 3:

Man beschreibe, wie man aus den Koordinaten der Eckpunkte eines Dreiecks den Umkreismittelpunkt berechnen kann.

Lösungsmöglichkeiten:

a) verbal:

"Man berechnet die Mittelpunkte zweier Seiten, dann ermittelt man Gleichungen der Normalen zu diesen Seiten, ..."

b) formal:

$$M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A+B), \quad M_{AC} = \frac{1}{2} \cdot (A+C)$$

Normalvektor der Seitensymmetrale von AB ist \vec{AB}

Normalvektor der Seitensymmetrale von AC ist \vec{AC}

$$\vec{AB} \cdot X = \vec{AB} \cdot M_{AB} \quad \wedge \quad \vec{AC} \cdot X = \vec{AC} \cdot M_{AC} \quad \rightarrow \quad \text{Umkreismittelpunkt } X "$$

c) formal:

"Schreiben eines Programms zur Berechnung des Umkreismittelpunktes für eine geeignete Software"

- (5) Begründen des Lösungsweges und von Zusammenhängen
(Allgemeines Lernziel: Argumentieren)

Aufgabe 4:

Man begründe:

- a) Die drei Seitensymmetralen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
- b) Es gibt nur einen Umkreismittelpunkt.

Bemerkung:

Die unter (3) bis (5) geforderten Schüleraktivitäten können zu einem vertieften Verständnis von Inhalten und Beziehungen führen. Insgesamt erfolgt durch die Aufgaben 1 bis 4 eine Bearbeitung eines Problems aus verschiedenen Sichtweisen, die sich von der bloßen rechnerischen Einübung einer Aufgabenlösung abhebt.

2. WARUM ANALYTISCHE GEOMETRIE IM MATHEMATIKUNTERRICHT?

- a) Geometrie ist ein grundlegender Teilbereich der Mathematik. Die Behandlung geometrischer Sachverhalte mit Mitteln der Analytischen Geometrie kann zu einer Erweiterung und Vertiefung von geometrischen Kenntnissen und Einsichten führen. Insbesondere kann durch die Behandlung von entsprechenden Problemen räumliches Vorstellungs- und Anschauungsvermögen gefördert werden.
- b) Der Wechsel zwischen algebraischen Darstellungen und geometrischen Interpretationen ist eine fundamentale mathematische Methode. Er kann eine Hilfe beim Gewinnen von Erkenntnissen und beim Problemlösen sein.
- c) Die Analytische Geometrie bietet ein reiches Feld für vielfältige Problemstellungen, die durch Kombinieren relativ einfacher Mittel bearbeitet werden können.
- d) Beim algebraischen Darstellen geometrischer Sachverhalte, beim geometrischen Interpretieren algebraischer Sachverhalte und beim Problemlösen haben die Schüler viele Möglichkeiten, selbständig Begründungen durchzuführen.

Zusammenfassend: In der Analytischen Geometrie können grundlegende mathematische Kenntnisse, Fähigkeiten und Einsichten vermittelt werden und die Schüler können mit wichtigen mathematischen Methoden und Denkweisen vertraut werden. Ebenso können wesentliche Beiträge zu den allgemeinen Lernzielen "Darstellen und Interpretieren", "Produktives geistiges Arbeiten" und "Argumentieren" geleistet werden.

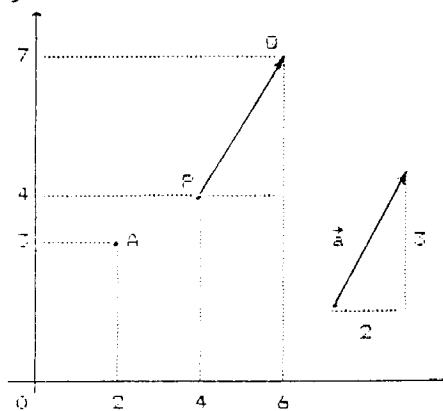
3. ZUR ROLLE VON VEKTOREN IN DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE

Grundlage der Analytischen Geometrie ist die umkehrbar eindeutige Zuordnung von Zahlenpaaren und Punkten der Ebene bzw. von Zahlentripeln und Punkten des Raumes durch Vermittlung eines cartesischen Koordinatensystems. Die algebraische Darstellung weiterer geometrischer Objekte wird erleichtert, wenn man auch Pfeile durch Zahlenpaare bzw. Zahlentripel beschreibt, wobei allen Pfeilen mit gleicher Länge, gleicher Richtung und gleicher Orientierung dasselbe Zahlenpaar bzw. Zahlentripel entspricht.

So kann dem Zahlenpaar $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zugeordnet werden:

- der Punkt $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,
- der Pfeil $\vec{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,
- jeder Pfeil $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, der aus \vec{PQ} durch Parallelverschiebung hervorgeht.

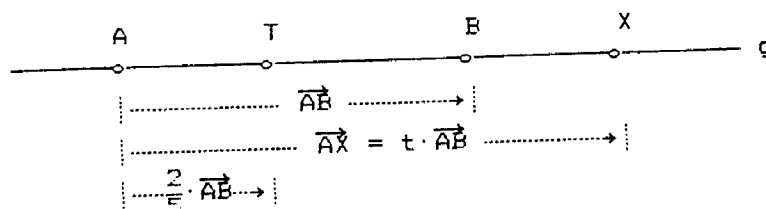
Es ist zweckmäßig, Zahlenpaare und Zahlentripel so wie die jeweils entsprechenden geometrischen Objekte zu bezeichnen.



Zusammen mit der geometrischen Deutung der Rechenoperationen im \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 können geometrische Sachverhalte in knapper Form algebraisch dargestellt werden, wobei diese algebraische Darstellung vielfach sehr einfach anschaulich gedeutet werden kann.

Beispielsweise kann man zu zwei in einem Koordinatensystem gegebenen Punkten A und B jeden Punkt X der Geraden $g = AB$ durch entsprechende geometrische Deutung von Rechenoperationen im \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 erfassen:

$$X \in g \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}: \vec{AX} = t \cdot \vec{AB} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}: X = A + t \cdot \vec{AB}$$

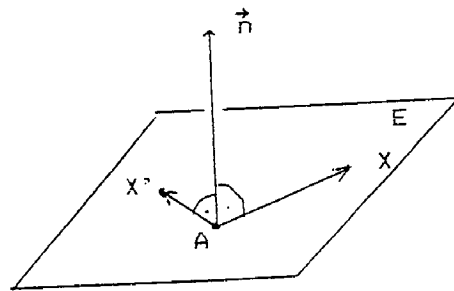


Insbesondere kann man damit auch Teilungspunkte einer Strecke $[AB]$ berechnen. So teilt der Punkt $T = A + \frac{2}{5} \vec{AB}$ diese Strecke im Verhältnis 2:3.

Ein weiteres Beispiel:

Die Darstellung einer Ebene E im Raum, von der ein Punkt A und ein Normalvektor \vec{n} bekannt sind, ergibt sich daraus, daß ein Punkt X genau dann in E liegt, wenn die Pfeile \vec{n} und \vec{AX} normal sind:

$$X \in E \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{AX} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot A$$



Diese Beispiele zeigen, daß die Verwendung von Vektoren in der angegebenen Weise sowohl algebraisches Darstellen geometrischer Sachverhalte als auch geometrisches Interpretieren algebraischer Darstellungen erleichtern und verständlicher machen kann. Damit wird einem Hauptanliegen des Unterrichts in Analytischer Geometrie Rechnung getragen. Ferner kann dies auch für das Problemlösen, für produktives Arbeiten und für das Argumentieren hilfreich sein.

Außerdem ermöglicht die Verwendung von Vektoren in der Analytischen Geometrie (gegenüber einer Analytischen Geometrie ohne Vektoren) eine einfachere Bearbeitung von Sachverhalten und Problemen im Raum und kann so zur Förderung der Raumanschauung beitragen, die im Mathematikunterricht meist stiefmütterlich behandelt wird.

Im Hinblick auf die Lernziele in Analytischer Geometrie und auf die beschriebenen Möglichkeiten bei Verwendung von Vektoren sollten die Schüler möglichst selbständig Aufgaben bearbeiten, in denen sie geometrische Sachverhalte darstellen, insbesondere Formeln aufstellen, Problemlösungswege beschreiben und Begründungen durchführen.

Die Verwendung von fertigen Formeln zum Lösen von Aufgaben hilft, Teilschritte der Aufgaben rasch durchzuführen und ermöglicht oft erst die Lösung komplexer Probleme. Die Verwendung von fertigen Formeln befreit auch von der Denkarbeit die zur Herleitung dieser Formeln nötig ist. Andererseits sollte diese Denkarbeit, die zum Herstellen von Beziehungen zwischen geometrischen Sachverhalten und algebraischen Beschreibungen nötig ist, im Hinblick auf die Ziele des Unterrichts möglichst oft durchgeführt werden.

4. ZUR UNTERRICHTSPRAXIS

Im Unterricht und vor allem bei Leistungsfeststellungen herrscht das numerisch - rechnerische Lösen von Aufgaben vor. Die dazu nötigen Formeln werden sehr oft von der Lehrerin bzw. vom Lehrer an der Tafel hergeleitet. Häufig werden Formeln ohne geometrisch - anschaulichen Bezug rein rechnerisch aus anderen Formeln gewonnen. Beispielsweise wird aus der Parameterdarstellung einer Ebene durch Eliminierung der Parameter eine lineare Gleichung für die Koordinaten x, y, z der in der Ebene liegenden Punkte rein rechnerisch abgeleitet. Erst später wird gezeigt, daß die Koeffizienten dieser Gleichung einen Normalvektor der Ebene darstellen.

Oft werden für die Schüler zur Bearbeitung von Problemen spezifische Formeln bereitgestellt, obwohl diese Probleme auch ohne diese Formeln mit elementaren Kenntnissen unter Heranziehung grundlegender geometrischer Vorstellungen bearbeitet werden können.

Beispielsweise werden für die Berechnung des Abstandes $d(P,g)$ des Punktes P von der Geraden g die folgende Formeln angeboten:

$$d(P,g) = |\vec{AP} \cdot \vec{n}_0| \quad (A \in g, \vec{n}_0 \perp g, |\vec{n}_0| = 1)$$

$$d(P,g) = |\vec{AP} \times \vec{g}_0| \quad (A \in g, \vec{g}_0 \text{ Richtungsvektor von } g \text{ mit } |\vec{g}_0|=1)$$

Die Berechnung dieses Abstandes entsprechend seiner Ermittlung aus einer Zeichnung, also durch Berechnung des Abstandes der Punkte P und S , wobei S der Schnittpunkt von g mit der Normalen zu g durch P ist, kann vielleicht etwas mehr Rechenzeit als das Einsetzen in eine der obigen Formeln erfordern, ist aber unmittelbar einsichtig und mit mehr Vorstellungen verbunden als das Einsetzen in eine fertige Formel.

Über grundlegende Kenntnisse und Vorstellungen von Schülern auf dem Gebiet der Analytischen Geometrie gibt eine Diplomarbeit von A. Waldmann Auskunft, in der eine entsprechende Untersuchung in vier Wiener Gymnasien bzw. Realgymnasien in den Klassen 6,7,8 durchgeführt wurde. Nur in wenigen Klassen gab es befriedigende Teilergebnisse. Beispielsweise wurden auf die folgende Fragen meist nur unzureichende Antworten gegeben:

- Gib die Definition eines ein Vektors an!
- Welche geometrischen Vorstellungen verbindest Du mit einem Vektor?
- Wie lautet die Parameterdarstellung einer Geraden? Erkläre die vorkommenden Größen (Buchstaben, Symbole)!
[Nur 16 von 380 Antworten waren völlig einwandfrei.]
- Erkläre die Parameterdarstellung anhand einer Zeichnung!
[Wieder: Nur 16 von 380 Antworten sind völlig einwandfrei.]

- Gegeben ist der Punkt $P(4/2)$ und der Normalvektor einer Geraden $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Wie lautet die Gleichung der Geraden? (Normalvektorform, nicht Parameterdarstellung)
[161 von 360 richtig.]
- Erkläre diese Gleichung anhand einer Zeichnung.
[Gemeint ist die Gleichung $3x+5y = 22$ der vorhergehenden Frage. Von 360 Antworten sind 31 richtig.]

5. VORSCHLÄGE FÜR AUFGABENSTELLUNGEN

Wesentlich ist bei den folgenden Aufgabenstellungen, daß die Schüler möglichst selbständig, also in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit tätig sind. Die Lehrerin bzw. der Lehrer sollte sich auf Hilfestellungen und Denkanstöße für einzelne Schüler oder gegebenenfalls für die gesamte Klasse beschränken und wichtige Teilergebnisse auf der Tafel festhalten.

Dazu sei auf eine Forderung des Mathematiklehrplans für die AHS hingewiesen:

"Bei den einzelnen Stoffgebieten sind Tätigkeiten angeführt, die einerseits die Bildungs- und Lehraufgabe konkretisieren, andererseits die Lernziele für die einzelnen Stoffgebiete festlegen. *Diese Tätigkeiten sind von den Schülern durchzuführen.*"¹

In der Analytischen Geometrie wird speziell gefordert:
"Lösen von Lage- und Maßaufgaben - auch an Körpern - nach Möglichkeit in Verbindung mit zeichnerischen Darstellungen. Beschreiben von Lösungswegen (unter Umständen auch ohne Durchführung der Rechnungen), gegebenenfalls Begründen des Vorgehens. Aufstellen einfacher Vektorformeln"

¹Hervorhebungen im Text durch den Autor

5.1 Entwicklung von Wissen durch Frage- und Problemstellungen, möglichst in Verknüpfung mit geometrischen Vorstellungen.

Aufgabe 5:

Eine Gerade g ist durch die Punkte $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Ermittle einzelne Punkte von g .

[Mögliche Hilfestellungen:

- Fertige eine Zeichnung an.

- Es sei M der Mittelpunkt von AB ; welche Beziehung besteht zwischen \vec{AM} und \vec{AB} ?

- Zeichne den Punkt P , sodaß $\vec{AP} = 2 \cdot \vec{AB}$]

b) Beschreibe, wie man einen beliebigen Punkt X g finden kann. Stelle eine Formel auf.

Aufgabe 6:

Eine Gerade g in der Ebene ist durch einen Punkt A und einen Richtungsvektor \vec{g} festgelegt. Ist sie auch durch einen Punkt A und einen Normalvektor \vec{n} festgelegt? Versuche eine Beziehung zwischen \vec{n} , dem Punkt A und einen beliebigen Punkt X g zu finden. Ist eine Gerade g im Raum durch einen Punkt und einen Normalvektor \vec{n} eindeutig festgelegt? Begründe.

5.2 Vielseitiges Anwenden von elementarem Wissen und von geometrischen Vorstellungen - "Einsparen von Formeln"

Aufgabe 7:

Definiere die folgenden Abstände und beschreibe, wie man sie mit der Formel für den Abstand zweier Punkte (ohne weitere Abstandsformel) berechnen kann. Gib zu jedem Fall ein Beispiel an und führe die zugehörige Berechnung aus.

a) Punkt - Gerade (im \mathbb{R}^2)

b) Punkt - Gerade (im \mathbb{R}^3)

c) Punkt - Ebene

d) Parallele Gerade (im \mathbb{R}^2)

e) Parallele Gerade (im \mathbb{R}^3)

f) Parallele Ebenen

g) Gerade - Ebene (Voraussetzung!)

h) windschiefe Gerade

Aufgabe 8:

Ermittle einen Vektor \vec{n} , der normal zu den Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

[Hinweis zu a):

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 & \quad n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{n} = 0 & \quad -2n_1 + 4n_2 - n_3 = 0 \end{aligned}$$

5.3 Finden von Problemen

Aufgabe 9:

Nenne Fragen zu der folgenden Angabe. Beantworte die Fragen.

a) $x_1 = x_2, A = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $x_1 = x_2, P = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

5.4 Beschreiben von Lösungswegen

Aufgabe 10:

Wie kann man den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks im Raum berechnen?

5.5 Argumentieren

Aufgabe 11:

Beweise: Schneidet man einen Würfel mit einer Ebene, die normal zu einer Raumdiagonale ist und die durch den Mittelpunkt dieser Diagonale geht, so erhält man ein regelmäßiges Sechseck. Wähle dazu ein Koordinatensystem so, daß jede Koordinatenachse eine Würfelkante enthält. Warum kann man sich auf einen Würfel mit der Kantenlänge 1 beschränken?

5.6 Klären von Begriffen

Aufgabe 12:

Was besagt: " $3x+4y = 8$ ist eine Gleichung der Geraden g ?" Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Gleichung und den Punkten von g ?

5.7 Zusammenfassende schriftliche Wiederholungen

Aufgabe 13:

Beantworte schriftlich:

- a) Durch welche Angaben kann eine Ebene im Raum eindeutig festgelegt werden? Was muß bei einer solchen Angabe jeweils vorausgesetzt werden? (Z.B.: Legen zwei Geraden eine Ebene fest, die diese beiden Geraden enthält?)
- b) Beschreibe in jedem Fall, wie man eine Gleichung der Ebene ermitteln kann.

Mag. Anna Döller-Gundacker (kommentierte Beispiele aus der Praxis)
Mag. Marliese Pick (theoretische Überlegungen)

Lernzielorientierte Leistungsbeurteilung und Leistungsfeststellung im Mathematikunterricht

Im Schulalltag sind Probleme der Leistungsbeurteilung und Leistungsmessung allgegenwärtig und haben für die Betroffenen einen hohen Stellenwert. Jeder, der Leistungen erbringt, will selbstverständlich, dass diese anerkannt werden. Irgendeine Form von Rückmeldung ist notwendig. Aber *es müssen nicht die von uns gewohnten und geübten Formen sein.*

In der Schulpraxis ist derzeit Schülerbeurteilung und Rückmeldung oft gleichzeitig Leistungsbeurteilung; eine Gleichsetzung, welche die vielfältigen Qualitäten und Begabungen von Menschen auf *eine* Dimension beschränkt, nämlich auf kognitive Leistungen. Dadurch werden andere Haltungen zum *Lernen an sich* erzeugt, als es unseren pädagogischen Intentionen entspricht.

Wenn man über lernzielorientierte Leistungsbeurteilung und lernzielorientierte Leistungsfeststellung nachdenkt, muss man sich zuerst einmal klarwerden, was man mit seinem Unterricht erreichen will:

Für mich persönlich habe ich diese Antwort gefunden: Ich wünsche mir einen Zuwachs der Kompetenzen meiner SchülerInnen, und zwar Erwerb von mathematischer Fachkompetenz sowie Erwerb von Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten. Einen ebenso wichtigen Stellenwert hat auch der Erwerb von Schlüsselqualifikationen wie Problemlösefähigkeit, Kooperationsfähigkeit, Time-Management usw. - und ich wünsche mir auch, dass der Erwerb all dieser Kompetenzen möglichst ohne unerwünschte Nebenwirkungen erfolgt. Eine solche unerwünschte Nebenwirkung ist für mich z.B. Zerstörung von Motivation, wie man sie an SchülerInnen, die einige Jahre Schulgeschichte hinter sich haben, beobachten kann. Lernzielorientierter Unterricht und lernzielorientierte Leistungsbeurteilung und -feststellung sind motivationsfördernde wichtige Schritte in Richtung einer neu überdachten Beurteilung.

• Umschreibung lernzielorientierter Leistungsbeurteilung (LOB)

Bei lernzielorientierter Beurteilung werden **bereits vor Unterrichtsplanung** - vor Entscheidung über Methodik und Materialien - **die gewünschten Ergebnisse festgelegt** und formuliert.

Die Leistungen der SchülerInnen werden entsprechend den ursprünglich ausgewählten Zielen bewertet.

Im Sinne des österreichischen Lehrplans geht es also auch darum, festzulegen: Was ist mir innerhalb dieses Lehrplans wichtig und daher wert, gelehrt zu werden?

Anschließend daran können die Leistungsfeststellungsverfahren entwickelt werden, mit denen der Erfolg des Unterrichts überprüft wird.

Die Lernziele werden formuliert und sind den SchülerInnen vor Erbringen der Leistung bekannt.

Dabei können die Groblernziele am Beginn des Schuljahres oder zu Beginn des Semesters, die Feinlernziele jeweils vor oder nach dem Durchnehmen des jeweiligen Kapitels, jedenfalls noch vor einer Leistungsbeurteilung, bekanntgegeben werden. Lernzielorientierte Leistungsbeurteilung bietet die Möglichkeit der Individualisierung und inneren Differenzierung, da Basislernziele zum Erreichen eines positiven Abschlusses und Erweiterungslernziele zum Erreichen besserer Noten festgelegt werden können.

Die Festlegung von Lern- und Unterrichtszielen sagt an und für sich noch nichts über die Art und Methode des Unterrichts aus. Die Zielbeschreibung bezeichnet das Ergebnis des Unterrichts; sie beschreibt nicht den Ablauf des Unterrichts. Allerdings gibt es in einem individualisierten, schülerzentrierten Unterricht mehr Möglichkeiten die Erreichung von Lernzielen festzustellen, als in einem gänzlich gebundenen, lehrerzentrierten Unterricht (in dem die Schularbeit das einzige Instrument zur Leistungsfeststellung ist, und damit als ein „50-Minuten-Fenster, durch das SchülerInnen betrachtet werden“, nur eine sehr punktuelle Beurteilung bietet).
Prinzipiell ist eine Schularbeit nur *eine* von vielen Möglichkeiten, festzustellen, welche Lernziele erreicht wurden.

Bei der Arbeit mit offenen Lernformen können SchülerInnen beim Erfüllen ihrer Aufgaben aus dem Arbeitsplan beobachtet werden, und es können Lernziele auch bei anderen Gelegenheiten erreicht werden (nicht nur durch Schularbeiten). Werden Lernziele bereits während offener Lernphasen durch SchülerInnen erreicht, so ist es gut; doch es muss für SchülerInnen auch die Möglichkeit geben, unsanktioniert Fehler zu machen: Zeiten, in denen Fehler einfach Lernanlässe und nicht Beurteilungsanlässe sind!

Nicht jede Leistungsfeststellung, nicht jede Rückmeldung muss zwangsläufig gleich eine Beurteilung nach sich ziehen. Das betrifft auch Hausübungen. Gerade beim Erbringen der Hausübungen ist ein wichtiges mögliches - und für das zukünftige Leben wichtiges - Lernziel das Einhalten von Terminen.
Nichtbenotete Lernzielkontrollblätter, die SchülerInnen im Rahmen von offenen Lerneinheiten lösen können, bieten sich zum Erreichen von Lernzielen oder aber auch nur als Rückmeldung für LehrerInnen und SchülerInnen an.
Da es im Rahmen der selbsttätigen Arbeit der SchülerInnen, sowohl in den gebundenen als auch in den offenen Einheiten viele Produkte im Schulübungsheft gibt, kann dieses zur Leistungsfeststellung herangezogen werden, wobei ich immer wieder betonen möchte, daß Feststellung und Beurteilung nicht dasselbe ist

Bei lernzielorientierter Leistungsbeurteilung und lernzielorientierter Leistungsfeststellung werden von vornherein die Leistungen klar benannt, die SchülerInnen erbringen müssen um zu zeigen, dass sie das Unterrichtsziel erreicht haben. Damit trägt diese Form zur Transparenz der Beurteilung bei: Ich sage dir vorher klar, was ich von dir will - ich gebe dir Rückmeldung, welche der Ziele du bereits erreicht hast,

bzw. welche Ziele dir noch fehlen. Lernzielorientierung hat nichts mit Stoffeinschränkung zu tun, es geht um die klare Benennung dessen, was LehrerInnen mit ihrem Unterricht bewirken wollen und welche Leistungen daher SchülerInnen erbringen müssen, um die vor der Leistungsbeurteilung definierten Lernziele zu erreichen.

Wohl aber sehe ich lernzielorientierte Beurteilung als einen wichtigen Teilbereich einer Pädagogik der Ermutigung. Ein tragendes Element der Idee der lernzielorientierten Leistungsbeurteilung ist, dass prinzipiell das Nachholen nicht erreichter Lernziele möglich sein muss. Aus organisatorischen Gründen ist es notwendig, die Zeiten mit den SchülerInnen zu vereinbaren, zu denen dies möglich ist. Durch diese Möglichkeit werden SchülerInnen motiviert, nicht verstandene Lernziele noch einmal zu bearbeiten, statt darauf zu hoffen, dass beim nächsten Mal die Karten neu gemischt werden, was natürlich gerade in einem Fach, in dem der Stoff aufbauend ist, besonderen Sinn macht. Die Tatsache, dass man nicht erreichte Lernziele nachholen kann, motiviert Schüler, sich mit den Inhalten auseinanderzusetzen. Eine negative Note muss nicht als Misserfolgserlebnis kleben bleiben; dadurch können Schulangst und negative Schuleinstellungen vermindert werden. Die Kooperation mit den LehrerInnen wird verstärkt, und das Interesse der SchülerInnen, zu zeigen, daß sie Lernziele erreicht haben, steigt. Die Motivation wird sachorientierter auf das Lernziel hin bezogen, selbstverständlich wäre dieser Effekt noch größer, wenn es keine Noten gäbe.

Lernzielorientierte Leistungsbeurteilung wird derzeit in einigen Regelschulen Österreichs verwendet und daher ist natürlich eine Übersetzung in Noten notwendig.

• LOB ist für LehrerInnen und SchülerInnen sinnvoll

- 1. Klar definierte Ziele sind Grundlage für die Auswahl der Unterrichtsmaterialien.**
Um ein Beispiel aus einem ganz anderen Bereich zu nennen: Auch der Handwerker oder der Chirurg wählt sein Werkzeug aus, wenn er weiß, was er damit reparieren, operieren, erreichen will.
- 2. Wenn man als LehrerIn vorher das Unterrichtsziel festgelegt hat, kann man nachher auch feststellen, ob man erfolgreich unterrichtet hat.**
Leistungsfeststellungen sollen ja LehrerInnen und SchülerInnen in gleicher Weise Auskunft geben, ob die Unterrichtsziele erreicht wurden. Aufgaben, die messen sollen, ob Unterrichtsergebnisse auch wirklich erreicht wurden, können eigentlich nur dann sinnvoll sein, wenn die angestrebten Ziele transparent und beiden Seiten klar sind.
- 3. Lernziele sind für die Schüler eine wichtige Grundlage für ihre Anstrengungen.**
Wenn SchülerInnen wissen, welche Ziele sie zu erreichen haben, können sie entscheiden, welche Handlungen sie setzen müssen um das Ziel zu erreichen und müssen weniger Energie darauf aufwenden, zu erraten, was dem Lehrer wichtig, bzw. was denn hier die bedeutenden Inhalte sein könnten.
Man kann ja von Schülern, die noch nicht den Überblick haben *können*, nicht verlangen, dass sie das Abschätzen *können*. Die Festlegung von Lernzielen, von Etappen, wirkt motivierend. Bei jedem Rennen ist klar, wie weit man laufen muss. Somit wird die Leistungsmotivation der Schüler sachorientierter.

4. **Die Möglichkeit, Basislernziele als Grundlage für einen positiven Jahresabschluss zu definieren.** Sie bewirkt, daß SchülerInnen alle Lernziele eines Schuljahres zumindest auf der basalen Ebene erreichen; und ein „Genügend“ nicht, wie sonst oft der Fall, bei gerade der Hälfte (der erreichbaren Punkte) gegeben wird. Dies ist auch die Begründung für das Angebot von differenzierten Schularbeiten, bei denen die Note sich aus dem Schwierigkeitsgrad der von den SchülerInnen gewählten Beispiele ergibt. Auch hier gilt das Prinzip der Transparenz, d.h. den SchülerInnen ist der Schlüssel der Notengebung bekannt.

Bei der von mir eingesetzten Art der differenzierten Schularbeit ist das Ziel das Erreichen ganzer Lernziele und nicht das Erhaschen einzelner Punkte, die dann in der Summe vielleicht ein Genügend ergeben - vielleicht auch nicht. In Koppelung mit der Möglichkeit des Nachholens nicht erreichter Lernziele hat sich diese Form (derzeit als Konzept für die Unterstufe) bewährt.

• **Wie müssen sinnvolle Zielbeschreibungen beschaffen sein**

Ein eindeutig beschriebenes Unterrichtsziel ist eines, mit dem man seine Absichten erfolgreich mitteilt. Eine gute Zielbeschreibung schließt Missdeutungen möglichst aus.

Es gibt Worte, die viele Deutungen zulassen und Worte die weniger Deutungen zulassen. Worte wie „wissen“ und „verstehen“ lassen z.B. viele Deutungen zu. Wie kann ein Schüler in Mathematik zeigen, daß er etwas verstanden hat: Er kann z.B. eine Gleichung schriftlich lösen oder den Unterschied zwischen einer arithmetischen und einer geometrischen Folge benennen können.

Wann immer notwendig, sollte man auch die Bedingungen nennen, unter denen die Leistung erbracht wird - wie etwa *ohne Zuhilfenahme einer Formelsammlung oder mit dem Taschenrechner*.

Wenn es möglich ist, soll die Zielbeschreibung auch ein Kriterium für akzeptable Qualität der Leistung enthalten; also: Wie gut muss der Lernende die Aufgabe lösen können?

Beispiele:

„Du kannst einen Winkel zeichnen“, bezeichnet die Tätigkeit.

„Du kannst einen Winkel mit Zirkel und Lineal zeichnen“, nennt Tätigkeit und Bedingung.

Im Satz „Du kannst einen Winkel mit Zirkel und Lineal auf 1Grad genau zeichnen“, ist Tätigkeit, Bedingung und Kriterium enthalten.

Zielbeschreibungen sind nur dann sinnvoll, wenn sie wirklich das Ziel angeben, das sich Schüler aneignen konnten. Will man z.B. überprüfen, ob SchülerInnen *Textgleichungen* lösen können, so ist es unzureichend und unzulässig, als

Zielbeschreibung lediglich *das Lösen von Gleichungen* anzugeben (und das Lösen von Textaufgaben mit Hilfe von Textgleichungen dann als dessen Anwendung zu interpretieren).

• Lernzielorientierte Leistungsbeurteilung und Notensystem

Lernzielorientierte Beurteilung ist eine Form der Beurteilung, die sich zwar auch in Noten übersetzen lässt; allerdings wären die positiven Auswirkungen auf das Lernverhalten von SchülerInnen größer, gäbe es diese verpflichtende Übersetzung nicht.

Oft werden Notenziffern wie Zahlen behandelt und aus ihnen Durchschnitte auf Hundertstel genau gebildet. Dabei sind Noten eher als - gute oder weniger gute - Schätzungen anzusehen. Die heute üblichen Formen der Leistungsbeurteilung geben nur teilweise Auskunft über die eigentlich erreichten Unterrichtsziele.

Die Bedeutung fächerübergreifenden Arbeitens und der Förderung der Persönlichkeitsentfaltung sind mittlerweile anerkannte pädagogische Grundsätze. In der Unterrichtsarbeit werden zunehmend zeitgemäße Lern- und Arbeitsformen eingesetzt, die den Veränderungen in unserer Gesellschaft und der Wissensexplosion Rechnung tragen.

Unterrichts- und Beurteilungsformen bedingen einander wechselseitig¹. Auch unsere heute übliche Notengebungspraxis hat geschichtliche Wurzeln. Bei ihrer Entstehung stellte sie im historischen Kontext gesellschaftspolitischen Fortschritt dar, denn sie konnte begabten Söhnen aus niedrigen Schichten die Möglichkeit zum Eintritt in den Staatsdienst eröffnen, Söhnen aus höheren Ständen hingegen bei mangelnder Eignung ihre bisherigen Privilegien versagen².

Da sich durch Veränderungen in unserer Gesellschaft die Notwendigkeit ergibt, neue Lernformen zu etablieren und den Lernbegriff zu erweitern, ist es auch notwendig, eine Diskussion über die gebräuchlichen Formen der Leistungsbeurteilung in Gang setzen, zu überlegen, inwieweit die eingeübten Bewertungs- und Beurteilungsmechanismen überholungsbedürftig sind. Wir müssen daran gehen, neue Wege in der Leistungsbeurteilung und Leistungsfeststellung zu finden.

Aus der Auffassung von Lernen als Denk- und Handlungstätigkeit, die Kopf, Herz und Hand mit einbezieht, ergibt sich ein umfassendes Verständnis von Leistung. Der Erwerb von sozialen und kommunikativen Kompetenzen, von Lernstrategien und Schlüsselqualifikationen, bekommt neben fachlichem und kognitivem Wissen immer mehr Bedeutung.

Ein neuer Lernbegriff, wie er auch im künftigen Lehrplan 99 zu finden ist, wird einen neuen Leistungsbegriff nach sich ziehen, und somit müssen auch neue Wege der Beobachtung, der Bewertung und der Feststellung von Leistung gefunden werden,

¹ vgl. Olechowsky, Richard; Rieder, Karin (Hg) in: *Motivieren ohne Noten*, 1993

² vgl. Kraul, Margret in: *Wie die Zensuren in die Schule kamen*, Pädagogik 3, 1995

wobei der Begriff Leistung auf Grund seiner Vielschichtigkeit unterschiedliche Gewichtungen und Interpretationen zulässt und sich nicht auf den rein kognitiven Bereich beschränken lässt.

Um einem erweiterten Lernbegriff angepasst zu werden, muss Beurteilung *weiter* gesteckt werden und *mehr* Qualitäten erfassen können. Bei der herkömmlichen Leistungsfeststellung wird höchstens der Stand des Lernprozesses zu einem bestimmten Zeitpunkt beschrieben, wohingegen sich das Fortschreiten im individuellen Lernprozess allenfalls in einer Randbemerkung findet.

In der traditionellen Form beschränkt sich Leistungsbeurteilung auf kognitive Leistungen, ohne irgendwelche anderen Qualitäten zu erfassen³ und unterliegt außerdem der Tatsache, dass kein Prüfungs- und Ausleseverfahren in der Lage ist, zu hundert Prozent richtige Ergebnisse zu bringen, sondern dass immer Alphafehler (Ungeeignete bestehen das Ausleseverfahren) und Betafehler (Geeignete werden fälschlich ausgelesen) vorhanden sein werden⁴.

Lernzielorientierte Leistungsbeurteilung bietet, auch in der derzeit neben der Ziffernbenotung geübten Form, mehr Möglichkeiten, den individuellen Lernfortschritt zu dokumentieren.

Durch Anerkennung verschiedener Leistungsformen und das Angebot von stressarmen Aktivitäten zur Erreichung von Lernzielen, können Entwicklungsprozesse beobachtbar gemacht werden und damit die oben genannten Alpha- und Betafehler verringert werden, da es sich bei der Feststellung der erreichten Lernziele nicht um punktuelle Ausleseverfahren handelt.

Auch die Dokumentation anderer Kompetenzen, wie Selbstorganisation oder die Fähigkeit, Termine einzuhalten, kann in lernzielorientierter Form dargestellt werden.

Grundsätzlich ist Kommunikation mit dem Elternhaus im Rahmen der Schulpartnerschaft zur Förderung zielgerichteter Lernprozesse positiv. Bei Problemen in sensiblen Bereichen, wie soziale Kompetenzen, Kooperationsfähigkeit, Kommunikationsfähigkeit, sind persönliche Gespräche unerlässlich.

Im Schuljahr 1998/99 gibt es an sieben Wiener AHS-Standorten auf Initiative des SSR ein Pilotprojekt zu lernzielorientierter Leistungsbeurteilung, in dem LehrerInnen-teams und einzelne LehrerInnen verschiedener Fächer diese Form der Beurteilung weiterentwickeln wollen.

Auskünfte: Mag. Marliese Pick, PI Wien, Burgg. 14-16, Tel: 523 62 22-727

³ vgl. Vogelsberger, Kurt in: *Leistungsmessung zwischen Anspruch und Wirklichkeit*, Pädagogik 3/95

⁴ vgl. Olechowsky, Richard in: *Begabungsförderung und Schulentwicklung*, 1986

Kommentierte Beispiele aus der Praxis:

Meine ersten Ansätze zur Beschäftigung mit Lernzielen gingen von zwei Überlegungen aus:

- Vorbereitungsphase einer Schularbeit (Was soll ich lernen?)
- Nachbereitung der Schularbeit (Wie kann ich noch nicht erbrachte Leistungen nachholen?)

Sie finden im Anhang zwei Beispiele aus einer ersten Klasse:

1. Schularbeit:

Die Lernziele sind hier bewußt von sehr kleinem Umfang, dem Alter und der neuen Situation (Übertritt VS – AHS) angepaßt. Die Schularbeit wurde von mir noch mit Punkten bewertet, da die Korrektur für Eltern und SchülerInnen damit einfacher nachzuvollziehen war. Die ersten Erfahrungen bestätigten meine Skepsis: ein Lernziel wird entweder erreicht oder nicht und kann daher nicht durch Punkte aufgesplittet werden. Ein Abgehen von diesem System während des Schuljahres erschien mir auf Gründen der Kontinuität nicht sinnvoll; ich möchte mir aber im nächsten Jahr eine Alternative überlegen.

Mit der Rückgabe der korrigierten Schularbeit bekamen die SchülerInnen von mir eine Liste, in der die erbrachten Lernziele rückgemeldet wurden. Mit dieser Grundlage konnten sie innerhalb der nächsten zwei bis drei Wochen einzelne Lernziele nachholen. Zum Nachweis mußten sie zu jedem Lernziel Übungsbeispiele in schriftlicher Form vorlegen, die ich als Grundlage für eine kurze Besprechung mit den einzelnen SchülerInnen heranzog.

4. Schularbeit:

Da wir am GRG 3 im Schuljahr 1997/98 als Pilotschule zum Lehrplan 99 arbeiteten, hatte ich die Möglichkeit, Anzahl und zeitliches Ausmaß der Schularbeiten selbst zu bestimmen. Ich entschied mich im 2. Semester für zwei Schularbeiten zu je 30 Minuten und für eine Schularbeit zu 50 Minuten. Da gerade in dieser Klasse die Mehrzahl der SchülerInnen starke Konzentrationsschwächen zeigte, erwartete ich mir Aufschlüsse darüber zu bekommen, ob kürzere Schularbeitsphasen zu besseren Ergebnissen führen.

Die Differenzierung in Basiswissen und Erweiterungswissen diente zur besseren Einschätzung der eigenen Leistung (bei jeder Aufgabe gab es eine Wahlmöglichkeit). Für die offene Vorbereitungsphase gab es einen Arbeitsplan.

Als Beispiel für einen Lernzielkatalog, der Groblernziele für das Semester oder Schuljahr getrennt nach Basis- und Erweiterungslernzielen enthält, habe ich einen Auszug für die 4. Klasse beigelegt.

Lernziele für die 1. Schularbeit 1C 1997/98

Lernziel (Abkürzung)		Übungsbeispiele
LZ W1	Ich kann addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren , wie ich es in der Volksschule gelernt habe.	Nr. 13 bis 20 1.HÜ, 3.HÜ, 7.HÜ
LZ W2	Ich kann einfache Textbeispiele lösen (z.B. Aufgaben zu Umfang und Flächeninhalt des Rechtecks und Quadrats)	Nr. 21 bis 28, Nr.30 Aufgabenzettel für HÜ
LZ G1	Ich kenne die Begriffe Punkt, Gerade, Strahl und Strecke und kann ihre Eigenschaften beschreiben .	Buch S. 200 Nr. 964 bis 968, 5.HÜ
LZ G2	Ich kann mit den Zeichengeräten Geodreieck, Bleistift und Zirkel Figuren und Strecken zeichnen .	Nr. 958 bis 962
LZ G3	Ich kann die verschiedenen Lagen von zwei oder mehreren Geraden beschreiben.	Nr. 982 bis 985
LZ G4	Ich kenne die Kurzschreibweise für parallele und normale Geraden und kann dazu Beispiele, die auf diese Weise angegeben sind, lösen.	1.LZ-Kontrolle
LZ G5	Ich kann aus Angabetexten herauslesen , was ich tun muß und die Lösung versuchen.	Nr.977 bis 980, 988 bis 993, 11.HÜ
LZ G6	Ich kann den Anstand eines Punktes von einer Geraden einzeichnen und abmessen.	1. LZ-Kontrolle 5.HÜ
LZ G7	Ich kann einen Punkt im Abstand vonmm zu einer Geraden einzeichnen.	
LZ D1	Ich kann große Zahlen lesen und richtig in Dreiergruppen anschreiben.	Buch S. 13,14 Nr. 40; Übungszettel 2.LZ-Kontrolle
LZ D2	Ich kann jede Zahl mit Ziffer und Stellenwert angeben.	Nr. 31, Übungszettel 2.LZ-Kontrolle
LZ D3	Ich kann aus der Angabe mit Ziffer und Stellenwert die Zahl aufschreiben und richtig lesen.	Nr. 32,33; 2.LZ- Kontrolle Übungszettel
LZ D4	Ich kann jede Zahl als Summe von dekadischen Einheiten darstellen.	Nr. 34 2.LZ-Kontrolle
LZ D5	Ich kann aus einer Summe von dekadischen Einheiten die Zahl richtig aufschreiben.	Nr. 35 2.LZ-Kontrolle

Erklärung: Die Nummernangaben beziehen sich auf das Mathematik Buch der 1. Klasse

Die Nummer der Hausübung ist dann angeführt, wenn sie nicht aus dem Buch genommen wurde, sondern dazu kopierte Zettel verwendet wurden.

1. Schularbeit am 21.Okt.97

Gruppe A

Punkte

	1.	Berechne:
4	a)	$345 - 67 - 89 + 154 - 8 =$
3	b)	$87 \cdot 96 =$
4	c)	$4\,235 : 77 =$
7	2.	Für einen Wandertag mußte jeder Schüler/jede Schülerin 34 Schilling für die Bahnfahrt und 25 S für Eintritt bezahlen. Aus der Klasse 1B gingen 26 Kinder mit. Wieviel Geld wurde insgesamt eingesammelt?
4	3.a)	Wie heißen folgende Zahlen in Zifferschreibweise? $7\text{ M } 3\text{ HT } 6\text{ T } 5\text{ Z} = \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad}$ $9\text{ Md } 6\text{ ZM } 5\text{ M } 2\text{ ZT } 5\text{ T} = \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad} \underline{\quad}$
3	b)	Schreibe die Zahl 762 500 als Summe von Vielfachen der dekadischen Einheiten.
4	c)	Schreibe mit Ziffern: Sechshundertzweiundachtzigmillionenfünfhundertzweitausendneunhundertneuntausendsechshundertsechzig
3	d)	Schreibe den Stellenwert unter die Ziffer 9 $9\,209 \quad 7\,239\,000\,000 \quad 106\,099$
4	4. a)	Welche Lage können die drei Geraden g,h und l zueinander haben? Zeichne 3 Möglichkeiten auf und schreibe dazu, wie viele Schnittpunkte es gibt!
4	b)	Zeichne den Abstand des Punktes A und des Punktes B von der Geraden g ein und gib an: $\overline{Ag} = \underline{\quad} \text{ mm}$ $\overline{Bg} = \underline{\quad} \text{ mm}$
4	c)	Zeichne eine Gerade h, die durch den Punkt C geht, und zwar so: $h \perp g$
4	d)	Zeichne eine zu g parallele Gerade l im Abstand 15 mm.

48

Zusatzaufgabe für alle flotten RechnerInnen: (3 Punkte)

Zeichne 4 Geraden, die genau 4 Schnittpunkte haben, und wo jeweils 2 Geraden parallel sind.

- Sehr gut: 45 bis 48 Punkte
- Gut: 39 bis 44 Punkte
- Befriedigend: 30 bis 38 Punkte
- Genügend: 24 bis 29 Punkte
- Nicht genügend: 0 bis 23 Punkte

Arbeitsplan für die Woche v. 15. bis 21. April

(Vorbereitung der 4. Schularbeit)

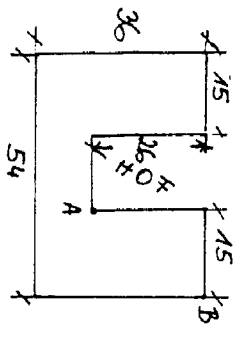
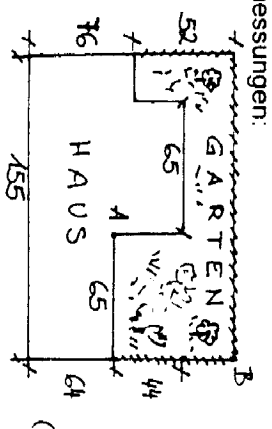
Name: _____

Lerninhalte		erledigt	Anmerkungen
1	Wiederholung:		
	Längenmaße:	Arbeitsblatt Puzzle (gelb)	
	Flächenmaße:	Arbeitsblatt	
2	Massemaße: t – kg – dag – g (dg – cg – mg)	Arbeitsblatt Kreispuzzle (lila)	
3	Multiplikation mit Dezimalzahlen:	Puzzle (orange) Arbeitsblatt Textaufgaben	
4	Textaufgaben zum Thema „Wohnen“	7 Beispiele	Suche Dir 3 verschiedenartige Beispiele aus!
5	Flächeninhalt zusammengesetzter Figuren	8 Aufgaben	Siehe Pkt. 4
6	Maßstab	8 Aufgaben	Siehe Pkt. 4

Lernziele zur 4. Schularbeit (30 Minuten)

1C

LZ D 10	Addieren und Subtrahieren v. Dezimalzahlen	Siehe 3. Schularbeit
LZ D 12	Längenmaße	
LZ D 13	Flächenmaße	
LZ D 14	Ich kann die Multiplikation mit und ohne Dezimalzahlen durchführen.	S. 128: Nr. 613 bis 623 * 624 bis 627, 629
LZ D 15	Ich kann die Massemaße mit Dezimalzahlen anschreiben und Umwandlungen durchführen.	S. 116 Nr. 543 bis 546 * 547, 548, 549
LZ G 14	Ich kann den Umfang und Flächeninhalt von zusammengesetzten Figuren berechnen	Nr. 1122, 1123, 1126, 1127, 1160, 1161
LZ G 15	Ich kann Textaufgaben zum Thema „Rund ums Wohnen “ lösen	Nr. 1115, 1116, 1117, 1118, * 1119, 1120, 1121
LZ G 16	Ich kann Entfernungen aus Karten und Plänen in wirkliche Längen umrechnen.	Nr. 1129, 1130, 1131, 1132, 1133, 1134, 1135
LZ G 17	Ich kann Pläne im angegebenen Maßstab zeichnen.	Nr. 1137, 1139, 1140, 1141, 1142, 1143, * 1145, 1146, * 1147 Nr. 1152, 1153, 1156, 1157, 1158, 1159, 1160, 1161, 1163

2	1. Wandle in die angegebene Einheit um: 2,5 t = _____ kg 73,5 dag = _____ g 650 g = _____ kg	1. Wandle in die angegebene Einheit um: 90 kg = _____ t 75 g = _____ kg 6,9 kg = _____ dag	3
2	2. Schreibe mehrnamig: 2,43 kg = _____ 6,7 m ² = _____ 7,502 m = _____	2. Schreibe mehrnamig: 48,75 t = _____ 0,045 m ² = _____ 2,4936 km = _____	3
2	3. Führe eine Überschlagsrechnung durch und setze dann das Komma an die richtige Stelle: 0,79 · 6,9 = 5 4 5 1 U: _____ 98,42 · 1200 = 1 1 8 1 0 4 U: _____	3. Führe eine Überschlagsrechnung durch und setze das Komma an die richtige Stelle: 6,1 · 0,02 = 1 2 2 U: _____ 37,5 · 218,2 = 8 1 8 2 5 U: _____	3
2	4. Ein Bauernhof hat folgende Abmessungen:  (Maße in m)	4. Eine Wohnhausanlage mit Garten hat folgende Abmessungen:  (Maße in m)	3
5	a) Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1 : 1000 an! b) Berechne den Flächeninhalt!	a) Fertige eine Zeichnung in einem sinnvollen Maßstab an! b) Berechne den Flächeninhalt!	5
6	** c) Miß die Länge der Strecke AB in deiner Zeichnung ab und berechne ihre wirkliche Länge!	** c) Berechne die Länge der Strecke AB in Wirklichkeit!	9
(3)	5. Auf einer Fläche von 3,5 x 6,7 m wird ein Teppichboden verlegt. 1 m ² kostet 169,90 S. Wie teuer kommt dieser Belag?	5. In der Küche wird eine Fläche von 2,5 x 0,6 m mit kleinen Fliesen (8x8cm) ausgelegt. Wieviel Stück sind dafür mindestens nötig?	(3)
7			10
34	**Zusatzaufgabe		48

Auszug aus einem Lernzielkatalog für die 4. Klasse

Lernziele für die 4. Klasse

Lernziele		Lernziele		Lernziele	
Lernziele		Lernziele		Lernziele	
Lernziele		Lernziele		Lernziele	
Lernziele		Lernziele		Lernziele	
RELLE ZAHLEN, WURZELN					
Mit reellen Zahlen arbeiten können	Reelle Zahlen auf der Zahlengeraden darstellen können	Zahlenbereichserweiterung verstehen	Näherungsweise berechnen können		
Potenzieren - Wurzelziehen	Zusammenhang zw. Potenzieren und Wurzelziehen erkennen	Wurzelwerte abschätzen können	Wurzeln graphisch darstellen können		
Rechnen mit Wurzeln	-----	Rechenregeln $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ und $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	Partielles Wurzelziehen		
GLEICHUNGEN					
Bruchgleichungen	Einfache Bruchgleichungen lösen können	Bruchgleichungen mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad			
Umgehen mit Formeln Ungleichungen	Formeln verschiedenen Schwierigkeitsgrades umformen können	Lösen und graphisch darstellen können	Prakt. Problemstellungen mit Ungleichungen lösen und interpretieren können		
Gleichungssysteme mit zwei Variablen	Rechnerisch lösen können	Graphisch lösen können	Das sinnvollste Lösungsverfahren erkennen und anwenden können		
Textaufgaben für Gleichungssysteme	-----	Einfache Aufgaben	Schwierigere Aufgaben (Bewegung-Mischung)		
GEOMETRIE					
Pythagoräischer Lehrsatz	Bei ebenen Figuren anwenden können	Bei geometrischen Körpern anwenden können	Höhen- u. Kathetensatz anwenden können	Einen Beweis wiedergeben können	

Erarbeitet von Mag. Christa Roitner u. Mag. Anna Döllner-Gundacker am 11. März 98 im Rahmen eines Seminars zum Thema „Lernzielorientierte Beurteilung“

Rückmeldung zur 1.Schularbeit

	Beispiel	in hohem Maß erreicht	im wesentlichen erfüllt	noch nicht erreicht
LZ W 1	1.a) b) c)			
LZ W 2	2.			
LZ G 3	4.a)			
LZ G 4	4.c)			
LZ G 5	4.d)			
LZ G 6	4.b)			
LZ D 1	3.c)			
LZ D 2	3.d)			
LZ D 3	3.a)			
LZ D 4	3.b)			

Hausübungen Nr. 1 bis 11 gemacht und zur Korrektur abgegeben: _____

Rückmeldung zur 4.Schularbeit

	Beispiel	in hohem Maß erreicht	im wesentlichen erfüllt	noch nicht erreicht
LZ D 15	1.			
LZ D 13 D 12	2.			
LZ D 14	3.			
LZ G 17 G 14	4.a) b.			
LZ G 15	5.			

Mag. Anna Döller-Gundacker unterrichtet Mathematik und Geografie am GRG 3, Hagenmüllerg.30, einer Pilotschule zum Lehrplan 99. Sie beschäftigt sich seit Jahren mit neuen Formen der Leistungsbeurteilung in ihrem Unterricht. Sie ist eine der LehrerInnen, die im Pilotprojekt die lernzielorientierte Leistungsbeurteilung im Sinne des zukünftigen Lehrplan 99 weiterentwickeln wollen.

Mag. Marliese Pick ist Bereichsleiterin am PI der Stadt Wien. Der Bereich „Erweiterte Lernformen“ umfasst offene Lernformen und neue Formen der Leistungsbeurteilung. Sie unterrichtet Mathematik und Physik am GRG 21, Franklinstr. 26 und setzt seit vielen Jahren offene Lernformen in ihrem Unterricht ein und hat dabei erkannt, dass neue Lernformen neue Wege in der Leistungsbeurteilung nach sich ziehen müssen.

Merkwürdige Dezimalzahlen

Michael Drmota, Wien

Zusammenfassung

Dezimalzahlen beinhalten viele Merkwürdigkeiten. Dies beginnt schon bei der Eigenschaft, daß $0.999999999 \dots = 1$ ist. Merkwürdig ist auch, daß die Periode einer periodischen Dezimalzahl nie länger ist als der Nenner der Bruchzahl, die sie darstellt. Selbst wenn man nur die Dezimalentwicklung von natürlichen Zahlen betrachtet, stößt man auf unerwartete Merkwürdigkeiten, z.B. bei der Ziffernsumme gewisser Zahlen. So ist etwa die Ziffernsumme der Zahlen

$$10^k - 1, 2 \cdot (10^k - 1), 3 \cdot (10^k - 1), \dots, 10^k \cdot (10^k - 1)$$

immer gleich der Ziffernsumme der ersten Zahl $10^k - 1 = 99 \dots 9$, nämlich $9k$. Ganz besonders merkwürdig sind *unendlich große* Dezimalzahlen. Beispielsweise hat die Gleichung $x^2 = x$ außer den *kleinen* Lösungen $x = 0$ und $x = 1$ noch zwei weitere, nämlich $x = \dots 9376$ und $x = \dots 0625$.

1 Die Dezimalentwicklung

Jede natürliche Zahl n läßt sich eindeutig als *Dezimalzahl*, d.h. in der Form

$$n = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0$$

darstellen, wobei die *Ziffern* a_j ($1 \leq j \leq k$) nur Werte aus der Menge

$$a_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

annehmen können, z.B.

$$n = 4723 = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3.$$

Bei negativen ganzen Zahlen $n < 0$ stellt man den Absolutbetrag $|n|$ in dieser Form dar und schreibt ein Minuszeichen davor: $-328 = -(3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 8)$.

Weiters hat jede positive reelle Zahl x auch eine (meist) *unendliche Dezimalentwicklung*, d.h.

$$\begin{aligned} x &= a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1 10 + a_0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + \dots \\ &= a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots, \end{aligned}$$

wobei die *Dezimalstellen* a_{-1}, a_{-2}, \dots wiederum nur Werte aus der Menge

$$a_{-j} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

annehmen. (Bei negativen reellen Zahlen x wird wieder der Betrag $|x|$ in dieser Weise dargestellt und ein Minuszeichen davorgeschrieben.)

Die Bestimmung der Dezimalstellen a_{-1}, a_{-2}, \dots erfolgt mittels Intervallschachtelung. Zunächst stellt man die reelle Zahl $x > 0$ durch $x = n + y$ dar, wobei n eine natürliche Zahl ist und y eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, genauer $0 \leq y < 1$. Die natürliche Zahl n hat eine Dezimaldarstellung wie oben. Man muß sich daher nur y näher betrachten. Zunächst zerlegt man das Intervall $[0, 1)$ in zehn Teilintervalle

$$[0, 1) = \left[0, \frac{1}{10}\right) \cup \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right) \cup \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{9}{10}, 1\right)$$

Liegt y etwa im Intervall $\left[\frac{5}{10}, \frac{6}{10}\right)$, so kann y durch

$$y = 5 \cdot 10^{-1} + y_1 \quad \text{mit} \quad 0 \leq y_1 \leq \frac{1}{10}$$

dargestellt werden. Im nächsten Schritt zerlegt man das Intervall $\left[0, \frac{1}{10}\right)$ in zehn Teilintervalle

$$\left[0, \frac{1}{10}\right) = \left[0, \frac{1}{100}\right) \cup \left[\frac{1}{100}, \frac{2}{100}\right) \cup \left[\frac{2}{100}, \frac{3}{100}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{9}{100}, \frac{1}{10}\right)$$

und entscheidet, in welchem dieser Teilintervalle y_1 liegt. Ist etwa $y_1 \in \left[\frac{2}{100}, \frac{3}{100}\right)$, so ist

$$y_1 = 2 \cdot 10^{-2} + y_2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq y_2 \leq \frac{1}{100}$$

Führt man dieses Verfahren k -mal durch, so gewinnt man eine Darstellung von y in der Form

$$y = a_{-1}10^{-1} + a_{-2}10^{-2} + \dots + a_{-k}10^{-k} + y_k$$

mit $0 \leq y_k < 10^{-k}$. Schließlich erhält man durch den Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ die gewünschte Darstellung.

Von besonderem Interesse sind periodische Dezimalentwicklungen.

Definition 1 Die Dezimalentwicklung

$$x = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots,$$

einer positiven reellen Zahl x heißt **periodisch**, wenn es natürliche Zahlen $l, m > 0$ gibt, so daß für alle $j > m$

$$a_{-j-l} = a_{-j}$$

ist.

Eine Dezimalentwicklung heißt **endlich**, wenn es eine natürliche Zahl m gibt, so daß für alle $j > m$

$$a_{-j} = 0$$

ist.

Periodische Dezimalentwicklungen haben daher die Gestalt

$$a_k \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m} \overline{a_{-m-1} a_{-m-2} \cdots a_{-m-l} a_{-m-1} a_{-m-2} \cdots a_{-m-l} a_{-m-1} \cdots}$$

Üblicherweise wird dies durch

$$a_k \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m} \overline{a_{-m-1} a_{-m-2} \cdots a_{-m-l}}$$

abgekürzt. Die Dezimalstellen $a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m}$ bilden die **Vorperiode** und die Dezimalstellen $a_{-m-1} a_{-m-2} \cdots a_{-m-l}$ die **Periode**. Man kann dabei die Vorperiode und die Periode kürzestmöglich wählen. l ist dann die **Länge der Vorperiode** und m die **Länge der Periode**.

Endliche Dezimalentwicklungen

$$a_k \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m} 0000 \cdots$$

werden durch

$$a_k \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m}$$

abgekürzt.

Satz 1 Eine reelle Zahl x ist genau dann eine rationale Zahl, wenn die ihre Dezimalentwicklung entweder endlich oder periodisch ist.

Weiters ist im Fall einer rationalen Zahl $x = \frac{p}{q}$ die Länge der Periode der Dezimalentwicklung kleiner als q .

Beweis. Bei rationalen Zahlen $x = \frac{p}{q}$ gelingt es, die Intervallschachtelung mit Hilfe des üblichen Divisionsalgorithmus durchzuführen. Sei $0 < x = \frac{p}{q} < 1$ mit natürlichen Zahlen p, q . Man bestimmt sukzessive $a_{-1}, a_{-2}, \dots \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und Reste r_1, r_2, \dots mit

$$\begin{aligned} 10p &= a_{-1}q + r_1 & (0 \leq r_1 < q) \\ 10r_1 &= a_{-2}q + r_2 & (0 \leq r_2 < q) \\ 10r_2 &= a_{-3}q + r_3 & (0 \leq r_3 < q) \\ &\vdots \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{a_{-1}}{10} + \frac{r_1}{10q} = a_{-1}10^{-1} + y_1 \\ y_1 &= \frac{r_1}{10q} = \frac{a_{-2}}{100} + \frac{r_2}{100q} = a_{-2}10^{-2} + y_2 \\ y_2 &= \frac{r_2}{100q} = \frac{a_{-3}}{1000} + \frac{r_3}{1000q} = a_{-3}10^{-3} + y_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Zahlen a_{-1}, a_{-2}, \dots bilden daher wirklich die Dezimalentwicklung von $x = \frac{p}{q}$.

Ist irgend ein Rest $r_j = 0$, so hat $x = \frac{p}{q}$ eine endliche Dezimalentwicklung. Im weiteren sei also vorausgesetzt, daß alle Reste $r_j > 0$ sind.

Es fällt auf, daß sobald ein Rest r_j feststeht, alle weiteren Dezimalstellen $a_{-j-1}, a_{-j-2}, \dots$ und alle weiteren Reste r_{j+1}, r_{j+2}, \dots durch r_j bestimmt sind. Die Dezimalentwicklung wird daher genau dann periodisch, wenn es zwei Reste r_{j_1}, r_{j_2} mit $j_1 \neq j_2$ gibt, die gleich sind: $r_{j_1} = r_{j_2}$. Wäre die Dezimalentwicklung von $x = \frac{p}{q}$ nicht periodisch, so müßten alle Reste r_j voneinander verschieden sein. Da für die Reste r_j nur die Zahlen $\{1, 2, \dots, q-1\}$ in Frage kommen, müssen unter q aufeinanderfolgenden Resten $r_j, r_{j+1}, \dots, r_{j+q-1}$ wenigstens zwei gleich sein. Demnach ist die Dezimalentwicklung von $x = \frac{p}{q}$ periodisch, und die Länge der Periode kleiner als q .

Ist andererseits die Dezimalentwicklung einer Zahl $x \in [0, 1)$ periodisch,

$$x = 0.a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}\overline{a_{-m-1}a_{-m-2}\cdots a_{-m-l}}$$

so ist

$$\begin{aligned} 10^{m+l}x - 10^m x &= a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}a_{-m-1}\cdots a_{-m-l} \cdot \overline{a_{-m-1}a_{-m-2}\cdots a_{-m-l}} \\ &\quad - a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m} \cdot \overline{a_{-m-1}a_{-m-2}\cdots a_{-m-l}} \\ &= a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}a_{-m-1}\cdots a_{-m-l} - a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m} \end{aligned}$$

bzw.

$$x = \frac{p}{q}$$

mit

$$p = a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}a_{-m-1}a_{-m-2}\cdots a_{-m-l} - a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m}$$

und

$$q = 10^{m+l} - 10^m.$$

Damit ist x rational. \square .

Reelle Zahlen mit einer endliche Dezimalentwicklungen sind sicherlich rationale Zahlen. Sie können besonders leicht charakterisiert werden.

Satz 2 Eine reelle Zahl x besitzt genau dann eine endliche Dezimalentwicklung, wenn sie rational ist und in der gekürzten Darstellung $x = \frac{p}{q}$ (als Bruch ganzer Zahlen p, q) der Nenner q nur 2 und/oder 5 als Primfaktoren hat.

Beweis. Offensichtlich ist eine reelle Zahl x mit endlicher Dezimalentwicklung

$$x = a_k \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m+l}$$

in der Form

$$x = \frac{Z}{10^m}$$

mit einer ganzen Zahl

$$Z = a_k 10^{k+m} + a_{k-1} 10^{k+m-1} + \cdots + a_0 10^m + a_{-1} 10^{m-1} + \cdots + a_{-m}$$

darstellbar. In der gekürzten Darstellung $x = \frac{p}{q}$ können also nur die Primfaktoren 2 und 5 im Nenner q auftreten.

Ist andererseits $x = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl von dieser Gestalt, so lassen sich Zähler und Nenner geeignet erweitern, so daß

$$x = \frac{Z}{10^m}$$

ist, woraus sich sofort eine endliche Dezimaldarstellung ergibt. \square .

Ein großer Vorteil der Dezimalentwicklung reeller Zahlen ist, daß man allein aus der Kenntnis der Dezimalentwicklung von zwei reellen Zahlen x, y alle Grundrechenoperationen $x + y, x - y, x \cdot y$ und x/y durchführen kann, indem man die Dezimalentwicklung des Ergebnisses angibt. Zur Demonstration soll (der Anfang) der Dezimalentwicklung von $\pi + e$ berechnet werden:

$$\begin{array}{r}
3.141592653 \dots \\
+ \quad \underline{2.718281828 \dots} \\
\hline
5.85987448 \dots
\end{array}$$

Man beachte, daß man, wenn man nicht alle Dezimalstellen von $x (= \pi)$ und $y (= e)$ zur Verfügung hat, beim Ergebnis $x + y$ nicht so viele Dezimalstellen berechnen kann wie bei x bzw. y bekannt sind, da nicht bekannt ist, ob bei der nächsten (unbekannten) Stelle ein Übertrag aufgetreten ist oder nicht. Wenn man nicht alle Stellen kennt, kann es auch passieren, daß man über das Ergebnis keine genaue Auskunft gewinnt. Im Beispiel

$$\begin{array}{r}
0.48294246 \dots \\
+ \quad \underline{0.51705753 \dots} \\
\hline
0.???? \dots
\end{array}$$

kann das Ergebnis nur aus der Kenntnis der angegebenen Dezimalstellen nicht angegeben werden, da sich alle bekannten Dezimalstellen auf 9 ergänzen.

2 $x = 0.9999 \dots$

Wie am Ende des vorigen Abschnitts an einem Beispiel angedeutet wurde, ist eine reelle Zahl, deren Dezimalentwicklung ausschließlich aus $a_{-j} = 9$ besteht, von besonderem Interesse. Es zeigt sich nämlich, daß $x = 0.9999 \dots = 1 = 1.0000 \dots$ ist. Damit ist die Dezimalentwicklung reeller Zahlen nicht eindeutig. Das im vorigen Abschnitt beschriebene Intervallschachtelungsverfahren hätte für $x = 1$ die Dezimalentwicklung $x = 1.0000 \dots$ geliefert. Die Dezimalentwicklung $0.9999 \dots$ kann in durch das eben erwähnte Intervallschachtelungsverfahren nicht entstehen.

Es soll zunächst untersucht werden, warum eine Zahl x mit der Dezimalentwicklung $x = 0.9999 \dots$ tatsächlich 1 ist. Dafür werden vier verschiedene Begründungen gegeben.

Satz 3 $0.9999 \dots = 1$.

1. **Beweis.** Aus dem Divisionsalgorithmus ergibt sich, daß die rationalen Zahlen $x = \frac{1}{3}$ bzw. $y = \frac{2}{3}$ die periodischen Dezimalentwicklungen

$$\begin{aligned}
x &= 0.3333 \dots = \sum_{j=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-j}, \\
y &= 0.6666 \dots = \sum_{j=1}^{\infty} 6 \cdot 10^{-j}
\end{aligned}$$

haben. Die Summe ist

$$\begin{aligned}x + y &= \sum_{j=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-j} + \sum_{j=1}^{\infty} 6 \cdot 10^{-j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} = 0.9999 \dots\end{aligned}$$

Andererseits ist $x + y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$. \square

2. Beweis. Hat x die Dezimalentwicklung

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} = 0.9999 \dots,$$

so hat $10x$ die Dezimalentwicklung

$$\begin{aligned}10x &= 10 \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} = \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j+1} \\ &= 9 + \sum_{j=2}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j+1} = 9 + \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} \\ &= 9.9999 \dots\end{aligned}$$

Die Differenz $10x - x = 9x$ ist daher durch

$$10x - x = 9 + \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} - \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} = 9$$

gegeben. Also ist $x = 1$. \square

3. Beweis. Aus der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

erhält man für $x = 0.9999 \dots$

$$\begin{aligned}x &= \sum_{j=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-j} = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \\ &= \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1. \quad \square\end{aligned}$$

4. Beweis. Betrachtet man die Zahlen

$$x_k = 0.999 \dots 9 = \sum_{j=1}^k 9 \cdot 10^{-j},$$

so gilt sicherlich $x_k \leq 1$. Daher ist auch

$$x = 0.9999 \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \leq 1.$$

Angenommen, x wäre nicht 1, sondern kleiner als 1, dann gäbe es eine reelle Zahl y , z.B. $y = (x + 1)/2$, die zwischen x und 1 liegt:

$$x < y < 1.$$

Dies müßte sich auch bei der Dezimalentwicklung von y widerspiegeln. Wegen $y < 1$ muß diese mit $y = 0.\dots$ beginnen und kann wegen $x \neq y$ nicht nur aus 9-en bestehen. Daher gibt es eine Dezimalstelle von y , die kleiner ist als 9, was aber $y > x$ widerspricht. Die Annahme $x < 1$ ergibt einen Widerspruch. Demnach muß $x = 1$ sein. \square .

3 Die Länge der Periode

Im ersten Abschnitt wurde gezeigt, daß genau die rationalen Zahlen eine periodische Dezimalentwicklung haben und daß die Länge der Periode immer kleiner ist als der Nenner. In diesem Abschnitt sollen nun die Längen der Vorperiode m und die der Periode l genau angegeben werden.

Dazu muß man nur den Beweis von Satz 1 ein wenig genauer betrachten. Übrigens heißt eine Dezimalzahl ohne Vorperiode **reinperiodisch**.

Satz 4 Sei $x = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl in gekürzter Darstellung. Dann ist die Länge der Vorperiode m der Dezimalentwicklung von x das Maximum der Vielfachheiten von 2 bzw. 5 in der Primfaktorenzerlegung des Nenners q .

Demnach hat eine rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ (in gekürzter Darstellung) genau dann eine reinperiodische Dezimalentwicklung, wenn der Nenner q weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist.

Beweis. Zunächst betrachte man eine rationale Zahl x , deren Dezimalentwicklung Vorperiode der Länge m und Periode der Länge l hat, d.h.

$$x = 0.a_{-1} \dots a_{-m} \overline{a_{-m-1} \dots a_{-m-l}}.$$

(Da durch Addition bzw. Subtraktion ganzer Zahlen der Nenner nicht verändert wird, kann man sich auf rationale Zahlen $x = \frac{p}{q}$ mit $0 < x < 1$ beschränken.) Im Beweis von Satz 1 wurde gezeigt, daß x dann die Darstellung

$$x = \frac{Z}{N} = \frac{a_{-1} \dots a_{-m} a_{-m-1} \dots a_{-m-l} - a_{-1} \dots a_{-m}}{10^m (10^l - 1)}$$

besitzt. Man beachte, daß der Nenner $N = 10^m (10^l - 1)$ die Primzahlen 2 und 5 genau mit Vielfachheit m besitzt, da der Faktor $10^l - 1$ weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist. Weiters beachte man, daß $a_{-m} \neq a_{-m-l}$ sein muß, da sonst die Vorperiode verkürzt werden könnte. Daher ist der Zähler Z nicht durch 10 teilbar. Geht man nun von der Darstellung $x = \frac{Z}{N}$ zur gekürzten $x = \frac{p}{q}$ über, so kann daher nicht gleichzeitig durch 2 und durch 5 gekürzt werden. Die maximale Ordnung von 2 bzw. 5 in der Primfaktorenzerlegung von q ist daher wieder m .

Sei nun umgekehrt $x = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl in gekürzter Darstellung, wobei die maximale Ordnung von 2 bzw. 5 in der Primfaktorenzerlegung von q gleich m

ist. Durch Multiplikation mit 10^m , d.h. man betrachtet $x' = 10^m x = \frac{p'}{q'}$ können die Primfaktoren 2 und 5 des Nenners vollständig gekürzt werden, d.h. q' ist nun weder durch 2 noch durch 5 teilbar. Außerdem bewirkt die Multiplikation mit 10^m eine Verschiebung der Dezimalentwicklung:

$$\begin{aligned} x &= a_k \cdots a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m} a_{-m-1} \cdots, \\ 10^m x &= a_k \cdots a_0 a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m} . a_{-m-1} a_{-m-2} \cdots. \end{aligned}$$

Das heißt, die Dezimalentwicklung von x hat genau dann eine Vorperiode der Länge m , wenn $x' = 10^m x$ reinperiodisch ist.

Es muß also nur mehr gezeigt werden, daß eine rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ mit der Eigenschaft, daß der Nenner q weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist, reinperiodisch ist. (Wieder kann man sich auf den Fall $0 < x < 1$ beschränken.) Dazu betrachte man noch einmal die Divisionskette

$$\begin{aligned} 10p &= a_{-1}q + r_1 & (0 \leq r_1 < q) \\ 10r_1 &= a_{-2}q + r_2 & (0 \leq r_2 < q) \\ 10r_2 &= a_{-3}q + r_3 & (0 \leq r_3 < q) \\ &\vdots \end{aligned}$$

aus dem Beweis von Satz 1. Dort wurde beobachtet, daß die Kenntnis eines Restes r_j die weiteren Reste r_{j+1}, r_{j+2}, \dots und die Dezimalstellen $a_{-j-1}, a_{-j-2}, \dots$ eindeutig bestimmt. Wenn q teilerfremd zu 10 ist, so wie in dem gerade betrachteten Fall, gilt auch die Umkehrung. Aus der Kenntnis eines Restes r_j lassen sich alle vorigen Reste r_{j-1}, r_{j-2}, \dots und natürlich die Ziffern $a_{-j+1}, a_{-j+2}, \dots$ bestimmen. Dies folgt aus der folgenden Überlegung. Ist etwa r_3 bekannt, so folgt aus der Gleichung $10r_2 = a_{-3}q + r_3$

$$10r_2 \equiv r_3 \pmod{q}.$$

Da q zu 10 teilerfremd ist, hat diese Kongruenz eine eindeutige Lösung $r_2 \pmod{q}$. Wegen der Bedingung $0 \leq r_2 < q$ ist r_2 dadurch eindeutig bestimmt. Daraus ergibt sich natürlich auch

$$a_{-3} = \frac{10r_2 - r_3}{q}$$

etc. Die Reste r_1, r_2, r_3, \dots bilden daher eine reinperiodische Folge, womit die Dezimalstellen $a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, \dots$ auch reinperiodisch sein müssen. \square

Satz 5 Sei $x = \frac{p}{q}$ die gekürzte Darstellung einer rationalen Zahl und $q = 2^{m_1} 5^{m_2} q'$, wobei q' weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist. Dann ist die Länge der Periode der Dezimalentwicklung von x genau l , wenn

$$q' \nmid 10 - 1, q' \nmid 10^2 - 1, \dots, q' \nmid 10^{l-1} - 1,$$

aber

$$q' \mid 10^l - 1.$$

Beweis. Wegen der Zerlegung $q = 2^{m_1} 5^{m_2} q'$ hat $x = \frac{p}{q}$ eine Vorperiode der Länge $m = \max(m_1, m_2)$, und die Zahl $x' = 10x = \frac{p'}{q'}$ ist reinperiodisch mit derselben Periode wie x . Es genügt also, x' zu betrachten, und da die Addition bzw. Subtraktion ganzer Zahlen weder Auswirkung auf die Periode noch auf den Nenner hat, kann man sogar $0 < x' < 1$ fordern.

Ist nun k die Länge einer Periode der Dezimalentwicklung von $x' = \frac{p'}{q'}$, d.h.

$$x' = 0.\overline{a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-k}},$$

dann gilt

$$x' = \frac{a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-k}}{10^k - 1}.$$

Die gekürzte Darstellung von x ist $\frac{p'}{q'}$, also muß q' ein Teiler von $10^k - 1$ sein:

$$q' | 10^k - 1.$$

Ist andererseits q' ein Teiler von $10^k - 1$ für ein $k \geq 1$, so kann x' in der Gestalt

$$x' = \frac{p'}{q'} = \frac{p' \frac{10^k - 1}{q'}}{10^k - 1} = \frac{Z}{10^k - 1}$$

dargestellt werden, wobei Z eine natürliche Zahl $< q' \leq 10^k - 1$ ist. Sind $b_{k-1}, b_{k-2}, \dots, b_0$ die Ziffern von Z , d.h.

$$Z = b_{k-1}10^{k-1} + b_{k-2}10^{k-2} + \cdots + b_0 = b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_0,$$

so bildet $b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_0$ eine Periode der Dezimalentwicklung von x' :

$$x' = 0.\overline{b_{k-1}b_{k-2}\cdots b_0}.$$

Daher muß die kleinstmögliche Länge einer Periode, also l , die im Satz formulierten Bedingungen erfüllen. \square

Dieser Satz gibt uns auch die Möglichkeit, jene rationale Zahlen $x = \frac{p}{q}$ zu charakterisieren, deren Periodenlänge l größtmöglich, also $l = q - 1$ ist.

Satz 6 Die Länge der Periode der Dezimalentwicklung einer rationalen Zahl $x = \frac{p}{q}$ ist genau dann $q - 1$, wenn q eine Primzahl ist, die von 2 und 5 verschieden ist und die Bedingungen

$$q \nmid 10 - 1, \quad q \nmid 10^2 - 1, \quad \dots, \quad q \nmid 10^{q-2} - 1 \quad (1)$$

erfüllt sind.

Beweis. Wenn q eine Primzahl ungleich 2 und 5 ist, die (1) erfüllt hat $x = \frac{p}{q}$ wegen Satz 5 sicherlich Periodenlänge $l \geq q - 1$. Da die Periodenlänge immer $l \leq q - 1$ sein muß, folgt $l = q - 1$.

Sei nun andererseits $x = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl, deren Periodenlänge $l = q - 1$ ist. Dann muß einerseits $x = \frac{p}{q}$ in durchgekürzter Darstellung vorliegen und die Dezimalentwicklung reinperiodisch sein. (Anderfalls wäre die Periodenlänge sicherlich

$< q - 1$.) q ist daher weder durch 2 noch durch 5 teilbar. Aus dem kleinen Fermatschen Satz folgt daher

$$q | 10^{\varphi(q)} - 1,$$

wobei $\varphi(q)$ die Eulersche φ -Funktion bezeichnet. Ist

$$q = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$$

die Primfaktorenzerlegung von q , so berechnet sich die Eulersche φ -Funktion zu

$$\varphi(q) = p_1^{r_1-1} (p_1 - 1) p_2^{r_2-1} (p_2 - 1) \cdots p_k^{r_k-1} (p_k - 1).$$

Insbesondere gilt für Primzahlen $\varphi(q) = q - 1$ und für Nichtprimzahlen $\varphi(q) < q - 1$. Damit ist für Nichtprimzahlen q die Periodenlänge sicherlich durch

$$l \leq \varphi(q) < q - 1$$

beschränkt. Daher muß im Fall maximaler Periodenlänge der Nenner von $x = \frac{p}{q}$ eine Primzahl sein. Die Bedingungen (1) ergeben sich schließlich direkt aus Satz 5. \square

Die Bedingungen (1) aus Satz 6 scheinen sehr einschränkend zu sein. Umso überraschender ist es, daß es offensichtlich viele Primzahlen q gibt, die diese Bedingungen erfüllen. Bis 100 sind dies beispielsweise die Primzahlen

7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97.

Die Dezimalentwicklungen von $x = \frac{1}{q}$ sind durch

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857},$$

$$\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647},$$

$$\frac{1}{19} = 0.\overline{052631578947368421},$$

$$\frac{1}{23} = 0.\overline{0434782608695652173913},$$

$$\frac{1}{29} = 0.\overline{0344827586206896551724137931},$$

$$\frac{1}{47} = 0.\overline{0212765957446808510638297872340425531914893617},$$

$$\frac{1}{59} = 0.\overline{01694915254237288135593220338}$$

$$\overline{98305084745762711864406779661},$$

$$\frac{1}{61} = 0.\overline{016393442622950819672131147540}$$

$$\overline{983606557377049180327868852459},$$

$$\frac{1}{97} = 0.\overline{010309278350515463917525773195876288659793814432}$$

$$\overline{989690721649484536082474226804123711340206185567}.$$

Die Bedingungen (1) aus Satz 6 können auch anders formuliert werden, nämlich, daß

$$10 \not\equiv 1 \pmod{q}, 10^2 \not\equiv \pmod{q}, \dots, 10^{q-2} \not\equiv 1 \pmod{q}$$

gilt. Wegen des kleinen Fermatschen Satzes ist überdies

$$10^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Das bedeutet, daß $a = 10$ Primitivwurzel modulo q ist. Es ist wohlbekannt, daß es, wenn q eine Primzahl ist, unter den Zahlen $1, 2, \dots, q-1$ genau $\varphi(q-1)$ Primitivwurzeln a gibt, d.h.

$$a \not\equiv 1 \pmod{q}, a^2 \not\equiv \pmod{q}, \dots, a^{q-2} \not\equiv 1 \pmod{q}$$

und

$$a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Damit kann man aber nicht ablesen, wie oft eine konkrete Zahl a (z.B. $a = 10$) Primitivwurzel ist. Es wird vermutet (*Artinsche Vermutung*), daß es zu jeder natürlichen Zahl $a \geq 2$ unendlich viele Primzahlen q gibt, für die a Primitivwurzel ist. Es wird nicht daran gezweifelt, daß diese Vermutung richtig ist. Man kann daher mit großer Sicherheit davon ausgehen, daß $a = 10$ für unendlich viele Primzahlen Primitivwurzel ist, bzw. daß es unendliche viele Primzahlen q gibt, für die die Periode der Dezimalentwicklung von $x = \frac{10}{q}$ maximale Länge $q-1$ hat. Wenn sogar eine etwas weitergehende Vermutung korrekt ist, hat sogar (im Durchschnitt) etwa jede dritte Primzahl diese Eigenschaft, es scheint, als wäre maximale Periodenlänge ein durchaus häufiges Phänomen zu sein.

Die Periode der Dezimalentwicklung von rationalen Zahlen mit maximaler Periodenlänge birgt noch eine Reihe von Merkwürdigkeiten. Dies soll zunächst am Beispiel des Nenners $q = 7$ demonstriert werden. Dazu betrachte man die zunächst die Dezimalentwicklungen der Zahlen $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{6}{7}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= 0.\overline{142857}, \\ \frac{2}{7} &= 0.\overline{285714}, \\ \frac{3}{7} &= 0.\overline{428571}, \\ \frac{4}{7} &= 0.\overline{571428}, \\ \frac{5}{7} &= 0.\overline{714285}, \\ \frac{6}{7} &= 0.\overline{857142}. \end{aligned}$$

Es fällt auf, daß bei den Perioden nicht nur dieselben Ziffern auftreten, sondern daß sie durch zyklische Vertauschung der erste Periode 142857 hervorgehen. Dies gilt ganz allgemein.

Satz 7 Sei $a_{-1}a_{-2}\dots a_{-q+1}$ die Periode der Dezimalentwicklung von $x = \frac{1}{q}$, wobei q eine Primzahl ist, für die 10 Primitivwurzel ist. Dann entsteht die Periode der Dezimalentwicklung der rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ ($1 \leq p \leq q-1$) durch zyklische Vertauschung

von $a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-q+1}$, wobei jede Ziffer a_{-j} ($1 \leq j \leq q-1$) genau einmal an erster Stelle steht.

Beweis. Periodische Dezimalentwicklungen mit maximaler Periode zeichnen sich dadurch aus, daß in der Divisionskette

$$\begin{aligned} 10 &= a_{-1}q + r_1 & (0 \leq r_1 < q) \\ 10r_1 &= a_{-2}q + r_2 & (0 \leq r_2 < q) \\ 10r_2 &= a_{-3}q + r_3 & (0 \leq r_3 < q) \\ &\vdots \end{aligned}$$

zur Berechnung der Dezimalentwicklung $0.a_{-1}a_{-2}\cdots$ von $x = \frac{1}{q}$ die Reste r_1, r_2, \dots, r_{q-1} genau die Zahlen $1, 2, \dots, q-1$ sind.

Sei nun $1 \leq p \leq q-1$ und $1 \leq j_0 \leq q-1$ jener Index mit

$$r_{j_0} = p.$$

Bestimmt man nun die Reste r'_j in der Divisionskette

$$\begin{aligned} 10p &= a'_{-1}q + r'_1 & (0 \leq r'_1 < q) \\ 10r'_1 &= a'_{-2}q + r'_2 & (0 \leq r'_2 < q) \\ 10r'_2 &= a'_{-3}q + r'_3 & (0 \leq r'_3 < q) \\ &\vdots \end{aligned}$$

zur Bestimmung der Dezimalentwicklung $0.a'_{-1}a'_{-2}\cdots$ von $\frac{p}{q}$, so gilt offensichtlich

$$a'_{-1} = a_{-j_0-1} \quad \text{und} \quad r'_1 = r_{j_0+1}$$

und damit für alle $k \geq 1$

$$a'_{-k} = a_{-j_0-k} \quad \text{und} \quad r'_k = r_{j_0+k}.$$

Damit geht die Periode $a'_{-1}a'_{-2}\cdots a'_{-q+1}$ von $\frac{p}{q}$ durch zyklische Vertauschung der Periode $a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-q+1}$ von $x = \frac{1}{q}$ hervor. Da alle Zahlen $\frac{p}{q}$ ($1 \leq p \leq q-1$) voneinander verschieden sind, müssen auch die Dezimalentwicklungen voneinander verschieden sein, jede Ziffer aus der Periode $a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-q+1}$ von $x = \frac{1}{q}$ kommt daher genau einmal an die erste Stelle. \square

Die Perioden der Brüche $\frac{p}{q}$ ($1 \leq p \leq q-1$) können daher auch zur Aufstellung eines (fast) magischen Quadrats verwendet werden. Zum Beispiel sind die Zeilen- und Spaltensummen des Schemas

1	4	2	8	5	7
2	8	5	7	1	4
4	2	8	5	7	1
5	7	1	4	2	8
7	1	4	2	8	5
8	5	7	1	4	2

alle gleich 27, da in jeder Zeile und Spalte dieselben Zahlen stehen. Die Summe der Elemente der Hauptdiagonale ist 31, wogegen die der Nebendiagonale 23 ist, d.h. es ist nicht wirklich ein magisches Quadrat, allerdings ist der arithmetische Mittelwert von 31 und 23 wieder $27 = \frac{1}{2}(31 + 23)$. Führt man dasselbe Verfahren bei $q = 19$ durch, ergibt sich sogar ein Quadrat, wo beide Diagonalsummen gleich den Spalten- bzw. Zeilensummen sind.

Bei der Betrachtung der Periode 142857 von $x = \frac{1}{7}$ fällt auf, daß $28 = 2 \cdot 14$ und $57 = 2 \cdot 28 + 1$ ist, also eine gewisse *Regelmäßigkeit* vorliegt. Das ist offensichtlich kein Zufall, denn verdoppelt man 14 sukzessive und addiert die Ergebnisse jeweils um 2 Stellen nach rechts versetzt, so entsteht tatsächlich die Dezimalentwicklung von $x = \frac{1}{7}$:

$$\begin{array}{r}
 14 \\
 28 \\
 56 \\
 112 \\
 224 \\
 448 \\
 896 \\
 1792 \\
 \dots \\
 \hline
 142857142857\dots
 \end{array}$$

Eine Begründung diese *Phänomens* ist leicht zu geben. Interpretiert man diese Addition als Addition von Dezimalzahlen, so folgt mittels der Summenformel für die geometrische Reihe daß die Summe $\frac{1}{7}$ ist:

$$\begin{aligned}
 14 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 14 \cdot 10^{-4} + 2^2 \cdot 14 \cdot 10^{-6} + \dots &= \frac{14}{100} \left(1 + \frac{2}{100} + \left(\frac{2}{100}\right)^2 + \dots \right) \\
 &= \frac{14}{100} \frac{1}{1 - \frac{2}{100}} = \frac{1}{7}.
 \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise können die Potenzen von 3 addiert werden, und man gelangt wieder zur Dezimalentwicklung von $\frac{1}{7}$:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 3 \\
 9 \\
 27 \\
 81 \\
 243 \\
 729 \\
 2187 \\
 6561 \\
 19683 \\
 \hline
 142857
 \end{array}$$

Wieder gelingt der Nachweis mit Hilfe durch Interpretation dieser Addition als Addition von Dezimalzahlen:

$$\begin{aligned} 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3^2 \cdots 10^{-3} + \cdots &= \frac{1}{10} \left(1 + \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10} \right)^2 + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{3}{10}} = \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Betrachtet man die oben angeführten Dezimalentwicklungen der Zahlen $\frac{1}{7}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \dots$, so fällt auf, daß bei Unterreilung der Periode in zwei gleich lange Blöcke der zweite Block durch *Spiegelung* des ersten entsteht, das soll heißen, die entsprechenden Ziffern ergänzen einander auf 9:

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}, \quad 1 + 8 = 9, \quad 4 + 5 = 9, \quad 2 + 7 = 9.$$

Dieses Phänomen tritt aber nicht nur bei periodischen Dezimalentwicklungen mit maximaler Länge auf:

$$\frac{1}{13} = 0.\overline{076923}, \quad 0 + 9 = 9, \quad 7 + 2 = 9, \quad 6 + 3 = 9.$$

Tatsächlich gilt dies immer, wenn der Nenner eine Primzahl ist und die Periode gerade Länge hat.

Satz 8 Ist q eine Primzahl verschieden von 2 und 5 und $1 \leq p \leq q - 1$ und ist die Länge l der Periode der Dezimalentwicklung von $x = \frac{p}{q}$ gerade, dann ergänzen einander die j -te Dezimalstelle a_{-j} mit der $(j + \frac{l}{2})$ -ten Dezimalstelle $a_{-j-(l/2)}$ für alle $j \geq 1$ auf 9:

$$a_{-j} + a_{-j-(l/2)} = 9.$$

Beweis. Wegen Satz 7 muß diese Eigenschaft nur für $x = \frac{1}{q}$ gezeigt werden, und hier reicht es zu zeigen, daß für die Dezimalstellen a_{-j} ($1 \leq j \leq l$) der Periode

$$a_{-1} + a_{-1-(l/2)} = a_{-2} + a_{-2-(l/2)} = \cdots = a_{-l/2} + a_{-l} = 9$$

gilt. Wegen

$$\frac{1}{q} = \frac{a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-l}}{10^l - 1}$$

ist auch

$$q \cdot (a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-l}) = 10^l - 1 = (10^{l/2} - 1)(10^{l/2} + 1).$$

Da l die Periodenlänge ist, gilt sicherlich $q \nmid 10^{l/2} - 1$. Da q eine Primzahl ist, muß daher $a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-l}$ ein Vielfaches von $10^{l/2} - 1$ sein. Es gibt daher ein $k < 10^{l/2}$ mit

$$a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-l} = k(10^{l/2} - 1).$$

Nun besagt Satz 11 des nächsten Abschnitts gerade, daß die Ziffern von Vielfachen von $10^m - 1$ gerade die geforderte Eigenschaft besitzen. \square

$$4 \quad x = 10^k - 1 = 99 \dots 9$$

Zahlen, deren Ziffern alle 9 sind, beinhalten besonders viele Merkwürdigkeiten. Einige davon sollen in diesem Abschnitt vorgestellt werden. Betrachtet man etwa die Primfaktorenzerlegungen von den Zahlen $999 \dots 9 = 10^k - 1$:

$9 = 3^2$	$10^7 - 1 = 3^2 \cdot 239 \cdot 4649$
$99 = 3^2 \cdot 11$	$10^8 - 1 = 3^2 \cdot 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137$
$999 = 3^3 \cdot 37$	$10^9 - 1 = 3^4 \cdot 37 \cdot 333667$
$10^4 - 1 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$	$10^{10} - 1 = 3^2 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 9091$
$10^5 - 1 = 3^2 \cdot 41 \cdot 271$	$10^{11} - 1 = 3^2 \cdot 21649 \cdot 513239$
$10^6 - 1 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$	$10^{12} - 1 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901,$

so häufen sich zwar gewisse Primteiler, es treten aber immer neue auf. Tatsächlich treten alle möglichen Teiler irgendwann einmal auf.

Satz 9 Zu jeder natürlichen Zahl q , die weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist, gibt es ein k , so daß q Teiler von $10^k - 1 = 999 \dots 9$ ist.

Beweis. Ist $a_{-1}a_{-2} \dots a_{-l}$ die Periode der Dezimalentwicklung der rationalen Zahl $x = \frac{1}{q}$, so ist auch

$$x = \frac{1}{q} = \frac{a_{-1}a_{-2} \dots a_{-l}}{10^l - 1}$$

bzw.

$$q \cdot (a_{-1}a_{-2} \dots a_{-l}) = 10^l - 1.$$

Daher ist q ein Teiler von $10^l - 1$. Man kann daher $k = l$ setzen. \square

Beispielsweise ist 7 ein Teiler von $10^6 - 1 = 999999$ und es gilt

$$7 \cdot 142857 = 999999.$$

Also ist auch 142857 ein Teiler von 999999. Quadriert man diese Zahl und teilt man die Ziffern des Resultats in zwei Blöcke der Länge 6, so ist die Summe dieser Blöcke wieder 142857:

$$142857^2 = 20408122449 \quad \text{und} \quad 20408 + 122449 = 142857.$$

Diese Eigenschaft ist interessanterweise für sehr viele Zahlen erfüllt.

Satz 10 Ist q ein Teiler von $10^k - 1$ und stellt man das Quadrat von q durch

$$q^2 = a10^k + b \quad \text{mit} \quad 0 \leq b < 10^k$$

dar, dann ist q ein Teiler von $a + b$.

Beweis. Mit der Festlegung $10^k - 1 = pq$ erhält man

$$q^2 = a10^k + b = a(qp + 1) + b = (a + b) + apq$$

bzw.

$$a + b = q(q - ap).$$

Also ist $a + b$ durch q teilbar. \square

Insbesondere ist $a + b = q$, wenn $q - a(10^k - 1)/q = 1$ ist. Dies ist bei $q = 142857$ und $k = 6$ der Fall.

Schließlich betrachte man die Vielfachen von $999 \cdots 9 = 10^k - 1$, etwa im Fall $k = 3$:

$1 \cdot 999 =$	999	$537 \cdot 999 =$	536 463
$2 \cdot 999 =$	1 998	$712 \cdot 999 =$	711 288
$3 \cdot 999 =$	2 997	$999 \cdot 999 =$	998 001
$58 \cdot 999 =$	57 942	$1238 \cdot 999 =$	1 236 762
$143 \cdot 999 =$	142 857	$2457 \cdot 999 =$	2 454 543

Es fällt auf, daß die Ziffernsumme bei allen Vielfachen 27 beträgt. Weiters haben die Vielfachen bis 999 die Eigenschaft, daß sich die erste und die vierte Ziffer, die zweite und die fünfte und schließlich die dritte und die sechste Ziffer auf 9 ergänzen. (Daraus folgt natürlich auch, daß die Ziffernsumme in diesen Fällen 27 ist.) Bei den Vielfachen > 1000 ist keine derartige Struktur erkennbar. Daß die Ziffernsumme wiederum oft 27 ist, liegt daran, daß sie bei Vielfachen von $999 = 9 \cdot 111$ immer durch 9 teilbar sein muß und bei 6 bis 7 Dezimalstellen die *erwartete* Ziffernsumme eben 27 ist.

Satz 11 Unterteilt man die Ziffern $a_{2k-1} \cdots a_k a_{k-1} \cdots a_0$ von $l \cdot (10^k - 1)$ für $1 \leq l \leq 10^k$ in zwei Blöcke der Länge k , so ergänzen die entsprechenden Ziffern dieser beiden Blöcke jeweils auf 9:

$$a_0 + a_k = a_1 + a_{k+1} = \cdots = a_{k-1} + a_{2k-1} = 9.$$

Insbesondere ist die Ziffernsumme aller dieser Zahlen $9k$.

Beweis. Aus der Gleichung

$$l \cdot (10^k - 1) = (l - 1)10^k + ((10^k - 1) - (l - 1))$$

erkennt man, daß die Ziffern $(l - 1)$ die Ziffern $a_{2k-1} \cdots a_k$ und $(10^k - 1) - (l - 1)$ die Ziffern $a_{k-1} \cdots a_0$ hat. Wegen $(l - 1) + (10^k - 1) - (l - 1) = 10^k - 1$ ergänzen einander die Ziffern von $l - 1$ und $(10^k - 1) - (l - 1)$ entsprechend auf 9. \square

Es gibt noch viele ähnliche Phänomene dieser Art. Beispielsweise ist

$$666^2 = 443\,556 \quad \text{und} \quad 443 + 556 = 999$$

und

$$222^2 = 49\,284 \quad \text{und} \quad 49 + 284 = 333.$$

Eine genauere Studie sei aber an dieser Stelle dem Leser überlassen.

5 Die Gleichung $x^2 = x$

In den ganzen Zahlen hat die Gleichung $x^2 = x$ nur die Lösungen $x = 0$ und $x = 1$. Verzichtet man zunächst einmal auf die exakte Erfüllung dieser Gleichung, sondern fordert man nur, daß gewisse Ziffern von x und x^2 übereinstimmen, so kann man weitere *Lösungen* finden. Beispielsweise ist $6^2 = 36$. Die erste Stelle von $x = 6$ und $x^2 = 36$ stimmen überein. (Dies ist übrigens auch für $x = 5$ und $x^2 = 25$ der Fall.) Tatsächlich findet man ausgehend von diesen beiden Beispielen noch weitere Zahlen x , bei denen nicht nur die Einerstelle von x und x^2 übereinstimmen. Nach kurzer Suche findet man $x = 76$. Hier ist $x^2 = 5776$. Es stimmen also die ersten beiden Stellen überein. Bei $x = 376$ ist $x^2 = 141376$, und es stimmen die ersten drei Stellen überein:

$$\begin{array}{rcl} 6^2 & = & 36 \\ 76^2 & = & 5776 \\ 376 & = & 141376 \\ 9376 & = & 87909376 \\ 09376 & = & 87909376 \\ 109376 & = & 11963109376 \\ 7109376 & = & 50543227109376 \\ & \vdots & \vdots \end{array}$$

Tatsächlich findet man immer genau eine *Fortsetzung* der gerade gefundenen *Lösung*, wo eine zusätzliche Stelle übereinstimmt.

Satz 12 Sei $a_0 = 6$ und $x = a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ derart, daß die ersten k Stellen von x mit den ersten k Stellen von x^2 übereinstimmen:

$$(a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 a_0)^2 = b_{2k-1} b_{2k-2} \cdots b_{k+1} b_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 a_0,$$

Setzt man im Fall $b_k = 0$ $a_k = 0$ und im Fall $b_k \neq 0$ $a_k = 10 - b_k$, so hat die Zahl $y = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ die Eigenschaft, daß die ersten $(k+1)$ Stellen von y^2 mit denen von y übereinstimmen:

$$(a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)^2 = \cdots a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0.$$

Beweis. Die Zahl $a = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ hat die Eigenschaft

$$a^2 \equiv a \pmod{10^k}.$$

Es ist nun ein b , $0 \leq b \leq 9$, gesucht mit

$$(a + 10^k b)^2 \equiv a + 10^k b \pmod{10^{k+1}}.$$

Wegen $(a + 10^k b)^2 = a^2 + 2ab10^k + b^2 10^{2k} \equiv a^2 + 2ab10^k \pmod{10^{k+1}}$ muß daher

$$a^2 + 2ab10^k \equiv a + 10^k b \pmod{10^{k+1}}$$

oder

$$-\frac{a^2 - a}{10^k} \equiv b(2a - 1) \pmod{10}$$

erfüllt sein. Nun ist aber für $2a - 1 \equiv 1 \pmod{10}$ (bei $a_0 = 6$) und

$$\frac{a^2 - a}{10^k} \equiv b_k \pmod{10}.$$

Daher muß man b so wählen, daß $b \equiv -b_k \pmod{10}$ ist. \square

Für $a_0 = 5$ gibt es eine entsprechende Eigenschaft:

Satz 13 Sei $a_0 = 5$ und $x = a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ derart, daß die ersten die Stellen von x mit den ersten k Stellen von x^2 übereinstimmen:

$$(a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 a_0)^2 = b_{2k-1} b_{2k-2} \cdots b_{k+1} b_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 a_0,$$

Setzt man $a_k = b_k$, so hat die Zahl $y = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ die Eigenschaft, daß die ersten $(k+1)$ Stellen von y^2 mit denen von y übereinstimmen:

$$(a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0)^2 = \cdots a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0.$$

Beweis. Der einzige Unterschied zum Beweis von Satz 12 ist daß hier wegen $a_0 = 5$ $2a - 1 \equiv -1 \pmod{10}$ ist und daher $b \equiv b_k \pmod{10}$, also $b = b_k$ gewählt werden muß. \square

Es kann also ausgehend von 6 (bzw. 5) die Gleichung $x^2 = x$ immer besser erfüllt werden. In jedem Schritt kann man die Anzahl der gleichen Dezimalstellen vergrößern. Der absolute Fehler wird zwar bei diesem Prozeß auch immer größer, dieser Fehler *verschwindet* aber, wenn man formal den Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ überführt. Dies führt zum Begriff einer unendlich großen Dezimalzahl.

Definition 2 Eine formale Reihe der Form

$$Z = a_0 + a_1 10 + a_1 0^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 10^j$$

mit $a_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ heißt unendlich große Dezimalzahl.

Diese formalen Reihen bilden eine Erweiterung der natürlichen Zahlen. Man kann sogar die Addition (mit Übertrag) und die Multiplikation solcher formaler Reihen wie bei natürlichen Zahlen durchführen. (In Anlehnung an den Begriff der p -adische Zahlen - mit einer Primzahl p - könnte man die unendlich großen Dezimalzahlen auch als 10-adische Zahlen bezeichnen.)

Die aus dem obigen Prozeß gebildete Zahl (siehe Satz 12)

$$X = \cdots 7109376$$

ist etwa eine unendlich groß Dezimalzahl, die die Gleichung $x^2 = x$ erfüllt. Der Prozeß aus Satz 12 kann beliebig oft durchgeführt werden. Eine genauere Entwicklung von X ist

$$X = \cdots 3890995893380022607743749981787109376.$$

Beginnt man statt mit $a_0 = 6$ mit $a_0 = 5$, so sichert Satz 13 die Existenz einer weiteren unendliche großen Dezimalzahl Y mit $Y^2 = Y$:

$$Y = \dots 6109004106629977392256259918212890625.$$

Es fällt auf, daß sich hier (bis auf die erste Stelle) alle entsprechenden Ziffern von X und Y auf 9 ergänzen. Addiert man also X und Y (mit Übertrag), so ergibt sich schließlich

$$X + Y = \dots 0001 = 1.$$

Der Beweis dieser Eigenschaft ist überraschen einfach. (In der Formulierung des folgenden Satzes werden die natürlichen Zahlen $0 = \dots 0000$ und $1 = \dots 0001$ als unendlich große Dezimalzahlen interpretiert.)

Satz 14 $0, 1, X, Y$ sind die einzigen unendlich großen Dezimalzahlen, die Lösungen der Gleichung $x^2 = x$ sind. Es gilt auch $X + Y = 1$.

Beweis. Für eine unendlich große Dezimalzahl

$$Z = \dots a_3 a_2 a_1 a_0,$$

die die Gleichung $x^2 = x$ erfüllt, muß auch

$$a_0^2 \equiv a_0 \pmod{10}$$

gelten. Es gibt also vier Möglichkeiten: $a_0 = 0, 1, 5, 6$. Aus dem Beweis des Satzes 12 folgt, daß man eine Lösung der Gleichung $x^2 = x$ allein aus der Kenntnis von a_0 eindeutig rekonstruieren kann. Daher sind $0, 1, X, Y$ die einzigen Lösungen.

Andererseits kann man aus einer Lösung Z der Gleichung $x^2 = x$ sofort eine weitere Lösung konstruieren, nämlich $Z' = 1 - Z$. Aus $Z^2 = Z$ folgt nämlich

$$(1 - Z)^2 = 1 - 2Z + Z^2 = 1 - 2Z + Z = 1 - Z.$$

Da es nur die vier Lösungen $0, 1, X, Y$ gibt, muß $Y = 1 - X$ sein. \square

Die Eigenschaft $X + Y = 1$ hat eine interessante Folgerung.

Satz 15 Die unendlich großen Dezimalzahlen $X, Y, Z = 1$ erfüllen für alle $m \geq 1$ die Fermatgleichung

$$X^m + Y^m = Z^m.$$

Beweis. Aus $X^2 = X$ folgt natürlich auch

$$X^3 = X \cdot X^2 = X \cdot X = X^2 = X$$

und induktiv für alle $m \geq 1$ $X^m = X$. Ebenso ist $Y^m = Y$ und daher

$$X^m + Y^m = X + Y = 1 = 1^m = Z^m. \quad \square$$

In den Ziffernentwicklungen von X und Y kann (noch) keine Regelmäßigkeit abgelesen werden. (Immerhin kann man erkennen, daß alle möglichen Ziffern zwischen 0 und 9 auftreten.) Tatsächlich sind diese Dezimalentwicklungen nicht periodisch.

Satz 16 Die Ziffernentwicklung der unendlich großen Dezimalzahlen X und Y sind nicht periodisch.

Beweis. Zunächst betrachte man die unendlich große Dezimalzahl

$$E = \dots 9999 = \bar{9}.$$

Addiert man zu E die Zahl 1, so erkennt man, daß (wegen des Übertrags) die Summe $E + 1 = 1 + E = 0$ ist. Das bedeutet, daß E die Rolle von -1 spielt. Entsprechend gibt es zu jeder unendlich großen Dezimalzahl U die Zahl $E \cdot U$, die die Eigenschaft $U + E \cdot U = E \cdot U + U = 0$ hat. $E \cdot U$ spielt daher die Rolle von $-U$ (und soll im folgenden auch so bezeichnet werden). Man kann daher unendlich große Dezimalzahlen uneingeschränkt addieren und subtrahieren. (Gemeinsam mit der Multiplikation bilden die unendlich großen Dezimalzahlen einen Ring.) Man kann sich sogar überlegen, daß es zu einer unendlich großen Dezimalzahl $Z = \dots a_1 a_0$ mit ungeradem a_0 ungleich 5 eine unendliche Dezimalzahl Z' mit $ZZ' = Z'Z = 1$ gibt, also ein Element, das die Rolle des Kehrwertes $1/Z$ spielt. Die unendlich großen Dezimalzahlen beinhalten also auch alle rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$, deren Nenner q zu 10 teilerfremd ist. Diese rationalen Zahlen haben wieder eine periodische (unendliche große) Dezimalentwicklung. Der Nachweis gelingt wieder durch eine (modifizierten) Divisionsalgorithmus. Wir benötigen aber nur die Eigenschaft, daß eine unendlich große periodische Dezimalzahl eine rationale Zahl repräsentiert.

Es sei also

$$Z = \overline{a_{m+l-1} \dots a_m a_{m-1} \dots a_0}$$

eine unendlich große periodische Dezimalzahl mit Vorperiode der Länge m und Periode der Länge l . Dann ist

$$10^l Z = \overline{a_{m+l-1} \dots a_m a_{m-1} \dots a_0} 0 \dots 0$$

und

$$Z - 10^l Z = a_{m+l-1} \dots a_m a_{m-1} \dots a_0 - a_{m-1} \dots a_0 0 \dots 0 = n$$

eine natürliche Zahl. Also repräsentiert x die rationale Zahl

$$Z = -\frac{n}{10^l - 1} = \frac{p}{q}.$$

Es sei nun $Z \neq 0$ Lösung der Gleichung $x^2 = x$ mit periodischer Dezimalentwicklung, d.h. es gibt ganze Zahlen p, q mit $qZ = p$. Für diese gilt dann

$$p^2 = q^2 Z^2 = q^2 Z = q(qZ) = qp.$$

Da $p \neq 0$ ist, müssen p und q gleich sein, also $Z = 1$. Daher können die Dezimalentwicklungen von X und Y nicht periodisch sein. \square

6 Normale Zahlen

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß die unendlichen Ziffernentwicklungen von X und Y nicht periodisch sind. Man kann daher a-priori keine genaue Auskunft über die

Verteilung der Ziffern geben. Es wurde zwar (durch Nachrechnen) nachgewiesen, daß alle möglichen Ziffern auftreten, mit welcher Häufigkeit die Ziffer 1 oder 7 auftritt, ist damit aber nicht gesagt.

Dieselbe Fragestellung wird üblicherweise bei der (gewöhnlichen) Dezimalentwicklung reeller Zahlen aufgeworfen.

Definition 3 Eine reelle Zahl x heißt **normal** (zur Basis 10), wenn in der Dezimalentwicklung jeder mögliche Ziffernblock der Länge l ($l \geq 1$) mit der Häufigkeit 10^{-l} auftritt.

Insbesondere treten alle Ziffern $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ mit Häufigkeit $1/10$ auf, alle Ziffernpaare ab ($a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$) mit Häufigkeit $1/100$ etc.

Einerseits gibt es *sehr viele* normale Zahlen, wie man aus dem Gesetz der großen Zahlen ablesen kann.

Satz 17 Fast alle reelle Zahlen sind normal, d.h. die Menge jener reellen Zahlen, die nicht normal sind, hat Lebesguemaß 0.

Andererseits kennt man (konkret) *fast keine* normale Zahlen. Die Dezimalentwicklung von

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 \\ 5820974944592307816406286208998628034825342117067 \dots$$

ist zwar sehr genau berechnet worden, und es sieht ganz so aus, als wäre π normal, aber damit ist dies in keiner Weise bewiesen. Man kann damit nicht einmal die Frage beantworten, ob 7 unendlich oft vorkommt oder nicht. Auch über die Ziffernentwicklung von

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420969807856967187537694 \\ 80731766797379907324784621070388503875343276415727 \dots$$

ist nichts dergleichen bekannt.

Trotzdem kann man normale Zahlen angeben.

Satz 18 Die folgenden reellen Zahlen sind normal zur Basis 10:

1. $x = 0.12345678910111213141516171819202122 \dots$

Die Ziffern werden durch Hintereinanderstellen der Dezimalentwicklungen der positiven natürlichen Zahlen gebildet.

2. $x = 0.149162536496481100121141169196225256 \dots$

Die Ziffern werden durch Hintereinanderstellen der Dezimalentwicklungen der Quadrate der positiven natürlichen Zahlen gebildet.

3. $x = 0.235711131719232931374143475359617173 \dots$

Die Ziffern werden durch Hintereinanderstellen der Dezimalentwicklungen der Primzahlen gebildet.

4. $x = 0.49254912116928936152984196113691681 \dots$

Die Ziffern werden durch Hintereinanderstellen der Dezimalentwicklungen der Quadrate der Primzahlen gebildet.

Es gibt noch viele weitere Beispiele dieser Art. Der Nachweis der Normalität ist aber (bis auf den ersten Fall) sehr schwierig und verlangt aufwendige Abschätzungen für Exponentialsummen. (Eine ausführliche Darstellung dieser Thematik finden Sie etwa in [2].)

Ein interessanter Aspekt normaler Zahlen ist der Zusammenhang mit **Zufallszahlen**. Für eine reelle Zahl x betrachtet man die Folge $10^k x$ und davon nur den Nachkommaanteil $x_k = 10^k x - [10^k x]$, d.h. man erhält eine Folge von Zahlen zwischen 0 und 1. Für $x = \pi$ wären dies die Zahlen

$$\begin{aligned}x_0 &= 0.14159265358979323846264338327950288419716939937510\dots, \\x_1 &= 0.41592653589793238462643383279502884197169399375105\dots, \\x_2 &= 0.15926535897932384626433832795028841971693993751058\dots, \\x_3 &= 0.59265358979323846264338327950288419716939937510582\dots, \\x_4 &= 0.92653589793238462643383279502884197169399375105820\dots, \\x_5 &= 0.26535897932384626433832795028841971693993751058209\dots, \\x_6 &= 0.65358979323846264338327950288419716939937510582097\dots, \\x_7 &= 0.53589793238462643383279502884197169399375105820974\dots, \\x_8 &= 0.35897932384626433832795028841971693993751058209749\dots, \\&\vdots\end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß eine reelle Zahl genau dann normal ist, wenn die Folge der Zahlen $x_k = 10^k x - [10^k x]$ im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilt ist, also als Zufallszahl dienen kann.

Literatur

- [1] P. J. DAVIS, *The Lore of Large Numbers*, Random House, Westminster, Maryland, 1963.
- [2] M. DRMOTA and R. F. TICHY, *Sequences, Discrepancies and Applications*, Lecture Notes Math. **1651**, Springer, Berlin, 1997.
- [3] M. E. LINES, *A Number for Your Thoughts*, Institute of Physics Publishing, Bristol, Philadelphia, 1986.

Michael Drmota
Institut für Geometrie
TU Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10
A-1040 Wien

Fehler - eine Chance zum Lernen

Günter HANISCH, Wien

1. Einleitung

"Cuius vis hominis est errare, nullius nisi insipientis in errore perseverare." (CICERO, Phillipinische Reden 12/2), was in etwa bedeutet, dass es dem Menschen eigen ist zu irren, aber nur der Dumme im Irrtum verharrt.

Und die PsychologInnen unterscheiden zwischen zwei prinzipiellen Problemlösestrategien, nämlich durch Einsicht sowie durch Versuch und Irrtum.

Dieser Beitrag soll dazu ermutigen, Fehler zuzulassen und in ihnen eine Chance zum Lernen zu sehen. Da es dabei um Fehler geht, die aus Unkenntnis der Sachlage oder aus mangelnder Aufmerksamkeit entstehen, werden im Folgenden alle anderen Fehlerursachen, wie etwa neurotische Lernstörungen, Legasthenie oder aber auch das absichtliche Machen von Fehlern, wie etwa die Aufgabenstellung eines Schularbeitsbeispiels zu vereinfachen, ausgeklammert.

2. Diagnose von Fehlern

Um einen Fehler bei einer Mathematikaufgabe zu machen, gehören zwei dazu, nämlich der oder die SchülerIn und die Mathematikaufgabe.

Warum von einem bzw. einer SchülerIn gerade ein bestimmter Fehler gemacht worden ist, kann im Allgemeinen ohne Mitwirken dieses bzw. diesem SchülerIn nicht festgestellt werden, obwohl es gute Einteilungen der SchülerInnenfehler gibt (siehe etwa REITBERGER 1989, S.317). daher soll im Folgenden auf die Schwierigkeiten, die in der Mathematik per se liegen, eingegangen werden.

Als Erstes ist die knappe und nicht redundante Schreibweise zu nennen, die der Notation der heutigen Mathematik zu Eigen ist und die noch dazu widersprüchlich ist.

Ein Beispiel: Das Aneinanderschreiben von Zeichen kann höchst Verschiedenes bedeuten:

- ab : a mal b
- $3a$: 3 mal a
- 31 : 3 mal 10 + 1
- $3\frac{1}{2}$: 3 plus $\frac{1}{2}$
- $a(3+x)$: a mal $(3+x)$
- $f(3+x)$: Funktion von $(3+x)$
- $\sin 2x$: Sinus von 2 mal x

Das soll nun kein Plädoyer für eine Änderung der Schreibweise sein, denn auch in Verträgen ist nicht immer offensichtlich, was das Kleingedruckte bedeutet, aber die SchülerInnen sollten auf diese Besonderheit nicht nur einmal sondern immer wieder hingewiesen werden; vielleicht wird dann weniger oft $\sin 2x/2$ durch 2 gekürzt-

Eine weitere Schwierigkeit liegt darin, dass die Mathematik zur Übergeneralisierung herausfordert.

Ein Beispiel: Für die Addition und die Multiplikation gelten in weiten Bereichen dieselben Regeln, in einigen wenigen aber ganz andere, so daß die SchülerInnen beispielsweise dazu verführt werden, eine für die Multiplikation geltende Regel auch auf die Addition anzuwenden. Diesen Vorgang nennt man Generalisation, eine an sich sehr nützliche und für das Überleben notwendige Eigenschaft, die man auch zur Lösung von Mathematikaufgaben braucht, da man mit ihrer Hilfe die Lösungsstrategie, die beim Lösen der einen Aufgabe erfolgreich war, auch bei einer anderen anwendet. Und dadurch passiert es, das $(2+3a)/3$ durch 3 gekürzt wird oder aus dem pythagoräischen Lehrsatz die Wurzel gezogen wird.

Aber auch darin liegt ein großer erzieherischer Wert der Mathematik. Der bzw. die SchülerIn muß lernen, daß man in der Mathematik - so wie im täglichen Leben - nur nach genauer Prüfung Generalisieren darf. Allerdings tragen auch wir MathematiklehrerInnen an der Übergeneralisation Schuld, weil auch wir im Unterricht aus Zeitmangel zum Beispiel Regeln auf andere Zahlbereiche unüberprüft übernehmen, wie etwa die Multiplikationsregel für Potenzen mit gleicher Basis auf irrationale Hochzahlen.

Ein weiteres Problem liegt darin, daß wir MathematiklehrerInnen zu viel im Kopf rechnen und wenn uns das SchülerInnen nachmachen, sie dann scheitern müssen. Der Grund dafür liegt in der beschränkten Speichermöglichkeit unseres unmittelbaren Gedächtnisses (auch Ultrakurzzeitgedächtnis genannt). In diesem können wir nur etwa sieben Inhalte etwa 20 Sekunden lang speichern, wobei die zweite Barriere diejenige ist, die beim Rechnen hinderlich ist. Sie können dies bei sich selbst beobachten, wenn Sie beispielsweise 248 mit 252 multiplizieren. Sie müssen dabei immer wieder das bereits Gerechnete wiederholen, damit es nicht vergessen wird. (Es sei denn, Sie verwenden einen Trick, wie etwa $248 \cdot 252 = (250-2) \cdot (250+2) = 250^2 - 2^2 = 62500 - 4 = 62496$.)

Viele Vorzeichenfehler können durch dieses Phänomen erklärt werden; dabei wäre die Abhilfe so einfach: Zuerst das Vorzeichen bestimmen und dann sofort hinschreiben, damit es nicht wieder vergessen werden kann.

Derselbe Vergessens-Effekt tritt auch bei Textaufgaben auf. Auch dort ist es wichtig, sich sofort aufzuschreiben, welche Bedeutung die verwendeten Buchstaben haben und dann noch einmal den Text durchzugehen, um festzustellen, daß die in ihm enthaltenen Beziehungen auch richtig in die mathematische Formalsprache übersetzt worden sind. Und wenn die Aufgabe gelöst ist, muß noch einmal der Angabetext durchgelesen werden, um zu überprüfen, ob nicht irgendeine Frage vergessen worden ist. Und dabei kann auch gleich die Probe gemacht werden. Gerade letzteres ist ein wesentlicher Punkt, da dadurch die Kompetenz für die Richtigkeit einer Lösung von der Lehrkraft auf den/der Schülerin übergeht.

3. Maßnahmen gegen Fehler

OSER u. HASCHER (1997, S. 24f) konnten durch Unterrichtsbeobachtungen folgende drei Muster, wie Lehrkräfte mit Fehlern umgehen, ausmachen:

1. Vorwegnehmende Fehler
2. Publikmachen von Fehlern
3. Bermuda-Dreieck

1. Vorwegnehmende Fehler: Darunter wird verstanden, daß die Lehrkraft bereits bei der Erklärung eines neuen Lernstoffs auf mögliche Fehlerquellen aufmerksam macht, also wenn etwa gleich nach der Herleitung des Pythagoräischen Lehrsatzes darauf aufmerksam gemacht wird, daß aus der Quadratsumme nicht gliedweise die Wurzel gezogen werden darf. OSER u. HASCHER fragen allerdings dazu, ob Personen nicht selber die Fehler begehen müssen, um daraus zu lernen, und meinen, daß vorausgeschicktes Fehlerwissen weniger Effizienz hat. Dem ist allerdings entgegenzuhalten, daß auf mögliche Fehler hinzuweisen nicht schädlich für die Lernenden ist und daß schon POPPER, indem er sagte: "Laßt Hypothesen sterben!", darauf hinwies, daß Menschen über die Folgen einer Handlung vorher nachdenken sollten, bevor sie diese begehen. Daher meint der Verfasser, daß es höchst sinnvoll ist, Lernende auf mögliche Fehlerquellen hinzuweisen, da diejenigen, die diese Hinweise nicht beachten, sowieso aus dem Machen der eigenen Fehler dann profitieren können. OSER u. HASCHER versuchen ihre Hypothese dadurch zu belegen, indem sie darauf hinweisen, daß das Lernen "Auto zu fahren" ein typisches Beispiel dafür wäre, es aber nach Meinung des Verfassers schon sinnvoll wäre, eventuelles Fehlverhalten antizipativ vorwegzunehmen, wie etwa das Nicht-Stehenbleiben vor einem Stoppschild.
2. Publikmachen von Fehlern: Hierbei wird versucht, aus Fehlern, die einzelne oder mehrere Lernende begangen haben, zu lernen, indem diese Fehler den anderen mitgeteilt werden. OSER u. HASCHER weisen mit Recht darauf hin, daß diese Vorgehensweise verletzend für die so Gebrandmarkten sein könne. Daher sollte nach Meinung des Verfassers - sofern noch kein "positives Fehlerklima" in der Klasse hergestellt werden konnte (siehe dazu später) - die Hinweise anonym erfolgen. Die Durchsicht von Hausaufgaben könnte dazu geeignetes Material liefern, wogegen die übliche Praxis, dies bei der Verbesserung der Schularbeit zu tun, zu spät kommen dürfte, da zu diesem Zeitpunkt keine Fehler mehr begangen werden sollten.
3. Bermuda-Dreieck: Dabei handelt es sich um folgende Vorgangsweise, die vornehmlich im fragend-entwickelnden Unterricht angewendet wird. Dabei stellt die Lehrkraft eine Frage und ruft eine(n) Lernenden auf und, falls diese(r) dies nicht weiß oder einen Fehler macht, darauf den/die nächsten SchülerIn, damit diese(r) die richtige Antwort gibt. Durch diese Vorgehensweise steht aber nicht mehr das Lernen an sich im Vordergrund, sondern das Ergebnis, welches ja an sich nicht das Wichtige ist, denn gerade für Mathematik gilt "Der Weg ist das Ziel"; denn ginge es etwa nur um die Lösung einer Mathematikaufgabe, so könnte diese ja bequem und vor allem viel schneller durch Nachschlagen im Lösungsheft gefunden werden. Da im Allgemeinen der/die Lernende auch durch diese Situation frustriert ist, verschwindet das Lernpotenzial "wie ein Flugzeug im Bermudadreieck" (OSER u. HASCHER (1997, S. 25). Aber nicht nur dadurch kann sich kein Fehlerwissen aufbauen, sondern es ist oft auch so, dass die Antwort des/der SchülerIn an sich richtig wäre, aber nicht in das Konzept der Lehrkraft passt, da die Antworten der SchülerInnen "der Lehrperson oft nur als Mittel auf ihrem Weg einen bestimmten Inhalt zu vermitteln" dienen (SPYCHIGER u.a., 1997, S. 8).

Aus dem oben Ausgeführten kann man erkennen, dass alle drei Maßnahmen nicht immer zu einem erwünschten Umgang mit Fehlern führen. Was wäre also zu tun?

Im vorigen Abschnitt sind bereits einige Maßnahmen aufgezählt worden, nämlich in den SchülerInnen ein Metawissen aufzubauen wie etwa über die Verschiedenheit gleichaussehender Symbolgruppen oder die Schwierigkeit sich Zwischenergebnisse längere Zeit zu merken. Eine weitere wäre, etwa andere Unterrichtsformen, wie den offenen Unterricht, zu präferieren. Damit ließe sich etwa das Bermudadreieck vermeiden.

Wichtiger erscheint dem Verfasser aber einen anderen Umgang mit Fehlern zu erlernen. Fehler sind die Chance zum Lernen, oder wie Churchill einmal sagte: "Fehler, aus denen man lernen kann, sollte man möglichst früh begehen." Daher ist die Idee eines neuen Fehlerklimas die, dass "nicht nur die Toleranz oder Akzeptanz von Fehlern wachsen, sondern auch ein systematisches Know-how zum Umgang damit und zu seiner pädagogischen Fruchtbarmachung erstellt und vor allem auch umgesetzt werden" (SPYCHIGER u.a. 1997). Nach DICK (1996, S.80) ist gerade dies ein Kennzeichen des erfolgreichen Unterrichts von erfahrenen Lehrpersonen, da diese im Stand sind, Fehlersituationen in Lernsituationen umzuwandeln.

Um das Fehlerklima zu messen konstruierten SPYCHIGER u.a. (1998, S. 21) einen Fragebogen und fanden mittels einer Faktorenanalyse folgende drei Faktoren heraus, mit denen SchülerInnen die Fehlerkultur in ihrer Klasse in einem bestimmten Gegenstand einschätzen (vgl. SPYCHIGER u.a., 1998, S. 21):

1. Lehrkraftverhalten: Hier schätzen die SchülerInnen die Lehrkraft bezüglich ihres Umgangs mit Fehlern ein, was etwa durch das Item "Unsere Lehrerin versucht es zu vertuschen, wenn sie einen Fehler macht" gemessen wird.
2. Selbstfaktor kognitiv: Die SchülerInnen schätzen ihren eigenen Umgang mit Fehlern ein, wie etwa durch das Item "Es macht mir Freude, mir durch Fehler neues Wissen anzueignen".
3. Selbstfaktor emotional: Die SchülerInnen schätzen ihre emotionalen Reaktionen im Zusammenhang mit dem Fehlermachen ein, wie etwa durch das Item "Ich bekomme Angst, wenn ich im Unterricht Fehler mache".

In so einem positiven Fehlerklima wäre es etwa wichtig, dass man so wie im Deutsch- und im Fremdsprachenunterricht seine eigenen persönlichen Fehler kennt. Erkenne dich selbst! Weiß jemand, dass für ihn etwa das Umformen von einfachen Bruchgleichungen ein Problem darstellt, so kann er dies erstens gezielt üben und zweitens besonders aufpassen, wenn ihm so ein Problem unterkommt.

Daher hat MÜLLER Martina (1998) in ihrer Dissertation, bei der sie Fehler in der Trigonometrie untersucht hat, den SchülerInnen zuerst ein Fehlerdiagnoseprogramm vorgelegt, damit die SchülerInnen ihre Schwachpunkte erkennen, und dann erst gezielt ein "Fehlerbehebungsprogramm" eingesetzt.

Daher findet der Verfasser die übliche Praxis der Verbesserung von Schularbeiten, bei der in der Schule die Schularbeitsaufgaben vorgerechnet werden und wo dann die SchülerInnen im Schularbeitsheft entweder einen Hinweis anbringen, dass die Verbesserung im Schularbeitsheft steht, oder sie schreiben die Aufgaben, die in der Schularbeit fehlerhaft gerechnet worden sind, ins Schularbeitsheft ab, als nicht zielführend. Viel wichtiger als ein Abschreiben wäre zweierlei:

1. Der/die SchülerIn trägt ihre Fehler in eine Fehlerkartei oder ein Fehlerheft ein.
2. Der/die SchülerIn überlegt sich, was sie tun wird, damit dieser Fehler nicht noch einmal passiert, und trägt ihre Überlegungen in das Schularbeitsheft ein.

Allerdings kommen diese Maßnahmen - wie bereits vorhin hingewiesen - reichlich spät, da die Schularbeit als Beurteilungsinstrument ja bereits fehlerfrei sein sollte. Man kann dies mit kreativitätsfördernden Maßnahmen vergleichen, bei denen es eine Grünlicht- und eine Rotlichtphase gibt und wo erst in letzterer die Kontrolle vorgenommen wird (vgl. HANISCH 1982, S. 86). Auch bei einem aus "Fehlern Lernen" sollte in der Übungsphase Fehler zu machen erlaubt sein, ja im Sinne eines Experimentierens sogar erwünscht sein. Dabei sollte

auch erlernt werden, wie man Fehler erkennt und insbesondere wie man sie findet und ausbessert. Die dabei zu verwendenden Strategien stellen nur teilweise ein Metawissen dar und sind daher teilweise auch stoffspezifisch und stellen eine Möglichkeit dar, den Mathematikunterricht interessanter und abwechslungsreicher zu gestalten. So können etwa Overheadfolien von fehlerhaft gerechneten Aufgaben verwendet werden, aber auch in den Lehrbüchern findet man entsprechende Hinweise (siehe etwa REICHEL u.a., 1992, Bd. 7, Aufgabe 18). In der Beurteilungsphase hingegen sollten Fehler gar nicht mehr vorkommen.

Eine andere Möglichkeit ein Fehlerwissen aufzubauen, ist die Partnerarbeit, bei der ein(e) MitschülerIn das Heft von jemand anderen korrigiert und mit ihm/ihr dann die dabei aufgetretenen Fehler bespricht. Schule kann dadurch als ein Ort erfahren werden, wo man nicht bei begangenen Fehlern gedemütigt wird, sondern wo man dabei Hilfe erfährt. Dies gelingt MitschülerInnen oft viel leichter als der Lehrkraft, da einerseits im Unterricht meist zu wenig Zeit ist, sich jedem/jeder SchülerIn zuwenden zu können, andererseits aber auch von Lehrkräften "Fehlersituationen ... dazu benutzt werden, angestaute Emotionen und Frustrationen abzureagieren" (OSER u.a. 1997, S. 14).

Ein anderes Problem, durch das Fehler entstehen, ist das Vergessen. Die vermeintliche Stofffülle, an der aber weder die Lehrpläne Schuld sind, noch die Lehrbuchautoren - so steht etwa im LehrerInnenbegleitheft der Lehrbuchreihe von REICHEL u.a., dass deswegen so viele Aufgaben vorgesehen sind, damit die LehrerInnen die Möglichkeit der Auswahl haben und nicht, damit sie alles im Unterricht durchnehmen -, sondern die aus Prestigedenken, aus einer fiktiven Angst vor der Obrigkeit und auch deswegen entsteht, weil es einem schmerzt, die vielen schönen Dinge, die es noch in der Mathematik gäbe, den SchülerInnen vorzuenthalten, zwingt immer wieder neuen Lehrstoff durchzunehmen und den alten nicht zu wiederholen. Als Beispiel mag dafür die Prozentrechnung herhalten. So ist es erschütternd festzustellen, dass folgende Aufgabe, die in etwa so bei TIMSS gestellt worden war, nur von 48 % der österreichischen SchülerInnen gelöst werden konnte (in der AHS waren es nur 43%, in der Berufsschule hingegen 47%!):

Auf der neuen Packung des Müslis "Vitalkraft" steht "20% mehr Inhalt". Die neue Packung enthält 60g mehr als die alte Packung. Wie viel Gramm enthält die neue Packung?

Wäre es daher nicht wichtiger, auf exotische Aufgaben - so schön sie auch sein mögen - zu verzichten und sich auf das Wesentliche zu beschränken? Fragen Sie einmal im Konferenzzimmer ihre nichtmathematischen KollegInnen, was man in der Mathematik unter Differenzieren versteht oder was der Sinus ist. Der Verfasser hat unter anderem diese Fragen an Personen stellen lassen, deren Matura mindestens fünf Jahre zurück lag und Antworten wie, "Das ist die Sache mit dem Strich!" oder "Das ist das, was ich nie gekonnt habe!" bekommen (vgl. HANISCH 1985). Wobei allerdings - und das muss an dieser Stelle betont werden - nach Meinung des Verfassers - die formalen Ziele des Mathematikunterrichts zumindest gleichrangig mit den inhaltlichen zustehen haben (siehe HANISCH 1996). Aber könnte nicht eines dieser formalen Ziele der Umgang mit Fehlern sein? Fehler nicht nur negativ zu sehen, sondern in ihnen die Chance zum Lernen zu sehen und dabei zu lernen aus einer verfahrenen Situation das Beste herauszuholen? Ist diese Erkenntnis zur Lebensbewältigung nicht wichtiger als etwa die Kenntnis der 2. Sätzsätze?

4. Schlussbemerkung

Fehler kann man nach dem Schweregrad ihrer Auswirkungen Rang reihen. So ist etwa das Einsetzen eines Herzschrittmachers in den falschen Patienten sicherlich schwer wiegender als jeder in der Schule begangene Fehler. Auch das Überfahren einer Stopptafel und die meisten anderen im Straßenverkehr begangenen Fehler sind schwer wiegender. Fehler bei Mathematikaufgaben hingegen sind harmlos. Die SchülerInnen kommen zur Schule um zu lernen und Fehler sind eine Chance dazu. Wenn hingegen wir LehrerInnen aus Fehlersituationen keine Lernsituationen sondern Stresssituationen machen (vgl. SPYCHIGER 1998, S. 10), indem wir vorschnell daraus Beurteilungssituationen machen oder gar die SchülerIn demütigen, begehen wir sicherlich einen größeren Fehler.

Literatur

DICK, A.: Vom unterrichtlichen Wissen zur Praxisreflexion: das praktische Wissen von Expertenlehrern im Dienste zukünftiger Junglehrer. Rieden 1992 u. 1996.

HANISCH Günter: Was bleibt vom Mathematikunterricht hängen? Aus: DÖRFLER, W. u. FISCHER Roland (Hrsg.): Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. S. 75-82, Wien 1985..

HANISCH Günter: Kreativitätsförderung durch Mathematikunterricht. In: Österreichische Mathematische Gesellschaft., Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der höheren Schulen, Heft 9, S. 71-88, Wien 1982.

HANISCH Günter: Wozu ist der Mathematikunterricht gut? In: Österreichische Mathematische Gesellschaft., Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der höheren Schulen, Heft 23, S. 106-127, Wien 1995.

MÜLLER Martina: Schülerfehler in der Trigonometrie. Unveröff. Dissertation des Instituts für Erziehungswissenschaften der Universität Wien 1998.

OSER Fritz, SPYCHIGER Maria, HASCHER Tina u. MAHLER Fabienne: Die Fehlerkulturschule. Untersuchung und Veränderung von Fehlerkultur in der Schule. Schriftenreihe zum Projekt "Lernen Menschen aus Fehlern? Zur Entwicklung einer Fehlerkultur in der Schule". Nr. 2, Freiburg 1997.

OSER Fritz u. HASCHER Tina : Lernen aus Fehlern. Zur Psychologie des "negativen" Wissens. Schriftenreihe zum Projekt "Lernen Menschen aus Fehlern? Zur Entwicklung einer Fehlerkultur in der Schule". Nr. 1, Freiburg 1997.

REICHEL Christian u.a.: Lehrbuch der Mathematik., Bd. 5 bis 8 Wien 1992.

REICHEL Christian u. GÖTZ Stefan: TIMSS - Informationen, Beispiele und Folgerungen. Wien 1998.

REITBERGER Wolfgang: Typische Schülerfehler beim Erwerb des Bruchzahlbegriffs. Aus: Beiträge zum Mathematikunterricht 1989. Vorträge auf der 23. Bundestagung für Didaktik der

Mathematik in Berlin, S.314--317 Bad-Salzdorf 1989.

SPYCHIGER Maria: Vom Umgang mit dem Fehler im Instrumental- und Vokalunterricht. Schriftenreihe zum Projekt "Lernen Menschen aus Fehlern? Zur Entwicklung einer Fehlerkultur in der Schule". Nr. 5, Freiburg 1998.

SPYCHIGER Maria, OSER Fritz, HASCHER Tina u. MAHLER Fabienne: Untersuchung u. Veränderung von Fehlerkultur in der Schule: Der Situationsansatz. Schriftenreihe zum Projekt "Lernen Menschen aus Fehlern? Zur Entwicklung einer Fehlerkultur in der Schule". Nr. Freiburg 1997.

SPYCHIGER Maria, MAHLER Fabienne, HASCHER Tina u. OSER Fritz: Fehlerkultur aus der Sicht von Schülerinnen und Schülern. Der Fragebogen S-UFS: Entwicklung und erste Ergebnisse. Schriftenreihe zum Projekt "Lernen Menschen aus Fehlern? Zur Entwicklung einer Fehlerkultur in der Schule". Nr. 4, Freiburg 1998.

Adresse des Verfassers

Günter HANISCH, Mathematisches Institut der Universität Wien, Strudlhofgasse 4, 1090 Wien bzw. Institut für Erziehungswissenschaften der Universität Wien, Garnisongasse 3, 1090 Wien

□

Ein Paradoxon bei Münzwurfserien und bedingte Erwartungswerte

Hans Humenberger

Zusammenfassung

Wir wollen ein Paradoxon näher beleuchten, das sich auf Serien von Münzwürfen wie z.B. $KAKKAKAAAK \dots$ bezieht (K steht für „Kopf“ und A für „Adler“). Stellt man nämlich ganz unvoreingenommen die Frage, welches der Muster $KAKA$ oder $AKAA$ das „wahrscheinlichere“ sei, so kann man — je nach Sichtweise — zu völlig verschiedenen Ergebnissen gelangen. Wir setzen dabei immer voraus, daß es sich beim Werfen der idealen Münze um einen BERNOULLI-Versuch handelt (Unabhängigkeit der Versuchsausgänge, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ergibt sich K oder A).

1. Fragt man nach der Wahrscheinlichkeit der angegebenen Muster in einer Wurfserie der Länge 4, so erhält man für beide dieselbe Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.
2. Fragt man, wie oft man im Durchschnitt („auf lange Sicht“ — Erwartungswert) eine Münze werfen muß, um das jeweilige Muster erstmalig zu erhalten, so ergibt sich 20 für $KAKA$ und für $AKAA$ nur 18. In diesem Sinn kann also $AKAA$ als wahrscheinlicher bezeichnet werden, da man im Durchschnitt mit weniger Würfeln dieses Muster bekommt.
3. Fragt man hingegen nach der Wahrscheinlichkeit, mit der in einer Münzwurfserie $AKAA$ vor $KAKA$ auftritt — gemeint ist hier nicht „unmittelbar davor“, sondern „früher als“: $AKAA$ erscheint früher als $KAKA$ (als Ergebnis von vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Würfeln) —, so erhält man $\frac{5}{14} \approx 0.357$, ein Wert, der deutlich kleiner als 0.5 ist. Es ist also fast doppelt so wahrscheinlich, daß $KAKA$ vor $AKAA$ auftritt (64.3%), wie umgekehrt (35.7%). So gesehen kann $KAKA$ als (sogar deutlich) wahrscheinlicher angesehen werden (vgl. SZEKELY 1990, S.61ff).

Im folgenden wollen wir dieses Phänomen zunächst in einer einfacheren Version (zwei- statt viergliedrige Muster) auf Schulniveau behandeln, und zwar unter Zuhilfenahme *bedingter Erwartungswerte*. Zum Schluß werden noch drei- und viergliedrige Muster behandelt (insbesondere ein „unfares Spiel“ bei dreigliedrigen Mustern). Die Existenz aller vorkommenden Erwartungswerte wird nicht bewiesen, sondern intuitiv vorausgesetzt.

1 Paradoxa in der Stochastik

Insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung begegnen wir immer wieder Situationen, in denen wir mit unserer Intuition zu völlig falschen Ergebnissen kommen, wir schätzen diese Situation falsch ein. Umso größer sind oft die Überraschungen, wenn man erfährt, wie weit der intuitiv geschätzte Wert vom „wirklichen Wert“ (wenn es um das Schätzen eines Wertes bzw. Ergebnisses geht) entfernt ist. Man kann darüber diskutieren, ob man solche Situationen alleine deswegen als *paradox* (also eigentlich als „widersinnig“) bezeichnen soll, weil sie unserer Intuition nicht entsprechen bzw. (besser:) weil unsere Intuition nicht der jeweiligen Situation entspricht; wir wollen aber bei dieser Bezeichnung bleiben mit dem Hinweis, daß wir damit einfach den *Widerspruch* zu unserer *Intuition* meinen.

Es scheint für uns klar zu sein, daß Überraschungen, Fehlmeinungen etc. (wenn man will: *Paradoxa*) einen hohen *didaktischen Wert* im Mathematikunterricht haben, und zwar in mehrfacher

Hinsicht. Einerseits haben Paradoxa einen hohen *Faszinationswert*, der zusammen mit dem *Unterhaltungswert* i.a. zu einer Verbesserung der Motivation führt (bei Schülern, Studenten und Lehrerfortbildungen). Andererseits kommt den Paradoxa aber auch ein hoher *Bildungswert* zu, wenn Zusammenhänge deutlicher werden bzw. Verständnis erzeugt wird. Diese *Werte* werden leider oft nicht anerkannt oder nicht beachtet bzw. zumindest unterschätzt, besonders in bezug auf *Motivation* und *Verständnis* (vgl. auch BENTZ 1985, PFLUG 1981, STADLER 1986 und die anderen Arbeiten im Literaturverzeichnis am Beitragsende).

Wir beschränken uns im folgenden auf zwei Zitate. Der Wiener Mathematiker K. SIGMUND, der *Paradoxa* nicht von der didaktischen Seite beleuchtet, sondern allgemein von deren Bedeutung und Faszination spricht, schreibt dazu: „Tatsächlich kommt es in der Wahrscheinlichkeitsrechnung so häufig zu paradoxen Ergebnissen, daß hier jedes Vertrauen in den gesunden Menschenverstand bald untergraben wird. Die Lehrsätze der Mathematik des Zufalls sind um nichts weniger verläßlich als jene der Algebra und der Differentialgeometrie, stehen aber zuweilen im krassesten Gegensatz zu unserer Anschauung. Und das, obwohl wir diese Anschauung von Kindheit an mit Hilfe von Glücksspielen geschult haben. Keine Kultur hat es versäumt, mit dem Zufall zu experimentieren. [...] Das Münzgeld dagegen kam wirklich erstmals in Griechenland auf, und man darf wohl vermuten, daß bald darauf 'Kopf oder Adler' gespielt wurde. [...] Gelegenheit, mit dem Zufall gründlich Bekanntschaft zu schließen — nicht bloß eine Zufallsbekanntschaft — gibt es also genug, und doch überrascht er uns immer wieder von neuem. Seit Beginn der Neuzeit befassen sich auch Mathematiker mit der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, oft mit ganz unwahrscheinlichen Resultaten. Zunächst ging es natürlich vor allem um Glücksspiele. [...] Heute aber fällt ein Großteil von Physik, Biologie und Wirtschaftswissenschaften darunter. Aus den Grundlagen der reinen und angewandten Wissenschaft läßt sich die Wahrscheinlichkeitslehre also längst nicht mehr wegdenken. Und dennoch haften ihr immer noch unzählige Denkfallen und Paradoxa an. Sie erinnern oft genug an Taschenspielererei — aber diese fand man wohl immer schon im Umkreis von Glücksspielern.“ (1995, S. 113–114).

H. STADLER schreibt über die Bedeutung von Paradoxa in einem 1986 erschienenen, zweiteiligen Aufsatz: „Worin liegt denn überhaupt der didaktische Wert eines Paradoxons? Ein überraschendes Ergebnis weckt zweifellos die Aufmerksamkeit des Schülers. Er wird dadurch angeregt zu überprüfen, ob die Durchführung der Rechnung oder seine intuitive Vorstellung fehlerhaft ist. Mit Hilfe gezielter Experimente läßt sich meist zeigen, daß das Rechenergebnis (zumindest tendenziell) richtig ist. Das führt dazu, daß er seine ursprüngliche Sicht des Problems revidiert und dadurch einen echten Erkenntnisgewinn erzielt. Möglicherweise wird dadurch auch die Beschäftigung mit weiteren Problemen dieser Art angeregt. In diesem Sinn stellt das Paradoxon gerade in einem so anwendungsorientierten Zweig der Mathematik [gemeint ist Stochastik (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik); Anm. d. Verf.] ein wertvolles didaktisches Hilfsmittel dar.“ (1986, S. 135).

Bemerkung: Am Schluß des Beitrages findet sich eine Literaturliste zum Thema *Paradoxa in der Stochastik*.

2 Spezielle Muster in Serien von Zufallsexperimenten

Beispiel 2.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Muster $KAKA$ in einer Münzwurfserie der Länge n auf (Ereignis E)?

Wir wollen stets voraussetzen, daß es sich bei den Serien um BERNOULLI-Versuche mit einer fairen Münze handelt. Bei einer Serie der Länge $n = 4$ ist die Wahrscheinlichkeit für $KAKA$

klarerweise $\left(\frac{1}{2}\right)^4$. Bei einer Serie mit doppelter Länge $n = 8$ kann die zugehörige Wahrscheinlichkeit $P(E)$ ebenfalls leicht nach unten abgeschätzt werden, indem wir zunächst Überlegungen mit Hilfe des „Gegenereignisses“ ($\neg E$: $KAKA$ kommt in den 8 Würfeln nicht vor“) anstellen:

1. Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$, daß $KAKA$ irgendwo im Achterblock auftritt ist sicher größer als die Wahrscheinlichkeit, daß $KAKA$ entweder im ersten Viererblock oder im zweiten auftritt (es kann ja auch blockübergreifend auftreten).
2. Daher ist (Gegenereignisse!) die Wahrscheinlichkeit $P(\neg E)$, daß $KAKA$ im ganzen Achterblock nicht auftritt, kleiner als die Wahrscheinlichkeit, daß $KAKA$ weder im ersten noch im zweiten Viererblock auftritt:

$$P(\neg E) < \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^2.$$

3. Daraus folgt aber wiederum, daß

$$P(E) > 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^2,$$

womit wir eine untere Schranke für $P(E)$ bei $n = 8 = 4 \cdot 2$ erhalten haben. Für $n = 12 = 4 \cdot 3$ ergibt sich analog

$$P(E) > 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^3$$

und für $n = 4k$

$$P(E) > 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^k.$$

Nun sieht man unmittelbar, daß die unteren Schranken für $P(E)$ bei wachsendem n bzw. k immer größer werden. Da $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 < 1$ ist, strebt $\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^k$ bei $k \rightarrow \infty$ gegen 0 und daher $P(E)$ gegen 1. D.h. in einer hinreichend langen Serie von Münzwürfen wird mit Wahrscheinlichkeit 1 (also fast sicher) das Muster $KAKA$ vertreten sein.

Nun braucht man sich mit diesem Ergebnis jedoch noch keineswegs zufrieden zu geben. Man kann statt einem Muster der Länge 4 auch *jedes Muster endlicher Länge ℓ* betrachten. Wegen

$$P(E) > 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\ell\right]^k$$

(bei einer Serie der Länge $k \cdot \ell$) kommt mit Wahrscheinlichkeit 1 jedes beliebige, endliche „ KA -Muster“ irgendwann einmal dran!

Dieses Spiel kann sogar noch weiter getrieben werden. Nehmen wir z.B. nicht das Werfen einer Münze, sondern z.B. die zufällige Auswahl eines Buchstabens des Alphabetes, so hat man bei jeder „Ziehung“ nicht nur zwei Möglichkeiten (K oder A), sondern 26 Möglichkeiten, wenn wir annehmen, daß zur Schaffung eines Zufallstextes jedesmal ein Buchstabe aus einer Urne mit den 26 Buchstaben (mit Zurücklegen) gezogen wird (oder gleichwertig: Werfen eines „Würfels“ mit 26 Seiten). Für die Wahrscheinlichkeit $P(E)$, daß ein vorgegebener Text der Länge ℓ in einer Zufallskette der Länge $k \cdot \ell$ vorkommt, erhält man analog die Abschätzung

$$P(E) > 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{26}\right)^\ell\right]^k.$$

Man erhält also folgendes verblüffende Resultat: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebig langer (endlicher) Text in einer vom Zufall produzierten Buchstabenkette vorkommt, strebt mit wachsender Kettenlänge gegen 1 (zwar sehr langsame Konvergenz, aber eben doch).

Oft wird dieses Ergebnis — um die Anschaulichkeit bzw. das Überraschende noch mehr zu betonen — mit einem unsterblichen Affen in Verbindung gebracht, der vor einer Schreibmaschine sitzt und „zufällig“ in die Tasten hämmert. Wenn er nur lange genug tippt, so wird *jeder* endliche Text dabei einmal zu Papier kommen. D.h. gibt man dem Zufall bzw. dem Affen „lange genug“ Zeit (gemeint ist unendlich lange), so wird er mit Wahrscheinlichkeit 1 („fast sicher“) irgendwann einmal Schillers *Bürgschaft*, die gesammelten Werke Shakespeares, das Alte Testament etc. produzieren, wobei dieser Vergleich keineswegs die Leistungen der jeweiligen Autoren schmälern soll!

3 Bedingte Erwartungswerte

Für die Überlegungen der folgenden Abschnitte sind der Begriff des *bedingten Erwartungswertes* und der *Satz vom totalen Erwartungswert* sehr wichtig. Für genauere Darstellungen diesbezüglich sei auf KILIAN 1987 oder HUMENBERGER 1998a verwiesen; an dieser Stelle seien nur die Definition, ein Satz und eine besonders interessante Anwendung bedingter Erwartungswerte angegeben.

Definition: Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ als mögliche Werte und A ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit. Der *bedingte Erwartungswert* bezüglich der Bedingung A wird dann definiert durch

$$E(X|A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k x_k P(X = x_k|A), \quad (1)$$

falls die (möglicherweise unendliche) Reihe absolut konvergiert. In der Definition sind also die Wahrscheinlichkeiten (im Vergleich zum gewöhnlichen Erwartungswert) durch bedingte Wahrscheinlichkeiten zu ersetzen. Es gilt in Analogie zum *Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit* auch der *Satz vom totalen Erwartungswert*.

Satz vom totalen Erwartungswert: Ist X eine diskrete Zufallsvariable und A_n ($n = 1, 2, \dots$) eine *vollständige Zerlegung des Ereignisraumes* Ω

[auch *vollständiges Ereignissystem* oder *vollständige Ereignisdisjunktion* genannt, d.h. ein Ereignissystem mit $\bigcup_n A_n = \Omega$, $A_n \neq \emptyset$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$],

so gilt

$$E(X) = \sum_n E(X|A_n) P(A_n). \quad (2)$$

Beweis: Aufgrund des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt für das Ereignis „ $X = x_k$ “: $P(X = x_k) = \sum_n P(X = x_k|A_n) P(A_n)$ und damit

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_k x_k \cdot P(X = x_k) = \sum_k x_k \sum_n P(X = x_k|A_n) P(A_n) \\ &= \sum_n P(A_n) \underbrace{\sum_k x_k P(X = x_k|A_n)}_{E(X|A_n)} = \sum_n E(X|A_n) P(A_n). \end{aligned}$$

Anwendung: Besonders Einfache Herleitung des Erwartungswertes einer geometrisch verteilten Zufallsvariable: $E(X) = 1/p$

Eine besonders fruchtbare Anwendung bedingter Erwartungswerte ist die Berechnung des Erwartungswertes einer *geometrisch* verteilten Zufallsvariablen, die sonst doch einigen „Aufwand“ erfordert (unendliche Reihen, gliedweises Differenzieren etc. — siehe unten). Sei also X die Anzahl der notwendigen Versuchswiederholungen eines Zufallsexperiments bis zum *ersten* Eintreten eines bestimmten Ereignisses A , das bei jeder Versuchswiederholung mit konstanter Wahrscheinlichkeit p eintritt (Unabhängigkeit der einzelnen Versuche sei vorausgesetzt — „BERNOULLI-Experiment“). Die beiden einfachsten und am öftesten genannten Beispiele dazu sind wohl: „Werfen einer Münze, bis zum ersten Mal *Kopf* fällt“ oder „Würfeln, bis zum ersten Mal eine *Sechs* fällt“.

Nun gilt nach obigem Satz vom totalen Erwartungswert (mit A sei hier gemeint: „beim ersten Versuch tritt A ein“)

$$E(X) = E(X|A)P(A) + E(X|\neg A)P(\neg A) = 1 \cdot p + (1 + E(X))(1 - p). \quad (3)$$

Die hier eingegangene Identität $E(X|\neg A) = 1 + E(X)$ ist leicht zu sehen: Wenn beim ersten Versuch nicht A (also $\neg A$) eintritt, ist bereits ein *Fehlversuch* passiert (daher „1 + ...“) und das Spiel beginnt von neuem (daher „... + $E(X)$ “). Aus (3) folgt sofort $pE(X) = 1$ bzw. das endgültige Resultat

$$E(X) = \frac{1}{p}. \quad (4)$$

Im Durchschnitt (auf lange Sicht) muß man demnach zweimal eine Münze werfen, um zum ersten Mal *Kopf*, bzw. sechsmal einen Würfel, um erstmalig eine *Sechs* zu erhalten.

4 Die Muster „KA“ und „KK“ in Münzwurfserien — eine Anwendung bedingter Erwartungswerte

Verschiedene Sichtweisen zur Beurteilung der „Wahrscheinlichkeit von Mustern“:

1. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeit, daß beim *zweimaligen* Münzwurf das Ergebnis KA bzw. KK erscheint, so ergibt sich jeweils $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ — die genannten Muster KA und KK sind unter diesem Aspekt also *gleichwahrscheinlich*. Dies würde klarerweise auch für alle anderen zweigliedrigen Muster gelten (AK, AA). Auch drei- und mehrgliedrige Muster (n Stellen) haben beim n -maligen Werfen einer Münze jeweils gleiche Auftretenswahrscheinlichkeit, nämlich $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
2. Als weiteres Kriterium für den Wahrscheinlichkeitsvergleich von n -gliedrigen Mustern X_n bzw. Y_n könnte man die durchschnittlich nötige Anzahl von Würfeln betrachten (Erwartungswerte), um erstmalig X_n bzw. Y_n zu erhalten. Für diese Erwartungswerte ergeben sich i.a. verschiedene Zahlen. Wenn der Erwartungswert der nötigen Würfe, bis das Muster X_n erstmalig auftritt, *kleiner* als bei einem Muster Y_n ist, so wird in dieser Sichtweise X_n als wahrscheinlicher zu bezeichnen sein.

Konkret: Für KA sind im Durchschnitt 4 Würfe nötig, für KK hingegen durchschnittlich 6 (siehe unten). Unter diesem Aspekt ist also KA doch als wahrscheinlicher zu bezeichnen

als KK (im Gegensatz zur Gleichwahrscheinlichkeit unter den anderen beiden Aspekten). Bei viergliedrigen Mustern erhält man z.B., daß für $KKAA$ durchschnittlich 20 Würfe benötigt werden, für $AKAA$ hingegen nur 18 (vgl. SZEKELY 1990, S.61ff). So gesehen ist $AKAA$ doch als wahrscheinlicher zu bezeichnen als $KKAA$.

3. Zieht man jedoch als Kriterium für den Wahrscheinlichkeitsvergleich heran, ob es wahrscheinlicher ist, daß in einer Wurfserie KA vor KK kommt oder umgekehrt, so ergibt sich ebenfalls *Gleichwahrscheinlichkeit*, denn nach dem ersten auftretenden K kommt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder A oder K .

Im allgemeinen muß sich bei der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten n -gliedrigen Musters X_n vor einem anderen n -gliedrigen Y_n jedoch keineswegs $\frac{1}{2}$ ergeben. So erhält man z.B. für die Wahrscheinlichkeit, daß das Muster AKK vor KKK erscheint, den Wert $\frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}$ (so gesehen ist also AKK „dreimal so wahrscheinlich“ wie KKK). Für viergliedrige Muster ergibt sich z.B.: Die Wahrscheinlichkeit, daß $KKAA$ vor $AKAA$ eintritt, beträgt $\frac{9}{14}$ (so gesehen ist $KKAA$ fast doppelt so wahrscheinlich wie $AKAA$ — im Gegensatz zu oben, wo $AKAA$ wahrscheinlicher war!). Schon bei zweigliedrigen Mustern gibt es Gegenbeispiele zur Gleichwahrscheinlichkeit in diesem Sinn — siehe unten.

4.1 Vergleich von zweigliedrigen Mustern in bezug auf die Auftretenswahrscheinlichkeit vor einem anderen

Wie bereits erwähnt, muß bei n -gliedrigen Mustern X_n bzw. Y_n i.a. nicht gelten: $P(X_n \text{ vor } Y_n) = P(Y_n \text{ vor } X_n) = \frac{1}{2}$. Wir wollen dies anhand von zweigliedrigen Mustern verdeutlichen.

Als mögliche zweigliedrige Muster kommen in Frage: AA , AK , KA , KK . Aus diesen vier Mustern können wir sechs Paarungen von Mustern X_2 , Y_2 bilden und Überlegungen für die Wahrscheinlichkeiten $P(X_2 \text{ vor } Y_2)$ (oder umgekehrt $P(Y_2 \text{ vor } X_2)$) anstellen.

Aus *Symmetriegründen* erhält man in diesem Sinn zwei gleichwahrscheinliche Paarungen (AA und KK ; AK und KA):

$$P(AA \text{ vor } KK) = P(KK \text{ vor } AA) = \frac{1}{2},$$

$$P(AK \text{ vor } KA) = P(KA \text{ vor } AK) = \frac{1}{2},$$

und zwei weitere gleichwahrscheinliche Paarungen bei jeweils gleichem „Anfang“ (AA und AK , KK und KA ; nach dem dem erstmaligen Auftreten des jeweils gleichen Anfangs kommt ja mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder A oder K):

$$P(AA \text{ vor } AK) = P(AK \text{ vor } AA) = \frac{1}{2},$$

$$P(KK \text{ vor } KA) = P(KA \text{ vor } KK) = \frac{1}{2}.$$

Bei den noch fehlenden Paarungen mit jeweils gleichem „Schluß“ (AA und KA , AK und KK) kommen wir jedoch zu unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten. Betrachten wir z.B. die Wahrscheinlichkeit, daß KK vor AK kommt. Sehr einfach scheint uns z.B. folgende Überlegung (Begründung) dafür zu sein: die ersten beiden Würfe einer Serie können KK , AK , KA , AA

sein (jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$). Im ersten Fall (KK) ist klarerweise „ KK vor AK “ eingetreten. Im zweiten trivialerweise umgekehrt; aber auch nach KA bzw. AA kann niemals „ KK vor AK “ eintreten, denn sobald nach KA bzw. AA ein K folgt (nach u.U. einigen A 's), ist in diesen Fällen „ AK vor KK “ eingetreten! In drei von vier möglichen Anfangskonstellationen tritt also mit Sicherheit „ AK vor KK “ ein, in einer „ KK vor AK “. Analoge Überlegungen können wir auch mit AA und KA anstellen und erhalten insgesamt:

$$P(KK \text{ vor } AK) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P(AK \text{ vor } KK) = \frac{3}{4},$$

$$P(AA \text{ vor } KA) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P(KA \text{ vor } AA) = \frac{3}{4}.$$

So gesehen ist also AK „dreimal so wahrscheinlich“ wie KK , und KA ist „dreimal so wahrscheinlich“ wie AA .

In diesem Lichte eröffnet sich die Möglichkeit eines *unfairen* Spiels, das im ersten Moment vielleicht gar nicht so aussieht. Die volle Tücke dieses Spiels kommt allerdings erst bei drei- und mehrgliedrigen Mustern zum Tragen. Zwei Spieler (S_1 und S_2) vereinbaren folgendes (aus der Sicht von S_1 vielleicht verlockendes, da in einem gewissen Sinn *großzügiges*) Spiel: S_1 kann sich ein beliebiges zweigliedriges Muster (AA, AK, KA, KK) aussuchen (S_1 hat also die erste Wahl, großzügiges Angebot von S_2 ?) und S_2 wählt daraufhin seinerseits ein Muster aus den drei verbleibenden. Eine faire Münze soll nun geworfen werden und gewonnen hat jener Spieler, dessen Muster zuerst (als Ergebnis zweier aufeinanderfolgender Würfe) erscheint. Zu jeder Wahl von S_1 kann S_2 ein Muster wählen, mit dem er zumindest nicht schlechter dran ist (in zwei Fällen gleich gut und in zwei Fällen wesentlich besser): Wenn S_1 das Muster AK oder KA wählt, so hat S_2 jeweils zwei Möglichkeiten ein wenigstens gleich gutes zu wählen (AA oder KA ; KK oder AK); wenn jedoch Spieler S_1 das Muster AA bzw. KK wählt, so kann S_2 mit der Wahl von KA bzw. AK richtiggehend kontern und sich eine Gewinnwahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{2}{4}$ sichern! In Tabelle 1 ist dies (einschließlich der jeweils zugehörigen Erwartungswerte – siehe folgenden Abschnitt) übersichtlich dargestellt.

Bei dreigliedrigen Mustern gibt es zu jeder Wahl von S_1 eine Wahl von S_2 , mit der er mit einer Wahrscheinlichkeit von zumindest $\frac{2}{3}$ gewinnt — siehe Abschnitt 5.2.

4.2 Erwartungswerte für die Anzahl nötiger Würfe, bis erstmalig ein bestimmtes zweigliedriges Muster auftritt

Wir geben zwei kurze Möglichkeiten an zu begründen, daß der Erwartungswert für die nötige Anzahl von Münzwürfen für KA den Wert 4 und für KK den Wert 6 hat (im Sinne der Erwartungswerte ist also KA deutlich „wahrscheinlicher“ als KK). Diese Erwartungswerte seien im folgenden mit $E(KA)$ bzw. $E(KK)$ bezeichnet. Aus Symmetriegründen gilt natürlich $E(KA) = E(AK)$ und $E(KK) = E(AA)$.

1. Für KA hilft uns eine ganz simple Überlegung. Das Ereignis „zum ersten Mal KA “ tritt genau dann ein, wenn nach dem ersten auftretenden K erstmalig ein A folgt. Ein solches Muster könnte durch folgende Darstellung angedeutet werden: $\dots K] \dots KA$. Vor dem ersten K können noch einige A 's auftreten und danach noch einige weitere K 's. Jedenfalls bedeutet „warten auf KA “ nichts anderes als „warten auf das erste K und dann warten auf das erste A “. Da für beide bei jedem Versuch die Auftretenswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$

beträgt, ergibt sich für die entsprechenden *Teilwartezeiten* (gemeint ist die Anzahl der nötigen Versuche) jeweils $\frac{1}{p} = 2$ (siehe oben (4): Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariable — mit Hilfe von bedingten Erwartungswerten einfach berechnet). In Summe erhalten wir daher für den Erwartungswert $E(KA) = 2 + 2 = 4$.

2. Nun wollen wir $E(KK) = 6$ zeigen. Sei $E_K \stackrel{\text{def}}{=} E(KK|K)$ der Erwartungswert der nötigen Wurfanzahl für KK unter der Bedingung, daß der erste Wurf K ergab; analog sei $E_A \stackrel{\text{def}}{=} E(KK|A)$ definiert. Dann können wir folgende Beziehungen zwischen den bedingten Erwartungswerten E_K und E_A anschreiben (Erläuterungen unten):

$$E_K = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + E_A \cdot \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad E_A = 1 + \underbrace{E_K \cdot \frac{1}{2} + E_A \cdot \frac{1}{2}}_{E(KK)} \quad (5)$$

Erklärungen:

- E_K : Der erste Wurf fällt auf K („1 + ...“), dann kommt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder wieder ein K („... + 1 · $\frac{1}{2}$ “) oder ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein A , was so viel wie einen „neuen ersten Wurf A “ bedeutet („... + $E_A \cdot \frac{1}{2}$ “).
- E_A : Der erste Wurf fällt auf A („1 + ...“) und das Spiel kann sozusagen wieder von neuem beginnen: mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ fällt beim 2. Mal entweder ein K („... + $E_K \cdot \frac{1}{2}$ “, neuer „Anfangswurf K “) oder wieder ein A („Anfangswurf A “: „... + $E_A \cdot \frac{1}{2}$ “).

Aus den Gleichungen (5) erhalten wir sofort $E_A = 7$ und $E_K = 5$ und mit diesen bedingten Erwartungswerten schließlich

$$E(KK) = E_A \cdot \frac{1}{2} + E_K \cdot \frac{1}{2} = 6 \quad (6)$$

Die Erwartungswerte der nötigen Würfe für das *bestimmte* „Doppelmuster“ KK bzw. für das *bestimmte* „Abwechslungsmuster“ KA sind also deutlich verschieden. Dadurch könnte man sich zur Vermutung hinreißen lassen, daß auch bei den zugehörigen Erwartungswerten für ein *beliebiges Doppelmuster* (also „ KK oder AA “) bzw. für eine *beliebige Abwechslung* (also „ AK oder KA “) ein Unterschied bestehe. Es ist jedoch leicht zu sehen [besonders bei $E(AK)$ oder KA]], daß sich hier jeweils 3 ergibt.

- $E(AK, KA) \stackrel{\text{def}}{=} E(AK \text{ oder } KA) = 1 + 2 = 3$: Warten auf eine Abwechslung bedeutet ja nichts anderes, als die Münze einmal zu werfen („1 + ...“) und dann auf das jeweilige *andere* Ergebnis zu warten („... + 2“, geometrische Verteilung — siehe (4)).
- $E(KK, AA) \stackrel{\text{def}}{=} E(KK \text{ oder } AA) = 3$: Hier kann man nun wieder mit bedingten Erwartungswerten kurz und erfolgreich argumentieren. Sei also $E_K \stackrel{\text{def}}{=} E(KK, AA|K)$ der Erwartungswert für ein *beliebiges Doppelmuster* unter der Bedingung, daß beim ersten Wurf K gefallen ist; analog sei $E_A \stackrel{\text{def}}{=} E(KK, AA|A)$ definiert. Es ist zunächst völlig klar (aus Symmetriegründen), daß $E_K = E_A$ sein muß und wegen $E(KK, AA) = \frac{1}{2} E_K + \frac{1}{2} E_A$ gilt daher $E(KK, AA) = E_K = E_A$. Mit den eben eingeführten Bezeichnungen (bedingten Erwartungswerten) ergibt sich

$$E_K = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + E_A \cdot \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad E_A = 1 + E_K \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}, \quad (7)$$

woraus wir unmittelbar $E_A = E_K = E(KK, AA) = 3$ erhalten.

	KK 6	KA 4	AK 4	AA 6
KK (6)	—	$\boxed{1/2}$	1/4	1/2
KA (4)	1/2	—	$\boxed{1/2}$	$\boxed{3/4}$
AK (4)	$\boxed{3/4}$	$\boxed{1/2}$	—	1/2
AA (6)	1/2	1/4	$\boxed{1/2}$	—

Tab. 1: 2-gliedrige Muster: Erwartungswerte; Gewinnwahrscheinlichkeiten des jeweiligen Zeilen-Musters bei „kommt früher als“ in einer Wurfserie mit einer LAPLACE-Münze.

$\boxed{7/8}$ eingerahmt sind die jeweiligen Spaltenmaxima (\rightarrow Spiel: Julia — Julian). $1/2$ kursiv sind jene Werte $1/2$ gesetzt, bei denen gilt: unterschiedliche Erwartungswerte, aber gleiche Wahrscheinlichkeiten (eben $1/2$) bei „kommt früher als“.

5 Drei- und viergliedrige Muster

5.1 Erwartungswerte bei dreigliedrigen Mustern

Ganz analog zu zweigliedrigen Mustern können wir mit Hilfe bedingter Erwartungswerte und dem „Satz vom totalen Erwartungswert“ die Erwartungswerte für die bei den einzelnen dreigliedrigen Mustern nötige Anzahl von Münzwürfen berechnen.

Man erhält die in Tab. 2 aufgelisteten Erwartungswerte (= durchschnittlich nötige Anzahl von Würfeln, bis das jeweilige Muster erstmals zusammenhängend erscheint).

Muster	KKK	KK A	KA K	AK K	KA A	AK A	AA K	AAA
Erwartungswert	14	8	10	8	8	10	8	14

Tab. 2: Erwartungswerte der einzelnen dreigliedrigen Muster

An einem Beispiel sei die Berechnung vorgeführt: $E(KKA) = 8$.

Da in diesem Beispiel natürlich nur der Erwartungswert $E(KKA)$ und kein anderer vorkommt, lassen wir - der Übersichtlichkeit halber - das Argument KKA im folgenden weg. Wir führen wieder vier verschiedene bedingte Erwartungswerte ein. $E_{AA}, E_{AK}, E_{KA}, E_{KK}$ seien die bedingten Erwartungswerte (für KKA) unter der Voraussetzung, daß die ersten beiden Würfe AA, AK, KA, KK waren. Je zwei dieser Startmuster sind klarerweise wieder gleichwahrscheinlich, so daß jedem von ihnen eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ zukommt. Für die genannten bedingten Erwartungswerte erhalten wir:

$$E_{AA} = 1 + \frac{1}{2}E_{AA} + \frac{1}{2}E_{AK}$$

$$E_{AK} = 1 + \frac{1}{2}E_{KA} + \frac{1}{2}E_{KK}$$

$$E_{KA} = 1 + \frac{1}{2}E_{AA} + \frac{1}{2}E_{AK}$$

$$E_{KK} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2}E_{KK}.$$

Die erste Gleichung besagt z.B., daß nach dem Startmuster AA mit gleicher Wahrscheinlichkeit (jeweils $\frac{1}{2}$) ein A oder ein K fällt: Fällt ein A an der dritten Stelle, so liegt erneut das Startmuster AA vor (an zweiter und dritter Stelle; wegen der 1. Stelle jeweils „1 + ...“); fällt ein K , so liegt AK als neues Startmuster vor. Ganz analog sind die zweite und dritte Gleichung zu interpretieren.

Vierte Gleichung: Fällt nach KK an dritter Stelle ein A , so ist $KK A$ erreicht (mit 2 Würfeln nach dem ersten K), fällt ein weiteres K , so liegt wieder das Anfangsmuster KK vor.

Dieses lineare Gleichungssystem in vier Unbekannten hat die Lösung

$$E_{AA} = 10, \quad E_{AK} = 8, \quad E_{KA} = 10, \quad E_{KK} = 4.$$

[Der Wert $E_{KK} = 4$ ist auch ohne obige Gleichung(en) klar: Wenn bereits KK gefallen ist (2 Würfe), so ist die Frage nach $KK A$ gleichzusetzen mit der Frage nach dem nächsten A , auf das man – wie wir wissen – durchschnittlich 2 Würfe lang warten muß, daher $E_{KK} = 2 + 2 = 4$.] Mit diesen Werten erhalten wir für den in Rede stehenden Erwartungswert $E = E(KKA)$

$$E = \frac{1}{4}(E_{AA} + E_{AK} + E_{KA} + E_{KK}) = \frac{1}{4}(10 + 8 + 10 + 4) = 8.$$

Damit hat man natürlich auch (Symmetrie) $E(AAK) = 8$ gezeigt.

5.2 Muster X vor Muster Y bei dreigliedrigen Mustern — ein unfares Spiel

Das in Abschnitt 4.1 erwähnte Spiel soll auf das dreigliedrige Analogon ausgebaut werden.

Spiel: Julia und Julian werfen eine faire Münze. Bevor sie beginnen, sucht sich jeder von ihnen ein dreigliedriges Muster aus (8 Möglichkeiten). Gewinner ist derjenige, dessen Muster als erstes (als aufeinanderfolgende Wurfresultate) erscheint. Julian läßt der Höflichkeit halber („Ladies first“) seiner Gegnerin Julia die erste Wahl. Dies bedeutet auf den ersten Blick für Julia einen Vorteil, denn Julian kann dann sein Muster nur aus den restlichen sieben möglichen wählen. Soll Julia dieses „gutgemeinte“ Angebot annehmen?

Antwort: Es stellt sich heraus, daß die erste Wahl hier ein eminenten Nachteil wäre, denn Julian könnte nach jeder Wahl von Julia ein Muster auswählen, mit dem er zumindest die doppelte Gewinnchance von Julia hätte.

Wir machen dies an einem Beispiel klar. Wenn Julia sich für das Muster KAK entscheidet, so könnte Julian das Muster $KK A$ wählen und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ gewinnen. Mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten ist dies leicht einzusehen: Es seien $P_{AA}, P_{AK}, P_{KA}, P_{KK}$ die bedingten Wahrscheinlichkeiten, daß Julian gewinnt (also das Ereignis „ $KK A$ vor KAK “ eintritt) unter der Voraussetzung, daß die ersten beiden Würfe das Ergebnis AA, AK, KA, KK hatten. Je zwei dieser Startmuster sind klarerweise gleichwahrscheinlich, so daß jedem von ihnen eine

Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ zukommt. Für die genannten bedingten Wahrscheinlichkeiten erhalten wir (Erklärung siehe unten):

$$\begin{aligned}P_{AA} &= \frac{1}{2}P_{AA} + \frac{1}{2}P_{AK} \\P_{AK} &= \frac{1}{2}P_{KA} + \frac{1}{2}P_{KK} \\P_{KA} &= \frac{1}{2}P_{AA} + \frac{1}{2} \cdot 0 \\P_{KK} &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}P_{KK}.\end{aligned}$$

Die erste Gleichung besagt z.B., daß nach dem Startmuster AA mit gleicher Wahrscheinlichkeit (jeweils $\frac{1}{2}$) ein A oder ein K fällt: Fällt ein A an der dritten Stelle, so liegt erneut das Startmuster AA (an zweiter und dritter Stelle) vor; fällt ein K , so liegt AK als neues Startmuster vor. Ganz analog ist die zweite Gleichung zu interpretieren.

Dritte Gleichung: Wenn nach KA ein A fällt, so liegt AA als neues Anfangsmuster vor, wenn K fällt, so ist das Muster KAK erschienen und $P(KKA \text{ vor } KAK) = 0$! Vierte Gleichung analog.

Dieses lineare Gleichungssystem in vier Unbekannten hat die Lösung

$$P_{AA} = \frac{2}{3}, \quad P_{AK} = \frac{2}{3}, \quad P_{KA} = \frac{1}{3}, \quad P_{KK} = 1.$$

[Die Tatsache $P_{KK} = 1$ ist auch von vornherein klar: Wenn KK das Ergebnis der ersten beiden Würfe ist, so wäre das Muster KKA (und damit „ KKA vor KAK “) nur dadurch zu verhindern, daß *niemals* A fallen würde - ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0.] Mit diesen Werten erhalten wir für die Gewinnwahrscheinlichkeit P für Julian („ KKA vor KAK “)

$$P = \frac{1}{4}(P_{AA} + P_{AK} + P_{KA} + P_{KK}) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{2}{3}.$$

Die Wahl von Julia war aber ohnehin noch eine ihrer besten, andere hätten sie noch viel weiter in einen Nachteil versetzt. Hätte sie nämlich z.B. KKK gewählt, so hätte Julian durch Wählen des Musters AKK seine Gewinnwahrscheinlichkeit sogar auf $\frac{7}{8}$ steigern können (er würde immer gewinnen, außer wenn die ersten drei Würfe KKK zeigen!).

In Tab. 3 sind nun alle Wahrscheinlichkeiten aufgelistet, mit der das jeweilige Zeilen-Muster früher als das jeweilige Spalten-Muster beim Werfen einer fairen Münze kommt. Der höchste Wert jeder Spalte ist eingerahmt: Das in dieser Zeile stehende Muster ist also das beste „Gegenmittel“ gegen das in dieser Spalte stehende. M.a.W.: Zu jeder Wahl von Julia (Spaltenwahl) sucht sich Julian in der gewählten Spalte jenes Element (Zeilenwahl), mit dem er die größten Gewinnchancen hat.

Die Wahrscheinlichkeiten können alle nach demselben Schema wie oben berechnet werden (wobei das Lösen des jeweiligen Gleichungssystems bei Einsatz eines CAS auch kein zeitliches bzw. motivationales Problem darstellen sollte). 8 von den 28 möglichen Paarungen dreigliedriger Muster brauchen nicht durchgerechnet zu werden, da von vornherein feststeht, daß keines der beiden Muster bevorzugt werden kann (Symmetrieüberlegungen bzgl. K - A ; oder: Unterschiede nur an der dritten Stelle). Bei den restlichen 20 Fällen (Paarungen) sind jeweils 2 symmetrisch zueinander bzgl. K und A , so daß also in Wirklichkeit nur 10 Fälle (Paarungen) zu untersuchen bleiben (aber ohne CAS braucht man auch für 10 einfache 4×4 -Systeme einiges an Durchhaltevermögen).

	KKK 14	KKA 8	KAK 10	AKK 8	KAA 8	AKA 10	AAK 8	AAA 14
KKK (14)	—	$1/2$	$2/5$	$1/8$	$2/5$	$5/12$	$3/10$	$1/2$
KKA (8)	$1/2$	—	$2/3$	$1/4$	$2/3$	$5/8$	$1/2$	$7/10$
KAK (10)	$3/5$	$1/3$	—	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$3/8$	$7/12$
AKK (8)	$7/8$	$3/4$	$1/2$	—	$1/2$	$1/2$	$1/3$	$3/5$
KAA (8)	$3/5$	$1/3$	$1/2$	$1/2$	—	$1/2$	$3/4$	$7/8$
AKA (10)	$7/12$	$3/8$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	—	$1/3$	$3/5$
AAK (8)	$7/10$	$1/2$	$5/8$	$2/3$	$1/4$	$2/3$	—	$1/2$
AAA (14)	$1/2$	$3/10$	$5/12$	$2/5$	$1/8$	$2/5$	$1/2$	—

Tab. 3: 3-gliedrige Muster: Erwartungswerte; Gewinnwahrscheinlichkeiten des jeweiligen Zeilen-Musters bei „kommt früher als“ in einer Wurfserie mit einer LAPLACE-Münze

Legende für Tab. 3 und 5 bzw. 6 (am Schluß des Beitrages):

- $7/8$ eingerahmt sind die jeweiligen Spaltenmaxima (\rightarrow Spiel: Julia — Julian).
- $1/2$ kursiv sind jene Werte $1/2$ gesetzt, bei denen gilt: unterschiedliche Erwartungswerte, aber gleiche Wahrscheinlichkeiten (eben $1/2$) bei „kommt früher als“.
- $1/4$ in typewriter sind jene Werte ($\neq 1/2$) gesetzt, bei denen gilt: gleiche Erwartungswerte, aber unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten bei „kommt früher als“ (eben $\neq 1/2$) (kommt bei 2-gliedrigen Mustern nicht vor).
- $9/14$ fett sind jene Werte ($\neq 1/2$) gedruckt, bei denen die Sichtweisen „Erwartungswert“ bzw. „Wahrscheinlichkeiten für kommt früher als“ sogar zur gegenteiligen Einschätzung führen (kommt bei 2- und 3-gliedrigen Mustern nicht vor).

Wir erhalten dadurch ein Beispiel einer nichttransitiven (weil zyklischen) Beziehung: „Muster X kommt mit einer Wahrscheinlichkeit $p > \frac{1}{2}$ vor Muster Y“ (bzw. „Muster X ist besser als Muster Y“), in Zeichen: $X \overset{p}{>} Y$. Es gilt nämlich z.B., wie man aus Tab. 3 erkennt (ausgehend von AAK kommt man wieder zu AAK, wobei jedesmal die zugehörige „Siegeswahrscheinlichkeit“ (deutlich!) größer als $\frac{1}{2}$, also jedes Muster deutlich besser als sein Vorgänger ist):

$$AAK \overset{2/3}{>} AKK \overset{3/4}{>} KKA \overset{2/3}{>} KAA \overset{3/4}{>} AAK.$$

„Nichttransitivität“: Aufgrund der ersten drei „Besser“-Relationen dürfte man bei Transitivität von „besser“ ja AAK *besser als* KAA , in Zeichen $AAK \stackrel{p}{>} KAA$ mit $p > 1/2$ erwarten, was durch die letzte Relation ja widerlegt wird.

Bemerkungen:

- Man sieht an den Zeilen in Tab. 3, daß alle reinen und alle symmetrischen Muster (KKK , KAK , AKA , AAA) *niemals* das beste Gegenmittel zu einem vorher gewählten Muster des Gegenspielers darstellen, und daß die Rolle des besten Gegenmittels zwischen den anderen vier Mustern gleichmäßig aufgeteilt ist – bei jeweils zwei Mustern als Erstwahl (wichtig für Julian).
- Weiters sieht man an den Spalten auch, daß es nur drei „Klassen“ von Erstwahlen gibt (wichtig für Julia): die schlechtesten wären KKK bzw. AAA (hier könnte Julian seine Gewinnwahrscheinlichkeit auf $\frac{7}{8}$ steigern), die zweitschlechtesten wären $KK A$ bzw. AAK (Gewinnwahrscheinlichkeit von Julian = $\frac{3}{4}$), und die drittschlechtesten („besten“) wären KAK , AKK , KAA , AKA — hier hätte Julian eine Chance von „nur“ $\frac{2}{3}$.
- Wenn Julia ihr Muster aus den acht möglichen gleichverteilt (also jedes mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$, was natürlich unklug wäre) und geheim wählen, Julian ihr Muster also erst nach seiner eigenen Wahl erfahren würde (bei zufällig gleichem Muster \rightarrow Wahlwiederholung), so müßte Julian jenes Muster aus Tab. 3 nehmen, dessen Zeilensumme maximal ist, um die größte durchschnittliche Gewinnchance zu haben. Dies ist der Fall bei AKK bzw. KAA (durchschnittliche Gewinnchance ≈ 0.58). Die zweitbesten Muster in diesem Sinne wären $KK A$ bzw. AAK : durchschnittliche Gewinnchance ≈ 0.56 .
- Die Tabellen 1, 3, 5 und 6 in eine Tabelle nebeneinander geschrieben (diese beiden sind aus Platzgründen nicht in *einer* Tabelle, sondern geteilt wiedergegeben – Beitragsende) haben klarerweise gewisse Symmetrieeigenschaften: (1) Punktsymmetrie bzgl. ihres Zentrums. (2) Bzgl. der Haupt- bzw. Nebendiagonale besteht eine „Ergänzung auf 1“-Symmetrie.
- Die beobachtete Unfairneß des Spiels besteht nicht nur bei 3-gliedrigen Mustern, sondern bei jedem $n \geq 3$: zu jedem n -gliedrigen Muster gibt es ein anderes n -gliedriges Muster, das sich mit einer Wahrscheinlichkeit $p > \frac{1}{2}$ **früher** in einer zufälligen Serie ergibt, also „besser“ in diesem Sinne ist (siehe z.B. CHEN/ZAME 1977). Bei jedem $n \geq 3$ gibt es also Intransitivitäten dieses Begriffes „besser“.

Es gibt bei 3-gliedrigen Mustern einige Paarungen, die zwar gleichen Erwartungswert haben, wobei aber die Auftrittswahrscheinlichkeit des einen vor dem anderen ungleich $\frac{1}{2}$ ist (in Tab. 3 mit typewriter-Schriftbild), z.B.:

$$AKK - KKA: \quad E(AKK) = E(KKA) = 8, \text{ aber } P(AKK \text{ vor } KKA) = \frac{3}{4};$$

$$KKA - KAA: \quad E(KKA) = E(KAA) = 8, \text{ aber } P(KKA \text{ vor } KAA) = \frac{2}{3};$$

analog bei Vertauschung von K und A). Dieses Phänomen kann bei 2-gliedrigen Mustern noch nicht beobachtet werden: es gibt bei 2-gliedrigen Mustern nämlich nur zwei Paarungen, bei denen sich in der Sichtweise *kommt früher als* ein Wert $\neq \frac{1}{2}$ ergibt (siehe oben) — die durch *kommt früher als* bevorzugten Muster haben aber auch kleineren Erwartungswert:

$$PAK \text{ vor } KK) = \frac{3}{4}; \quad E(AK) = 4, \quad E(KK) = 6.$$

$$P(KA \text{ vor } AA) = \frac{3}{4}; \quad E(KA) = 4, \quad E(AA) = 6.$$

Genauso gibt es bei 3-gliedrigen Mustern einige Fälle (Paarungen), bei denen die Auftrittswahrscheinlichkeit des einen vor dem anderen gleich $\frac{1}{2}$ ist, aber die Erwartungswerte (deutlich)

verschieden sind (siehe Tab. 3, Kennzeichnung durch *kursiv*-Schriftbild), z.B.:

$$KKK - KKA: \quad E(KKK) = 14 \quad E(KKA) = 8 ,$$

$$KAK - AKK: \quad E(KAK) = 10 \quad E(AKK) = 8 ,$$

$$KAK - KAA: \quad E(KAK) = 10 \quad E(KAA) = 8 ;$$

(analog bei Vertauschung von *K* und *A*). Dieses zweite Phänomen war schon bei 2-gliedrigen Mustern zu sehen:

$$P(KA \text{ vor } KK) = \frac{1}{2}, \text{ aber } E(KA) = 4 \text{ und } E(KK) = 6 ;$$

$$P(AK \text{ vor } AA) = \frac{1}{2}, \text{ aber } E(AK) = 4 \text{ und } E(AA) = 6 .$$

Die beiden Sichtweisen können also schon bei 2- bzw. 3-gliedrigen Mustern bei einer festen Musterpaarung *Gleichwahrscheinlichkeit* bzw. *Bevorzugung eines Musters* bringen!

Erstmalig bei 4-gliedrigen Mustern können nun die beiden Sichtweisen „kommt früher als“ bzw. „Erwartungswert“ das *echte Gegenteil voneinander* bringen, d.h. nicht nur „Gleichwahrscheinlichkeit“ gegen „Bevorzugung eines Musters“, sondern sogar *Bevorzugung des einen Musters* gegen *Bevorzugung des anderen Musters*:

$$P(KAKA \text{ vor } AKAA) = \frac{9}{14} > \frac{1}{2}, \text{ aber } E(KAKA) = 20 > 18 = E(AKAA).$$

Für weitere Beispiele siehe Tab. 5 und 6 am Ende des Aufsatzes.

5.3 Viergliedrige Muster

In ganz analoger Weise können die Erwartungswerte bei viergliedrigen Mustern berechnet werden durch 8 lineare Gleichungen in 8 Unbekannten, i.e. bedingte Erwartungswerte $E_{AAA}, E_{AAK}, E_{AKA}, E_{KAA}, E_{AKK}, E_{KAK}, E_{KKA}, E_{KKK}$. Es bezeichne E_{AAA} den bedingten Erwartungswert der Anzahl nötiger Würfe für *KAKA* unter der Bedingung, daß die ersten drei Würfe das Ergebnis *AAA* hatten; die anderen bedingten Erwartungswerte analog. So können z.B. die oben schon angegebenen Werte für $E(AKAA) = 18$ und $E(KAKA) = 20$ berechnet werden. Wir

wollen dies zunächst für $E \stackrel{\text{def}}{=} E(KAKA) = 20$ zeigen. Es gilt

$$E = \frac{1}{8} (E_{AAA} + E_{AAK} + E_{AKA} + E_{KAA} + E_{AKK} + E_{KAK} + E_{KKA} + E_{KKK}) .$$

Wir haben also zuerst diese bedingten Erwartungswerte zu berechnen mit Hilfe der folgenden 8 linearen Gleichungen (die jeweiligen Lösungen sind links in Klammer angegeben):

$$\begin{aligned} (E_{AAA} = 23) \quad E_{AAA} &= 1 + \frac{1}{2}E_{AAA} + \frac{1}{2}E_{AAK} \\ (E_{AAK} = 21) \quad E_{AAK} &= 1 + \frac{1}{2}E_{AKA} + \frac{1}{2}E_{AKK} \\ (E_{AKA} = 19) \quad E_{AKA} &= 1 + \frac{1}{2}E_{KAA} + \frac{1}{2}E_{KAK} \\ (E_{KAA} = 23) \quad E_{KAA} &= 1 + \frac{1}{2}E_{AAA} + \frac{1}{2}E_{AAK} \\ (E_{AKK} = 21) \quad E_{AKK} &= 1 + \frac{1}{2}E_{KKA} + \frac{1}{2}E_{KKK} \\ (E_{KAK} = 13) \quad E_{KAK} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2}E_{AKK} \\ (E_{KKA} = 19) \quad E_{KKA} &= 1 + \frac{1}{2}E_{KAA} + \frac{1}{2}E_{KAK} \\ (E_{KKK} = 21) \quad E_{KKK} &= 1 + \frac{1}{2}E_{KKA} + \frac{1}{2}E_{KKK} . \end{aligned}$$

Für $E = E(KAKA)$ — das arithmetische Mittel dieser 8 Werte — erhalten wir dadurch 20.

Nun interessieren wir uns für den Erwartungswert $E \stackrel{\text{def}}{=} E(AKAA)$. Ganz analog ergibt sich in diesem Fall (die Lösungen sind wieder links in Klammer angegeben):

$$\begin{aligned} (E_{AAA} = 19) \quad E_{AAA} &= 1 + \frac{1}{2}E_{AAA} + \frac{1}{2}E_{AAK} \\ (E_{AAK} = 17) \quad E_{AAK} &= 1 + \frac{1}{2}E_{AKA} + \frac{1}{2}E_{AKK} \\ (E_{AKA} = 11) \quad E_{AKA} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2}E_{KAK} \\ (E_{KAA} = 19) \quad E_{KAA} &= 1 + \frac{1}{2}E_{AAA} + \frac{1}{2}E_{AAK} \\ (E_{AKK} = 21) \quad E_{AKK} &= 1 + \frac{1}{2}E_{KKA} + \frac{1}{2}E_{KKK} \\ (E_{KAK} = 17) \quad E_{KAK} &= 1 + \frac{1}{2}E_{AKA} + \frac{1}{2}E_{AKK} \\ (E_{KKA} = 19) \quad E_{KKA} &= 1 + \frac{1}{2}E_{KAA} + \frac{1}{2}E_{KAK} \\ (E_{KKK} = 21) \quad E_{KKK} &= 1 + \frac{1}{2}E_{KKA} + \frac{1}{2}E_{KKK} \end{aligned}$$

Für $E = E(AKAA)$ (arithmetisches Mittel) erhalten wir hier 18. Tabelle 4 gibt einen Überblick über die Erwartungswerte bei den einzelnen 4-gliedrigen Mustern.

<i>KKKK</i>	<i>KKKA</i>	<i>KKAK</i>	<i>KAKK</i>	<i>AKKK</i>	<i>KKAA</i>	<i>KAKA</i>	<i>KAAK</i>
30	16	18	18	16	16	20	18
<i>AAAA</i>	<i>AAAK</i>	<i>AAKA</i>	<i>AKAA</i>	<i>KAAA</i>	<i>AAKK</i>	<i>AKAK</i>	<i>AKKA</i>

Tab. 4: Erwartungswerte der einzelnen viergliedrigen Muster

Auch die oben schon angegebene Wahrscheinlichkeit $P(KAKA \text{ vor } AKAA) = \frac{9}{14}$ kann durch ein 8×8 -System für die einzelnen bedingten Wahrscheinlichkeiten ($P_{AAA}, P_{AAK}, P_{AKA}, P_{KAA}, P_{AKK}, P_{KAK}, P_{KKA}, P_{KKK}$) berechnet werden (P_{AAA} bezeichne die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „*KAKA* vor *AKAA*“ unter der Bedingung, daß die ersten drei Würfe das Ergebnis *AAA* hatten; die anderen Werte analog.) Durch die Lösung des Gleichungssystems (die Lösungen sind links in Klammer angegeben)

$$\begin{aligned} \left(P_{AAA} = \frac{4}{7}\right) \quad P_{AAA} &= \frac{1}{2}P_{AAA} + \frac{1}{2}P_{AAK} \\ \left(P_{AAK} = \frac{4}{7}\right) \quad P_{AAK} &= \frac{1}{2}P_{AKA} + \frac{1}{2}P_{AKK} \\ \left(P_{AKA} = \frac{3}{7}\right) \quad P_{AKA} &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}P_{KAK} \\ \left(P_{KAA} = \frac{4}{7}\right) \quad P_{KAA} &= \frac{1}{2}P_{AAA} + \frac{1}{2}P_{AAK} \\ \left(P_{AKK} = \frac{5}{7}\right) \quad P_{AKK} &= \frac{1}{2}P_{KKA} + \frac{1}{2}P_{KKK} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(P_{KAK} = \frac{6}{7} \right) & P_{KAK} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} P_{AKK} \\ \left(P_{KKA} = \frac{5}{7} \right) & P_{KKA} = \frac{1}{2} P_{KAA} + \frac{1}{2} P_{KAK} \\ \left(P_{KKK} = \frac{5}{7} \right) & P_{KKK} = \frac{1}{2} P_{KKA} + \frac{1}{2} P_{KKK} \end{aligned}$$

ergibt sich für den Wert der gesuchten Wahrscheinlichkeit $P = P(KAKA \text{ vor } AKAA) = \frac{1}{8} \left(\frac{4}{7} + \frac{4}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7} + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} \right) = \frac{9}{14}$.

Salopp formuliert: Das Muster $AKAA$ kommt zwar „meistens“ (mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{14}$) erst später als $KAKA$, aber *wenn* $AKAA$ früher kommt, so kommt es offenbar meist *deutlich früher*, so daß „im Mittel“ die für $AKAA$ nötige Wurfzahl trotzdem kleiner ist (Erwartungswert, „Empfindlichkeit des arithmetischen Mittels gegenüber Ausreißern“).

„Interpretationen“ bei $KAKA - AKAA$:

Zwei Personen vereinbaren, jeweils eines der beiden Muster $KAKA$ bzw. $AKAA$ zu wählen. Eine Münze wird wiederholt geworfen; nun kann man sich (mindestens) drei verschiedene Spielregeln vorstellen, die mit unserem Paradoxon zusammenhängen:

- (1) Gewonnen hat derjenige, dessen Muster zuerst als *Wort* (Ergebnis von 4 aufeinanderfolgenden Würfeln) kommt; dann ist es klüger, sich für $KAKA$ zu entscheiden.
- (2) Es wird vereinbart, viele (z.B. 100) Serien zu werfen. Jede Serie dauert solange, bis beide Muster erschienen sind (also: nach dem Erscheinen des zweiten Musters erfolgt ein Abbruch und Start einer neuen Serie). Jeder Spieler notiert bei jeder Serie die Anzahl von Würfeln, bis sein Muster erschienen ist und bekommt dadurch viele (z.B. 100) Werte. Sieger ist nun derjenige, dessen Durchschnittswert (arithmetisches Mittel) kleiner ist. Bei diesem Spiel ist der Spieler mit $AKAA$ bevorzugt!
- (3) Es wird vereinbart, daß „die für das Spiel entscheidenden 4-gliedrigen Muster“ nur jene der Blöcke 1-4, 5-8, 9-12, etc. sind (im Gegensatz zu den obigen beiden Spielregeln, bei denen alle möglichen 4-er Blöcke einer Serie zählen, also auch z.B. die Blöcke 2-5, 3-6, 4-7, etc.) M.a.W.: Nach jedem abgeschlossenen Viererblock gilt die Devise: Neues Spiel, neues Glück; „Überschnidungen“ zwischen den „gültigen“ Viererblöcken werden nicht beachtet. [Man könnte auch sagen: es werden immer nur Serien der Länge 4 geworfen, dann jeweils Neustart] Sieger ist derjenige, dessen Muster früher in einem „gültigen Viererblock“ erscheint. Dann sind die Muster der einzelnen Viererblöcke (1-4, 5-8, 9-12, etc.) wohl voneinander unabhängig (einzelne unabhängige Serien der Länge 4) und beide Muster sind für dieses Spiel gleichgut!

Die Tab. 5 und 6 (siehe Beitragsende) geben einen Überblick über Erwartungswerte und Siegeswahrscheinlichkeiten bei viergliedrigen Mustern (siehe die Legende zu Tab. 1).

Bemerkungen:

(a) Es gibt bei 4-gliedrigen Mustern (wie bei 3-gliedrigen) sowohl eine Fülle von Paarungen mit zwar gleichen Erwartungswerten, aber unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten bzgl. „kommt früher als“ (in den Tab. 5 und 6 durch typewriter gekennzeichnet) als auch viele Paarungen mit zwar diesbezüglichen gleichen Wahrscheinlichkeiten aber unterschiedlichen durchschnittlichen Wartezeiten (Erwartungswerten) - in den Tab. 5 und 6 kursiv gekennzeichnet.

(b) Erstmals bei 4-gliedrigen Mustern können aber die beiden Sichtweisen „kommt früher als“ bzw. „Erwartungswert“ das *echte Gegenteil voneinander* bringen, d.h. nicht nur „Gleichwahrscheinlichkeit“ gegen „Bevorzugung eines Musters“, sondern sogar *Bevorzugung des einen Musters gegen Bevorzugung des anderen Musters*. Wir haben schon erwähnt:

$$P(KAKA \text{ vor } AKAA) = \frac{9}{14} > \frac{1}{2}, \quad \text{aber } E(KAKA) = 20 > 18 = E(AKAA).$$

Weitere Beispiele dieser Art:

$$P(KAKK \text{ vor } AKKK) = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}, \quad \text{aber } E(KAKK) = 18 > 16 = E(AKKK).$$

$$P(KAKK \text{ vor } KKAA) = \frac{4}{7} > \frac{1}{2}, \quad \text{aber } E(KAKK) = 18 > 16 = E(KKAA).$$

$$P(KAAK \text{ vor } AAKK) = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}, \quad \text{aber } E(KAAK) = 18 > 16 = E(AAKK).$$

(c) Würden Julia und Julian mit 4-gliedrigen Mustern spielen, so betrüge Julians Gewinnwahrscheinlichkeit jedenfalls (mindestens) $\frac{9}{14}$, ein Wert, der sogar etwas kleiner als der entsprechende Wert $\frac{2}{3}$ bei 3-gliedrigen Mustern ist. D.h. mit wachsendem n muß bei diesem Spiel die Unfairneß nicht notwendig noch größer werden.

(d) Ein Beispiel einer zyklischen Kette (nichttransitive Relation *besser* beim Spiel „kommt früher als“): $KKAK \stackrel{5/7}{>} KAKA \stackrel{9/14}{>} AKAA \stackrel{4/7}{>} AAKK \stackrel{9/14}{>} KKAK$.

(e) Die Muster mit der höchsten Zeilensumme (und daher größte „durchschnittliche Gewinnchance“ bei geheimer und gleichverteilter Wahl des Gegners) sind $AKKK$ bzw. $KAAA$ mit einer durchschnittlichen Gewinnchance von ca. 0.557. $KKAA, AAKK: \approx 0.546; KKKA, AAAK: \approx 0.538$. Hier sind also doch Muster mit niedrigen Erwartungswerten besser.

6 Erwartungswerte bei n -gliedrigen Mustern

Trivialerweise haben je zwei Muster, die $K - A$ -symmetrisch sind, dieselbe durchschnittliche Wartezeit (denselben Erwartungswert), z.B. $KAKKAA$ und $AAKKA$ (jeweils 64). Es gilt außerdem (zwar nicht trivialerweise, aber doch): Je zwei Muster, von denen jedes das „rückwärts“ gelesene des jeweils anderen ist, haben gleiche durchschnittliche Wartezeit (Erwartungswert); dies folgt auch z.B. aus Li 1980.

Allgemein gilt bei n -gliedrigen Mustern: Der Erwartungswert (durchschnittliche Wartezeit) für die Serie $\underbrace{K \dots K}_{(n-1)\text{-mal}} A$ ist *minimal* unter allen n -gliedrigen Mustern, er beträgt 2^n . Die „reinen Serien“ (n -mal K oder n -mal A) haben die längsten durchschnittlichen Wartezeiten, sie betragen $2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1)$:

$$E(\underbrace{K \dots K}_{(n-1)\text{-mal}} A) = 2^n$$

$$E(\underbrace{K \dots K}_{(n-1)\text{-mal}} K) = 2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1)$$

[Die *Maximalität* bleibt hier unbewiesen. Sie folgt z.B. - wie die vorher erwähnte *Minimalität* - aus der Arbeit von Li 1980.] Obwohl die beiden **Wahrscheinlichkeiten**, daß das eine Muster bzw. das andere zuerst kommt, **gleich groß** sind (nach $(n-1)$ -mal K fällt mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein weiteres K oder A), muß man somit im Durchschnitt **fast doppelt so lange** auf eine reine K -Serie der Länge n warten wie auf eine K -Serie der Länge $n-1$ und darauffolgendes A .

Man könnte vermuten, daß dieses Phänomen - eventuell unbewußt - eine Ursache dafür ist, daß viele Leute nach einer relativ langen „Rot-Serie beim Roulette“ intuitiv viel eher „Schwarz“ erwarten als erneut „Rot“ (oder A nach einer K -Serie).

Lemma: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^1} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots = 4.$

Beweis: Aus der bekannten Beziehung $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ für $|x| < 1$ ergibt sich für $x = \frac{1}{2}$ unmittelbar: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^1} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4.$

Vollständige Induktion: $E(\underbrace{K \dots K}_n) = 2^{n+1} - 2$

Für $n = 1, 2, 3$ haben wir die entsprechenden Werte 2, 6, 14 schon bestätigt. Unter der Annahme der Gültigkeit von $E(\underbrace{K \dots K}_{(n-1)\text{-mal}}) = 2^n - 2$ haben wir $E(\underbrace{K \dots K}_n) = 2^{n+1} - 2$ zu zeigen.

Wir betrachten das „Geschehen“ nach dem ersten Block $\underbrace{K \dots K}_{(n-1)\text{-mal}}$. Der Erwartungswert für diesen ersten Block beträgt $2^n - 2$, wie wir aus der Induktionsvoraussetzung wissen.

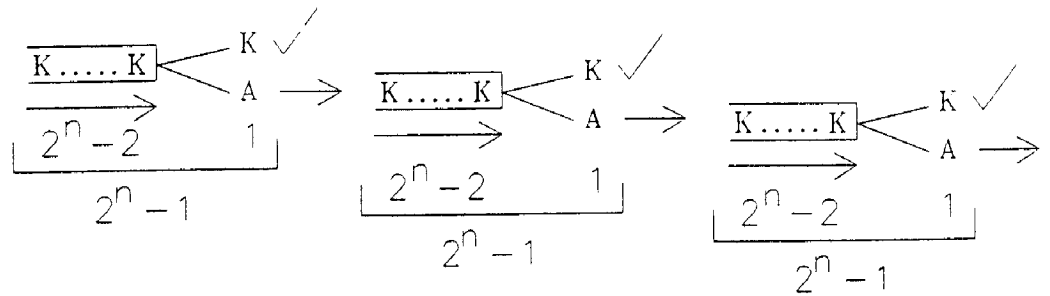


Fig. 1: $E(K \dots K)$: Möglichkeiten nach den einzelnen K -Blöcken [($n-1$)-mal hintereinander K]

Die Münze kann nun beim nächsten Wurf K zeigen ($E = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1, p = \frac{1}{2}$) oder A . Im zweiten Fall ist erneut auf den nächsten K -Block [($n-1$)-mal hintereinander K] zu warten und wieder entscheidet der darauf folgende Wurf: er kann K sein ($E = (2^n - 1) + (2^n - 1) = 2(2^n - 1), p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$) oder wieder A usw. Wir erhalten insgesamt (siehe Fig. 1)

$$\begin{aligned}
 E(\underbrace{K \dots K}_n) &= (2^n - 1) \cdot \frac{1}{2} + 2(2^n - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3(2^n - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \dots \\
 &= (2^n - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2^1} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots\right) = 2^{n+1} - 2.
 \end{aligned}$$

= 4 (siehe Lemma)

Beweis von $E(\underbrace{K \dots K}_n A) = 2^n$:

Wir wissen von oben und verwenden im folgenden, daß $E(\underbrace{K \dots K}_{(n-1)\text{-mal}}) = 2^n - 2$ ist. Ganz kurz und lapidar könnte so argumentiert werden: $\underbrace{K \dots K}_{(n-1)\text{-mal}} A$ bedeutet nichts anderes als Warten auf den ersten K -Block der Länge $n-1$ (der Erwartungswert dafür beträgt $2^n - 2$) und anschließendes

Warten auf das nächste A (dieser Erwartungswert beträgt 2), woraus sich der behauptete Erwartungswert $E(\underbrace{K \dots K}_n A) = 2^n$ unmittelbar ergibt!

(n-1)-mal

Eine etwas kompliziertere Begründungsweise: Das Muster $\underbrace{K \dots K}_n A$ kann nur nach dem ersten K-Block der Länge n-1 auftreten, entweder *unmittelbar* nach diesem (wenn danach ein A fällt), erst nach einem weiteren K (wenn nach dem ersten K-Block der Länge n-1 wieder K fällt) oder erst nach einem abermals weiteren K usw. (siehe Fig. 2).

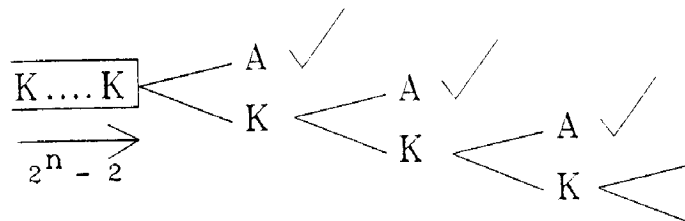


Fig. 2: $E(K \dots K A)$: Möglichkeiten nach dem ersten K-Block der Länge n-1

Da $2^n - 2$ die durchschnittliche Wartezeit auf den ersten K-Block der Länge n-1 ist und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ der darauffolgende Münzwurf A bringt, erhalten wir für diesen (bedingten) Erwartungswert $2^n - 2 + 1 = 2^n - 1$ mit zugehöriger Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Wenn der auf den ersten K-Block (der Länge n-1) folgende Wurf erneut K bringt, so kann die Münze schon beim wiederum nächsten Wurf A zeigen (und somit das gewünschte Muster $\underbrace{K \dots K}_n A$ liefern: der zugehörige bedingte Erwartungswert beträgt $E = 2^n - 2 + 1 + 1 = 2^n$, $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$)

(n-1)-mal
usw. Wir erhalten hier insgesamt:

$$E(\underbrace{K \dots K}_n A) = (2^n - 1) \cdot \frac{1}{2} + 2^n \cdot \frac{1}{4} + (2^n + 1) \cdot \frac{1}{8} + (2^n + 2) \cdot \frac{1}{16} + \dots =$$

$$= 2^n \left(\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots}_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{3}{32} + \dots \right) = 2^n - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \underbrace{\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2^1} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots \right)}_{=4 \text{ (siehe Lemma)}} = 2^n$$

Bemerkung: Es gibt außer der hier dargestellten Methode noch einige andere zur Berechnung von mittleren Wartezeiten (Erwartungswerten) und Siegeswahrscheinlichkeiten („Muster X kommt früher als Muster Y“). Drei davon seien mit einem Literaturverweis erwähnt: (1) mit Hilfe unendlicher Reihen – siehe z.B. HUMENBERGER 1998b; (2) mit Hilfe von Graphen und den „Mittelwertsregeln“ – siehe ENGEL 1976, S.18ff (insbesondere S. 22-26); (3) mit Hilfe des sogenannten CONWAY-Algorithmus – beschrieben z.B. in GARDNER (1974, S.123) oder SZEKELY (1990, S.62); dieser ist sehr leicht durchzuführen, aber relativ schwierig einzusehen bzw. zu begründen (z.B. LI 1980).

Literatur

1. BENTZ, H.J. (1983a): Hat die Münze doch ein Gedächtnis? In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 8-10.
2. BENTZ, H.J. (1983b): Willkürliche und unwillkürliche implizite Lotterien. In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 41-46.
3. BENTZ, H.J. (1983c): Fehlerhafte Modellbildungen. In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 70-76.
4. BENTZ, H.J. (1983d): Häufigkeiten, relativ und absolut. In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 77-82.
5. BENTZ, H.J. (1985): Über den didaktischen Wert stochastischer Paradoxa. In: *Didaktik-Reihe der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* 13, 3-18.
6. BOROVČNIK, M. (1992): Stochastik im Wechselspiel zwischen Intuitionen und Mathematik. Bibliographisches Institut, Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich.
7. BUTH, M. (1991): Die Behinderung des gesunden Menschenverstandes durch Stochastik. In: *Stochastik in der Schule* 11, 3, 12-22.

8. BUTH, M. (1996): Schwierigkeiten im Umgang mit dem Zufall. In: *mathematica didactica* 19, 2, 3-17.
9. BÜHLER, W.J. (1992): Wahrheit und Lüge in der Statistik - häufige Fehlerquellen in der Statistik. In: *Der Mathematikunterricht* 38, 4, 34-45.
10. CHEN, R. u. A. ZAME (1977): A Remark on Fair Coin-Tossing Process. In: *Bull. Inst. Math. Statist.* 6, 278.
11. CHRISTENSEN, R. u. J. UTTS (1992): Bayesian Resolution of the „Exchange Paradox“. In: *The American Statistician* 46, 4, 274-276.
12. DÖRFLER, W. u. R. FISCHER (Hrsg., 1981): *Stochastik im Schulunterricht*. Teubner und Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart und Wien.
13. ENGEL, A. (1973, 1976): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik* (zwei Bände). Klett, Stuttgart.
14. FALK, R. (1983a): Vereinfachte Darstellungen einiger Verteilungen und ihrer Erwartungswerte. In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 62-69.
15. FALK, R. (1983b): Haben Männer mehr Schwestern als Frauen? In: *Stochastik in der Schule* 3, 1, 21-23.
16. FALLETTA, N. (1989): *Paradoxon*. Fischer Taschenbuch, Frankfurt.
17. FELLER, W. (1968): *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. John Wiley, New York.
18. GARDNER, M. (1970): The Paradox of the Nontransitive Dice. In: *Scientific American*, 223 (1970), 110-111.
19. GARDNER, M. (1974): On the Paradoxical Situations That Arise From Nontransitive Relations. In: *Scientific American*, 231 (Oktober 1974), 120-125.
20. GARDNER, M. (1982): *Gotcha. Paradoxes to Puzzle And Delight*. Freeman and Company, New York.
21. GARDNER, M. (1983): *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements*. Freeman and Company, New York.
22. GRAY, M.W. (1983): Statistics and the Law. In: *Mathematics Magazine* 56, 2, 67-81.
23. GREEN, D. u. M. ROUNCFIELD (1990): Condorcet's Paradoxon. In: *Stochastik in der Schule* 10, 1, 20-25.
24. VON HARTEN, G. u. H. STEINBRING (1984): *Stochastik in der Sekundarstufe I. IDM-Reihe: Untersuchungen zum Mathematikunterricht*, Band 8, herausgegeben vom Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld. Aulis, Köln.
25. HENZE, N. (1995): Einige Fallstricke im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten. In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 48, 5, 275-281.
26. HENZE, N. (1997): *Stochastik für Einsteiger*. Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden.
27. HUMENBERGER, H. u. H.-C. REICHEL (1995): *Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*. Bibliographisches Institut, Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich.
28. HUMENBERGER, H. (1996): Das BENFORD-Gesetz über die Verteilung der ersten Ziffer von Zahlen. In: *Stochastik in der Schule* 16, 3, 2-17.
29. HUMENBERGER, H. (1997): Eine Ergänzung zum BENFORD-Gesetz — weitere mögliche schulrelevante Aspekte. In: *Stochastik in der Schule* 17, 3, 42-48.
30. HUMENBERGER, H. (1998a): „Bedingte Erwartungswerte“ — ein möglicher Zugang und einige Beispiele. Preprint Universität für Bodenkultur, Wien.
31. HUMENBERGER, H. (1998b): Kopf-Adler-Muster in Münzwurfserien („binären Sequenzen“) — wie kommen hier FIBONACCI-Folgen ins Spiel? Preprint Universität für Bodenkultur, Wien.
32. HUMENBERGER, H. (1998c): Der Erwartungswert der Augensumme beim „Würfeln mit Streichresultaten“. Preprint Universität für Bodenkultur, Wien.
33. INEICHEN, R. (1983): Zufällig oder nicht-zufällig? In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 24-40.
34. JAHNKE, T. (1993): Das Simpsonsche Paradoxon verstehen - ein Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 14, 3/4, 221-242.

35. KILIAN, H. (1987): Bedingte Erwartungswerte im Stochastikunterricht. In: *Stochastik in der Schule* 7, 3, 24-45.
36. KIRSCH, A u. W. BLUM (1994): Bemerkungen zu einer bekannten „probabilistischen Paradoxie“. In: PICKERT, G. u. I. WEIDIG (Hrsg., 1994): *Mathematik erfahren und lehren. Festschrift für Hans-Joachim VOLLRATH*. Klett, Stuttgart, 125-133.
37. KRÄMER, W. (1995): *Denkste! Trugschlüsse aus der Welt des Zufalls und der Zahlen*. Campus, Frankfurt-New York.
38. KÜNZEL, E. (1991): Über Simpsons Paradoxon. In: *Stochastik in der Schule* 11, 1, 54-62.
39. KÜTTING, H. (1994): *Didaktik der Stochastik*. Bibliographisches Institut, Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich.
40. LI, S.-Y. R. (1980): A Martingale Approach to the Study of Occurrence of Sequence Patterns in Repeated Experiments. In: *The Annals of Probability* 8, 6, 1171-1176.
41. MCCOLL, J.H. (1995): *Probability*. Modular Mathematics Series. Edward Arnold, London.
42. MEYER, J. (1995): Einfache Paradoxien in der beschreibenden Statistik. In: *Stochastik in der Schule* 15, 2, 27-50.
43. PALM, G. (1983): Wo kommen die Wahrscheinlichkeiten eigentlich her? In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 50-61.
44. PENNEY, W. (1969): Problem: Penney-ante. In: *Journal of Recreational Mathematics* 2, 241.
45. PFEIFER, D. (1992): Kettenbriefe – was sie versprechen, was sie halten. In: *Stochastik in der Schule* 12, 3, 37-47.
46. PFLUG, G. (1981): Paradoxien in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Aus: DÖRFLER, W. u. R. FISCHER (Hrsg., 1981), 155-163.
47. REICHEL, H.-C., G. HANISCH u. R. MÜLLER (²1989, ³1992): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Mathematik für Schule und Praxis* (Hrsg.: H.-C. REICHEL), Band 1. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.
48. RIEMER, W. (1989): Das Arcsin-Gesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: *Der Mathematikunterricht* 35, 4, 64-75.
49. SCHMIDT, G. (1990): Schwächen im gegenwärtigen Stochastikunterricht und Ansätze zu ihrer Behebung. In: *Der Mathematikunterricht* 36, 6, 20-28.
50. SCHOLZ, R. (1981): *Stochastische Problemaufgaben – Analysen aus didaktischer und psychologischer Perspektive*. IDM-Reihe: Materialien und Studien, Band 23, Universität Bielefeld.
51. SCHRAGE, G. (1971): Ein Paradoxon in der Wahrscheinlichkeitsrechnung? In: *Praxis der Mathematik* 13, 309-312.
52. SCHRAGE, G. (1984): Stochastische Trugschlüsse. In: *mathematica didactica* 7, 3, 3-19.
53. SIGMUND, K. (1995): *Spielpläne. Zufall, Chaos und die Strategien der Evolution*. Hoffmann und Campe, Hamburg.
54. STADLER, H. (1986): Paradoxien der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Teil 1: *Didaktik der Mathematik* 14, 2, 134-152. Teil 2: *Didaktik der Mathematik* 14, 3, 167-182.
55. SZEKELY, G.J. (1990): *Paradoxa — klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik*. Harri Deutsch, Frankfurt.
56. TENNEY, R.L. u. C.C. FOSTER (1976): Non-Transitive Dominance. In: *Mathematics Magazine* 49, 3, 115-120.
57. WALTER, H. (1983): Heuristische Strategien und Fehlvorstellungen in stochastischen Situationen. In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 11-23.
58. WINTER, H. (1992): Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 13, 1, 23-53.
59. WIRTHS, H. (1995): Der Erwartungswert. Unterrichtsskizzen zur Begriffsentwicklung von Klasse 8 bis 13. In: *Mathematik in der Schule* 33, 6, 330-343.

ts
Anschritt des Verfassers: Hans HUMENBERGER, Institut für Mathematik und Angewandte Statistik, Universität für Bodenkultur, Gregor Mendel-Straße 33, A - 1180 Wien, E-mail: hans@mail.boku.ac.at

	KKKK 30	KKKA 16	KKAK 18	KAKK 18	AKKK 16	KKAA 16	KAKA 20	KA AK 18
KKKK (30)	—	1/2	2/5	3/10	1/16	2/5	5/12	4/11
KKKA (16)	1/2	—	2/3	1/2	1/8	2/3	5/8	4/7
KKAK (18)	3/5	1/3	—	3/5	5/12	1/2	5/7	1/2
KAKK (18)	7/10	1/2	2/5	—	7/12	4/7	1/2	1/2
AKKK (16)	15/16	7/8	7/12	5/12	—	7/12	9/16	1/2
KKAA (16)	3/5	1/3	1/2	3/7	5/12	—	5/9	2/3
KAKA (20)	7/12	3/8	2/7	1/2	7/16	4/9	—	1/2
KA AK (18)	7/11	3/7	1/2	1/2	1/2	1/3	1/2	—
AKKA (18)	5/8	7/16	7/12	5/12	1/2	7/12	9/16	1/2
AKAK (20)	5/8	7/16	7/16	9/14	1/2	7/16	1/2	7/16
AAKK (16)	3/4	7/12	9/14	9/16	2/3	1/2	9/16	5/12
KAAA (16)	7/11	3/7	1/2	1/2	1/2	1/3	1/2	1/2
AKAA (18)	5/8	7/16	7/16	1/2	1/2	7/16	5/14	7/12
AAKA (18)	5/8	7/16	1/2	9/16	1/2	5/14	9/16	5/12
AAAK (16)	15/22	1/2	9/16	9/16	4/7	5/12	9/16	9/16
AAAA (30)	1/2	7/22	3/8	3/8	4/11	1/4	3/8	3/8

Tab. 5: Teil 1 – Viergliedrige Muster: Erwartungswerte; Gewinnwahrscheinlichkeiten des jeweiligen Zeilen-Musters bei „kommt früher als“ in einer Wurfserie mit einer LAPLACE-Münze

	AKKA 18	AKAK 20	AAKK 16	KAAA 16	AKAA 18	AAKA 18	AAAK 16	AAAA 30
KKKK (30)	3/8	3/8	1/4	4/11	3/8	3/8	7/22	1/2
KKKA (16)	9/16	9/16	5/12	4/7	9/16	9/16	1/2	15/22
KKAK (18)	5/12	9/16	5/14	1/2	9/16	1/2	7/16	5/8
KAKK (18)	7/12	5/14	7/16	1/2	1/2	7/16	7/16	5/8
AKKK (16)	1/2	1/2	1/3	1/2	1/2	1/2	3/7	7/11
KKAA (16)	5/12	9/16	1/2	2/3	9/16	9/14	7/12	3/4
KAKA (20)	7/16	1/2	7/16	1/2	9/14	7/16	7/16	5/8
KAAK (18)	1/2	9/16	7/12	1/2	5/12	7/12	7/16	5/8
AKKA (18)	—	1/2	1/3	1/2	1/2	1/2	3/7	7/11
AKAK (20)	1/2	—	4/9	7/16	1/2	2/7	3/8	7/12
AAKK (16)	2/3	5/9	—	5/12	3/7	1/2	1/3	3/5
KAAA (16)	1/2	9/16	7/12	—	5/12	7/12	7/8	15/16
AKAA (18)	1/2	1/2	4/7	7/12	—	2/5	1/2	7/10
AAKA (18)	1/2	5/7	1/2	5/12	3/5	—	1/3	3/5
AAAK (16)	4/7	5/8	2/3	1/8	1/2	2/3	—	1/2
AAAA (30)	4/11	5/12	2/5	1/16	3/10	2/5	1/2	—

Tab. 6: Teil 2 - Viergliedrige Muster: Erwartungswerte; Gewinnwahrscheinlichkeiten des jeweiligen Zeilen-Musters bei „kommt früher als“ in einer Wurfserie mit einer LAPLACE-Münze

Konstruktion von Aufgabenstellungen zur analytischen Geometrie mit „schönen“ numerischen Werten

Maria Koth, Universität Wien

1. Gitterpunkte auf Kreisen und Kugeln

1.1 Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt eines Dreiecks

Als erstes einfaches Beispiel für die Konstruktion von Aufgabenstellungen mit ganzzahligen numerischen Werten soll die folgende Frage betrachtet werden: Wie kann man die Eckpunktskoordinaten eines Dreiecks in \mathbb{R}^2 ganzzahlig wählen, so dass auch die Koordinaten des Höhenschnittpunktes und des Umkreismittelpunktes ganzzahlig sind?

Eine einfache Möglichkeit, solche Dreiecke zu finden, besteht darin, als Dreieckseckpunkte ganzzahlige Gitterpunkte auf einem Kreis in Mittelpunktslage zu wählen und anschließend eine Translation anzuwenden.

Da, zum Beispiel, $65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$ ist, liegen auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 65$ insgesamt 16 Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, nämlich alle Punkte mit den Koordinaten $(\pm 8/\pm 1)$, $(\pm 7/\pm 4)$, $(\pm 4/\pm 7)$.

Es gibt vielfältige Möglichkeiten, drei dieser Punkte als Dreieckseckpunkte auszuwählen. (Je nach Wahl der Punkte kann man spitzwinkelige, stumpfwinkelige oder rechtwinkelige Dreiecke erzeugen.) Alle diese Dreiecke haben den ganzzahligen Umkreismittelpunkt $U(0/0)$, und auch die Höhenschnittpunkte dieser Dreiecke haben ganzzahlige Koordinaten:

Bekanntlich liegen in jedem Dreieck der Umkreismittelpunkt U , der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H auf einer Geraden (= eulersche Gerade), wobei S die Strecke UH im Verhältnis 1:2 teilt. Daraus folgt, dass

$$S = U + 1/3 \cdot \overrightarrow{UH} \Leftrightarrow 3 \cdot S = 3 \cdot U + (H - U) \Leftrightarrow 3 \cdot S = H + 2 \cdot U.$$

Da $S = 1/3 \cdot (A + B + C)$ ist, kann man die Gleichung $H + 2 \cdot U = 3 \cdot S$ auch in der Form $H + 2 \cdot U = A + B + C$ anschreiben.

In jedem Dreieck gilt also: $H + 2 \cdot U = 3 \cdot S = A + B + C$

Diese Beziehung ermöglicht es, bei bekanntem U die Koordinaten von H einfach zu berechnen und zeigt außerdem, dass in einem Dreieck mit ganzzahligen A, B, C und U stets auch H ganzzahlige Koordinaten hat.

Beispiel:

Wählt man nun, zum Beispiel, $A(-8/-1)$, $B(7/-4)$ und $C(4/7)$ auf dem Kreis $x^2+y^2 = 65$, so hat dieses Dreieck den Umkreismittelpunkt $U(0/0)$ und den Höhenschnittpunkt $H = A + B + C = (3/2)$.

Durch Verschieben um einen Translationsvektor \vec{t} mit ganzzahligen Koordinaten erhält man ein Dreieck $A_1B_1C_1$ mit ganzzahligem Umkreismittelpunkt U_1 und ganzzahligem Höhenschnittpunkt H_1 , wobei aber U_1 nicht mehr der Nullpunkt ist.

Sei, zum Beispiel, $\vec{t} = (5/1)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= A + \vec{t} = (-8/-1) + (5/1) = (-3/0) \\ B_1 &= B + \vec{t} = (7/-4) + (5/1) = (12/-3) \\ C_1 &= C + \vec{t} = (4/7) + (5/1) = (9/8) \\ U_1 &= U + \vec{t} = (0/0) + (5/1) = (5/1) \\ H_1 &= H + \vec{t} = (3/2) + (5/1) = (8/3) \end{aligned}$$

1.2 Kreis- und Kugelaufgaben

Ganzzahlige Gitterpunkte auf Kreisen in Mittelpunktlage ermöglichen es nicht nur, Dreiecke mit ganzzahligem Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt zu finden, sondern sind beim Erstellen vieler Aufgabenstellungen aus dem Bereich der analytischen Geometrie des Kreises von Nutzen.

Beispiel:

Es sollen „schöne“ numerische Werte für A , B , g und h der folgenden Aufgabenstellung gefunden werden:

„Ein Kreis durch die Punkte A und B hat seinen Mittelpunkt auf der Geraden g . Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden h sind zu ermitteln.“

Wiederum kann man von einem Kreis in Mittelpunktlage ausgehen, und die hier gewählten numerischen Werte durch Anwenden einer Translation modifizieren.

Auf dem Kreis $x^2+y^2 = 85$ liegen 16 ganzzahlige Punkte. Man wählt nun zwei Punkte A und B auf diesem Kreis, zum Beispiel $A(-2/9)$ und $B(9/2)$, und eine beliebige Gerade g durch den Kreismittelpunkt $(0/0)$, zum Beispiel $g: 3x+2y=0$.

Die Gerade h soll ganzzahlige Schnittpunkte C und D mit dem Kreis haben. Wählt man, zum Beispiel, $C(-9/-2)$ und $D(6/-7)$, so errechnet man $h: x+3y = -15$.

Nun wendet man eine Translation, zum Beispiel mit dem Schiebungsvektor $\vec{t} = (4/3)$, an. Man erhält:

$$A \mapsto A + \vec{t} = (2/12)$$

$$B \mapsto B + \vec{t} = (13/5)$$

$$M \mapsto M + \vec{t} = (4/3)$$

Durch eine Translation wird jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet. Die Gerade $g: 3x + 2y = 0$ geht daher durch die Translation in eine Gerade der Form $3x + 2y = c$ über. Da die verschobene Gerade durch den neuen Kreismittelpunkt $(4/3)$ verlaufen soll, erhält man als Bildgerade $3x + 2y = 18$. Analog dazu geht die Gerade $h: x + 3y = -15$ in die parallele Gerade $x + 3y = -2$ durch den Bildpunkt $C_1 = C + \vec{t} = (-5/1)$ über.

Die anfangs betrachtete Aufgabenstellung könnte nun folgendermaßen formuliert werden: Ein Kreis durch die Punkte $A(2/12)$ und $B(13/5)$ hat seinen Mittelpunkt auf der Geraden $g: 3x + 2y = 18$. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden $h: x + 3y = -2$ sind zu ermitteln.

Beispiele für Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ mit mehreren ganzzahligen Gitterpunkten sind:

r	Gitterpunkte
5	$(\pm 3/\pm 4), (\pm 4/\pm 3), (\pm 5/0), (0/\pm 5)$
$\sqrt{50}$	$(\pm 7/\pm 1), (\pm 1/\pm 7), (\pm 5/\pm 5)$
$\sqrt{65}$	$(\pm 7/\pm 4), (\pm 4/\pm 7), (\pm 8/\pm 1), (\pm 1/\pm 8)$
$\sqrt{85}$	$(\pm 7/\pm 6), (\pm 6/\pm 7), (\pm 9/\pm 2), (\pm 2/\pm 9)$
10	$(\pm 6/\pm 8), (\pm 8/\pm 6), (\pm 10/0), (0/\pm 10)$
$\sqrt{125}$	$(\pm 11/\pm 2), (\pm 2/\pm 11), (\pm 10/\pm 5), (\pm 5/\pm 10)$
$\sqrt{145}$	$(\pm 9/\pm 8), (\pm 8/\pm 9), (\pm 12/\pm 1), (\pm 1/\pm 12)$

Analog dazu kann man, ausgehend von ganzzahligen Gitterpunkten auf Kugeln in Mittelpunktslage Aufgabenstellungen zur analytischen Geometrie der Kugel mit schönen numerischen Werten erstellen.

Beispiele für Kugeln $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ mit mehreren ganzzahligen Gitterpunkten sind:

r	Zerlegung $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$
3	$3^2 = 0^2 + 0^2 + 3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$
$\sqrt{17}$	$17 = 4^2 + 1^2 + 0^2 = 3^2 + 2^2 + 2^2$
$\sqrt{18}$	$18 = 3^2 + 3^2 + 0^2 = 4^2 + 1^2 + 1^2$
5	$5^2 = 0^2 + 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2 + 0^2$
$\sqrt{27}$	$27 = 5^2 + 1^2 + 1^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2$
6	$6^2 = 0^2 + 0^2 + 6^2 = 4^2 + 4^2 + 2^2$
$\sqrt{38}$	$38 = 6^2 + 1^2 + 1^2 = 5^2 + 3^2 + 2^2$
7	$7^2 = 0^2 + 0^2 + 7^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2$
$\sqrt{57}$	$57 = 5^2 + 4^2 + 4^2 = 7^2 + 2^2 + 2^2$
9	$9^2 = 0^2 + 0^2 + 9^2 = 8^2 + 4^2 + 1^2 = 6^2 + 6^2 + 3^2 = 7^2 + 4^2 + 4^2$
$\sqrt{86}$	$86 = 5^2 + 5^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 9^2 = 1^2 + 6^2 + 7^2$
$\sqrt{90}$	$90 = 9^2 + 3^2 + 0^2 = 8^2 + 1^2 + 5^2 = 7^2 + 4^2 + 5^2$
$\sqrt{98}$	$98 = 7^2 + 7^2 + 0^2 = 9^2 + 4^2 + 1^2 = 8^2 + 5^2 + 3^2$
11	$11^2 = 0^2 + 0^2 + 11^2 = 7^2 + 6^2 + 6^2 = 9^2 + 2^2 + 6^2$
13	$13^2 = 0^2 + 0^2 + 13^2 = 0^2 + 5^2 + 12^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2$
15	$15^2 = 0^2 + 0^2 + 15^2 = 14^2 + 2^2 + 5^2 = 10^2 + 2^2 + 11^2 = 10^2 + 10^2 + 5^2 = 12^2 + 9^2 + 0^2$

$$\begin{array}{l|l}
 17 & 17^2 = 0^2 + 0^2 + 17^2 = 0^2 + 8^2 + 15^2 = 1^2 + 12^2 + 12^2 = 9^2 + 8^2 + 12^2 \\
 19 & 19^2 = 0^2 + 0^2 + 19^2 = 1^2 + 6^2 + 18^2 = 17^2 + 6^2 + 6^2 = 15^2 + 6^2 + 10^2 \\
 21 & 21^2 = 0^2 + 0^2 + 21^2 = 5^2 + 4^2 + 20^2 = 11^2 + 8^2 + 16^2 = 13^2 + 4^2 + 16^2 = 19^2 + 4^2 + 8^2 = \\
 & = 14^2 + 14^2 + 7^2 = 9^2 + 6^2 + 18^2 \\
 23 & 23^2 = 0^2 + 0^2 + 23^2 = 3^2 + 6^2 + 22^2 = 3^2 + 14^2 + 18^2 = 6^2 + 13^2 + 18^2 \\
 25 & 25^2 = 0^2 + 0^2 + 25^2 = 24^2 + 7^2 + 0^2 = 20^2 + 15^2 + 0^2 = 9^2 + 12^2 + 20^2 = 12^2 + 15^2 + 16^2 \\
 27 & 27^2 = 0^2 + 0^2 + 27^2 = 7^2 + 2^2 + 26^2 = 23^2 + 2^2 + 14^2 = 25^2 + 2^2 + 10^2 = 10^2 + 10^2 + 23^2 \\
 & = 18^2 + 18^2 + 9^2 = 3^2 + 12^2 + 24^2 = 21^2 + 12^2 + 12^2
 \end{array}$$

2. Heronische Dreiecke

Als nächstes sollen nun Dreiecke in \mathbb{R}^2 mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten und ganzzahligem Inkreismittelpunkt ermittelt werden. Das führt auf den Begriff des heronischen Dreiecks.

2.1 Eigenschaften heronischer Dreiecke

Bei Dreiecken mit ganzzahligen oder mit zumindest rationalen Eckpunktskoordinaten in \mathbb{R}^2 kann man die Höhen, die Seitensymmetralen und die Schwerlinien durch Gleichungen $ax + by = c$ mit ganzzahligen Koeffizienten a , b und c beschreiben. Die Lösung eines Systems zweier solcher Gleichungen ist stets ein rationales Zahlenpaar. Daraus folgt, dass für jedes Dreieck in \mathbb{R}^2 mit rationalen Eckpunktskoordinaten auch die Koordinaten des Höhenschnittpunkts, des Umkreismittelpunktes und des Schwerpunktes rationale Zahlen sind. Für den Inkreismittelpunkt und die Ankreismittelpunkte dagegen ist das nur bei sogenannten heronischen Dreiecken der Fall.

Den Inkreismittelpunkt I und die Ankreismittelpunkte I_1 , I_2 und I_3 eines Dreiecks mit den Eckpunkten A , B , C und den Seitenlängen a , b , c kann man relativ bequem mit Hilfe der folgenden Formeln bestimmen:

$$I = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a + b + c},$$

$$I_1 = \frac{-a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{-a + b + c}, I_2 = \frac{a \cdot A - b \cdot B + c \cdot C}{a - b + c}, I_3 = \frac{a \cdot A + b \cdot B - c \cdot C}{a + b - c}$$

Diese Formeln zeigen, dass die Punkte I , I_1 , I_2 und I_3 nur dann rationale Koordinaten haben, wenn nicht nur die Eckpunktskoordinaten, sondern auch die Seitenlängen des Dreiecks rational sind.

Unter einem **heronischen Dreieck** (auch **rationales Dreieck** genannt) versteht man ein Dreieck mit rationalen Seitenlängen und rationalem Flächeninhalt. In solchen Dreiecken sind zahlreiche weitere Bestimmungsstücke rationale Größen, zum Beispiel

- die sin-, cos- und tan-Werte der drei Dreieckswinkel,
- die drei Dreieckshöhen,
- die Abschnitte, in die die Dreiecksseiten durch die Höhenfußpunkte geteilt werden,
- die Abschnitte, in die die Höhen durch den Höhenschnittpunkt geteilt werden,
- die Seitenlängen des Höhenfußpunktdreiecks,
- die Normalabstände des Schwerpunktes von den Dreiecksseiten,
- die Normalabstände des Umkreismittelpunktes von den Dreiecksseiten,
- der Umkreisradius,
- der Inkreisradius,
- die drei Ankreisradien,
- die Abschnitte, in die die Dreiecksseiten durch die Winkelsymmetralen geteilt werden,
- die Abschnitte, in die die Seiten durch die Berührungspunkte des Inkreises zerfallen,
- die Abschnitte, in die die Seiten durch die Berührungspunkte der Ankreise zerfallen,
-

Nicht notwendigerweise rational sind dagegen:

- die Längen der Winkelsymmetralen,
- die Abschnitte, in die die Winkelsymmetralen durch den Inkreismittelpunkt geteilt werden,
- die Seitenlängen des Dreiecks $T_1T_2T_3$ mit den Berührungspunkten des Inkreises als Eckpunkten,
- die Seitenlängen des Dreiecks $I_1I_2I_3$ mit den Ankreismittelpunkten als Eckpunkten,
- die Längen der Schwerlinien (Man kann sogar zeigen, dass ein heronisches Dreieck höchstens eine rationale Schwerlinie haben kann),
-

Wird ein Dreieck in R^2 von den Seitenvektoren $\vec{a} = (a_1/a_2)$ und $\vec{b} = (b_1/b_2)$ erzeugt, so ist sein Flächeninhalt gegeben durch $A_\Delta = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$. Daraus folgt, dass jedes Dreieck in R^2 mit rationalen Eckpunktskoordinaten auch rationalen Flächeninhalt hat.

Aus den oben angeführten Eigenschaften heronischer Dreiecke folgt, dass in einem Dreieck in R^2 mit rationalen Eckpunktskoordinaten und rationalen Seitenlängen auch die folgenden Punkte rationale Koordinaten haben:

- Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt,
- Seitenmittelpunkte, Höhenfußpunkte,
- Spiegelpunkte des Höhenschnittpunktes an den drei Dreiecksseiten,
- Spiegelpunkte des Umkreismittelpunktes an den drei Dreiecksseiten,
- Inkreismittelpunkt, Berührungspunkte des Inkreises,
- Ankreismittelpunkte, Berührungspunkte der Ankreise,
- Mittelpunkt des Feuerbachkreises ($F = 0.5(U+H)$), Nagelpunkt ($N = 3.S - 2.I$),
-

Ist ABC ein heronisches Dreieck mit rationalen Eckpunktskoordinaten in R^2 , so sind auch das Höhenfußpunktdreieck und das Seitenmittendreieck von ABC sowie die Dreiecke ABH, BCH und ACH heronische Dreiecke mit rationalen Eckpunktskoordinaten.

2.2 Heronische Dreiecke in \mathbb{R}^2 mit ganzzahligen Eckpunkten

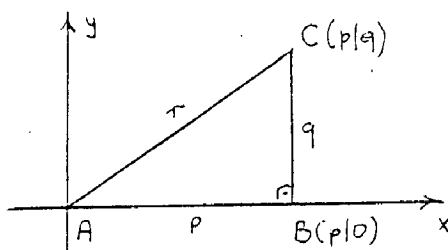
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, konkrete Zahlenbeispiele für heronische Dreiecke mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten in \mathbb{R}^2 zu ermitteln. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man ausgehend von pythagoreischen Zahlentripeln heronische Dreiecke erhalten kann. Da man die Lage der Dreiecke durch Translationen und Drehstreckungen verändern kann (siehe Abschnitt 3), genügt es, von einem Dreieck auszugehen, dessen Eckpunkt A der Nullpunkt ist und dessen Eckpunkt B auf der positiven x-Achse liegt.

Jedes pythagoreische Zahlentripel $(p/q/r)$ mit $p^2 + q^2 = r^2$ legt folgendermaßen ein rechtwinkeliges heronisches Dreieck fest:

$$A(0/0), B(p/0), C(p/q)$$

Für diese Dreieck errechnet man:

$$H(p/0), U\left(\frac{p}{2} \mid \frac{q}{2}\right), I\left(\frac{p(p+r)}{p+q+r} \mid \frac{pq}{p+q+r}\right)$$



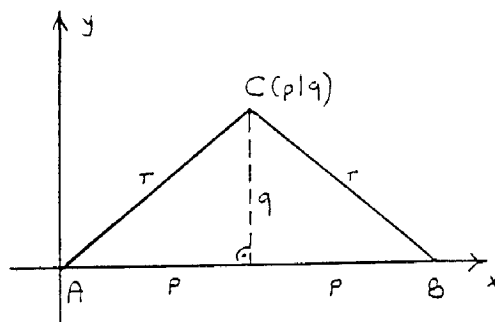
Durch Zusammenfügen zweier solcher Dreiecke erhält man ein gleichschenkeliges heronisches Dreieck:

$$A(0/0), B(2p/0), C(p/q)$$

Dieses Dreieck ist für $p < q$ spitzwinklig, für $p = q$ gleichschenkelig-rechtwinkelig und für $p > q$ stumpfwinklig. Berechnung ergibt:

$$H\left(p \mid \frac{p^2}{q}\right), U\left(p \mid \frac{q^2 - p^2}{2q}\right), I\left(p \mid \frac{pq}{p+r}\right)$$

$$I_1(p+r|q), I_2(p-r|q), I_3\left(p \mid \frac{pq}{p-r}\right)$$



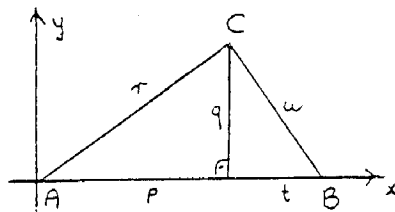
Konkrete Beispiele für solche gleichschenkeligen heronischen Dreiecke sind:

(p/p/r)	A	B	C	H	U	I	I_1	I_2	I_3
(3/4/5)	(0/0)	(6/0)	(3/4)	$(3 \mid \frac{3}{4})$	$(3 \mid \frac{7}{8})$	(3/1.5)	(8/4)	(-2/4)	(3/-6)
(4/3/5)	(0/0)	(8/0)	(4/3)	$(4 \mid \frac{16}{3})$	$(4 \mid -\frac{7}{6})$	$(4 \mid \frac{4}{3})$	(9/3)	(-1/3)	(4/-12)
(5/12/13)	(0/0)	(10/0)	(5/12)	$(5 \mid \frac{25}{12})$	$(5 \mid \frac{119}{24})$	$(5 \mid \frac{10}{3})$	(18/12)	(-8/12)	(5/-7.5)
(12/5/13)	(0/0)	(24/0)	(12/5)	(12/28.8)	(12/-11.9)	(12/2.4)	(25/5)	(-1/5)	(12/-60)
(8/15/17)	(0/0)	(16/0)	(8/15)	$(8 \mid \frac{64}{15})$	$(8 \mid \frac{161}{30})$	(8/4.8)	(25/5)	(-9/15)	$(8 \mid -\frac{40}{3})$
(7/24/25)	(0/0)	(14/0)	(7/24)	$(7 \mid \frac{49}{24})$	$(7 \mid \frac{527}{48})$	(7/5.25)	(32/24)	(-18/24)	$(7 \mid -\frac{28}{3})$

Spiegelt man den Dreieckseckpunkt C an der x-Achse, so erhält man eine Raute mit ganzzahligen Seiten- und Diagonalenlängen ($a = r$, $e = 2p$, $f = 2q$ und $h = 2pq/r$) und ganzzahligen Eckpunkten $(0/0)$, $(p/-q)$, $(2p/0)$, (p/q) .

Durch zwei pythagoreische Zahlentripel $(p/q/r)$ und $(t/q/u)$ mit gemeinsamer Kathete q werden die folgenden ungleichschenkeligen heronischen Dreiecke festgelegt:

Sei $p, q, t > 0 \wedge p > t \wedge p^2 + q^2 = r^2 \wedge t^2 + q^2 = u^2$

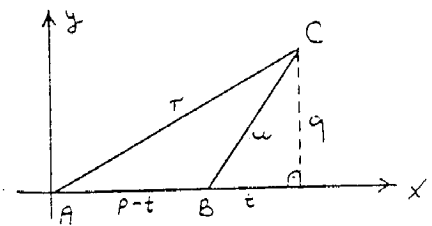


$A(0/0)$, $B(p + t/0)$, $C(p/q)$

α und β sind stets spitze Winkel,
 γ ist ein spitzer Winkel $\leftrightarrow pt < q^2$

$$H\left(p \mid \frac{pt}{q}\right), U\left(\frac{p+t}{2} \mid \frac{q^2 - pt}{2q}\right),$$

$$I\left(\frac{(p+t)(r+p)}{r+p+t+u} \mid \frac{q(p+t)}{r+p+t+u}\right)$$



$A(0/0)$, $B(p-t/0)$, $C(p/q)$

stumpfwinkeliges Dreieck
mit stumpfem Winkel B

$$H\left(p \mid \frac{-pt}{q}\right), U\left(\frac{p-t}{2} \mid \frac{pt + q^2}{2q}\right),$$

$$I\left(\frac{(p-t)(p+r)}{p-t+r+u} \mid \frac{q(p-t)}{p-t+r+u}\right)$$

Konkrete Beispiele für solche ungleichschenkeligen heronischen Dreiecke sind:

$(p/q/r)$	$(t/q/u)$	A	B	C	I	I_1	I_2	I_3
(15/8/17)	(6/8/10)	(0/0)	(21/0)	(15/8)	(14/3.5)	(24/6)	(-3/12)	(7/-28)
		(0/0)	((9/0)	(15/8)	(8/2)	(18/4.5)	(-9/36)	(1/-4)
(40/9/41)	(12/9/15)	(0/0)	(52/0)	(40/9)	$(39/\frac{13}{3})$	(54/6)	(-2/18)	(13/-117)
		(0/0)	(28/0)	(40/9)	(27/3)	$(42/\frac{14}{3})$	(-14/126)	(1/-9)
(9/12/15)	(5/12/13)	(0/0)	(14/0)	(9/12)	(8/4)	(21/10.5)	(-7/14)	(6/-12)
		(0/0)	(4/0)	(9/12)	(3/1.5)	(16/8)	(-12/24)	(1/-2)
(16/12/20)	(9/12/15)	(0/0)	(25/0)	(16/12)	(15/5)	(30/10)	(-5/15)	(10/-30)
		(0/0)	(7/0)	(16/12)	(6/2)	(21/7)	(-14/42)	(1/-3)
(16/12/20)	(5/12/13)	(0/0)	(21/0)	(16/12)	$(14/\frac{14}{3})$	(27/9)	(-6/18)	(7/-21)
		(0/0)	(11/0)	(16/12)	(9/3)	$(22/\frac{22}{3})$	(-11/33)	(2/-6)
(30/16/34)	(12/16/20)	(0/0)	(42/0)	(30/16)	(28/7)	(48/12)	(-6/24)	(14/-56)
		(0/0)	(18/0)	(30/16)	(16/4)	(36/9)	(-18/72)	(2/-8)
(36/15/39)	(20/15/25)	(0/0)	(56/0)	(36/15)	(35/7)	(60/12)	(-4/20)	(21/-105)
		(0/0)	(16/0)	(36/-48)	(15/3)	(40/8)	(-24/120)	(1/-5)
(21/20/29)	(15/20/25)	(0/0)	(36/0)	(21/20)	(20/8)	(45/18)	(-9/22.5)	(16/-40)
		(0/0)	(6/0)	(21/20)	(5/2)	(30/12)	(-24/60)	(1/-2.5)

Da bei allen bisher betrachteten heronischen Dreiecken die Seite AB auf der x-Achse liegt, ist stets die y-Koordinate des Inkreismittelpunktes gleich dem Inkreisradius des Dreiecks.

Bei jedem Dreieck ABC ist der Inkreismittelpunkt I der Höhenschnittpunkt des aus den Ankreismittelpunkten I_1, I_2, I_3 gebildeten Dreiecks, und die Punkte A, B und C sind die Höhenfußpunkte dieses Dreiecks. Somit kann man den obigen Tabellen gleichzeitig auch Dreiecke I_1, I_2, I_3 mit ganzzahligem Höhenschnittpunkt und ganzzahligen Höhenfußpunkten entnehmen.

Spiegelt man den Eckpunkt C des Dreiecks $[A(0/0), B(p+t/0), C(p/q)]$ an der x-Achse, so erhält man ein Deltoid mit ganzzahligen Seiten- und Diagonallängen ($a = r, b = u, e = p + t, f = 2q$) und ganzzahligen Eckpunkten $(0/0), (p/-q), (p+t/0), (p/q)$.

2.3 Eine andere Konstruktion heronischer Dreiecke

Dreiecke mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten und ganzzahligen Seitenlängen kann man auch mit Hilfe des folgenden Ansatzes ermitteln:

Die Seitenvektoren des Dreiecks ABC müssen der Bedingung $\vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{0}$ genügen. Setzt man

$$\vec{BA} = t_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \vec{AC} = t_2 \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \vec{CB} = t_3 \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

so ist die Bedingung $\vec{BA} + \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{0}$ äquivalent zum folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} t_1 \cdot a_1 + t_2 \cdot a_2 + t_3 \cdot a_3 &= 0 \\ t_1 \cdot b_1 + t_2 \cdot b_2 + t_3 \cdot b_3 &= 0 \end{aligned}$$

Als Lösung erhält man, dass $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ sein muss. Setzt man den

Proportionalitätsfaktor gleich 1, so erhält man das Dreieck mit den Seitenlängen

$$\begin{aligned} a &= |BC| = |t_3| \cdot \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \cdot \sqrt{a_3^2 + b_3^2} \\ b &= |AC| = |t_2| \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = |a_3 b_1 - a_1 b_3| \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \\ c &= |AB| = |t_1| \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = |a_2 b_3 - a_3 b_2| \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \end{aligned}$$

Damit diese Seitenlängen rational (bzw. ganzzahlig) sind, setzt man $a_1 = 2u_1 v_1, b_1 = u_1^2 - v_1^2, a_2 = 2u_2 v_2, b_2 = u_2^2 - v_2^2, a_3 = 2u_3 v_3, b_3 = u_3^2 - v_3^2$, wobei $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$ rationale (bzw. ganze) Zahlen sind.

Umformung ergibt:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2 \cdot (u_2 u_3 + v_2 v_3) \cdot (u_3 v_2 - u_2 v_3) \\ t_2 &= 2 \cdot (u_1 u_3 + v_1 v_3) \cdot (u_1 v_3 - u_3 v_1) \end{aligned}$$

Als Eckpunktskoordinaten des Dreiecks kann man daher wählen:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 B &= -\frac{1}{2} \cdot t_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = (u_2 u_3 + v_2 v_3) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot u_1 v_1 \\ u_1^2 - v_1^2 \end{pmatrix}, \\
 C &= \frac{1}{2} \cdot t_2 \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = (u_1 u_3 + v_1 v_3) \cdot (u_1 v_3 - u_3 v_1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot u_2 v_2 \\ u_2^2 - v_2^2 \end{pmatrix}, \\
 &\text{wobei } \vec{u} = (u_1/u_2/u_3) \text{ und } \vec{v} = (v_1/v_2/v_3) \text{ beliebige Elemente von } Z^3 \text{ sind.}
 \end{aligned}$$

Konkrete Zahlenbeispiele für mit diesem Ansatz ermittelte heronische Dreiecke sind:

A	B	C	H	U	I	I ₁	I ₂	I ₃
(0/0)	(14/0)	(32/-24)	(32/24)	(7/-24)	(12/-4)	(42/-14)	(-28/-84)	(2/6)
(0/0)	(18/-24)	(-14/0)	(18/24)	(-7/-24)	(-2/-4)	(-42/-84)	(-12/6)	(28/-14)
(0/0)	(9/12)	(-7/0)	(9/-12)	(-3.5/12)	(-1/2)	(-21/42)	(-6/-3)	(14/7)
(0/0)	(15/36)	(-33/0)	(15/-20)	(-16.5/28)	(-6/9)	(-66/99)	(-27/-18)	(33/22)
(0/0)	(12/9)	(12/16)	(24/0)	(0/12.5)	(10/10)	(15/15)	(30/30)	(5/-5)
(0/0)	(12/16)	(24/0)	(12/9)	(12/3.5)	(12/6)	(32/16)	(12/-24)	(-8/16)
(0/0)	(9/12)	(25/0)	(9/12)	(12.5/0)	(10/5)	(30/15)	(15/-30)	(-5/10)
(0/0)	(-12/16)	(12/9)	(0/0)	(0/12.5)	(1/7)	(6/42)	(14/-2)	(-21/3)
(0/0)	(32/24)	(-18/24)	(0/0)	(7/24)	(2/14)	(12/84)	(-28/4)	(42/-6)
(0/0)	(20/15)	(-36/15)	(0/-33)	(-8/31.5)	(-1/8)	(-15/120)	(-40/-5)	(24/3)
(0/0)	(24/0)	(12/9)	(12/16)	(12/-3.5)	(12/4)	(27/9)	(-3/9)	(12/-36)
(0/0)	(12/-9)	(-12/-9)	(0/7)	(0/-12.5)	(0/-5)	(0/-45)	(-15/0)	(15/0)

3. Anwendung von Koordinatentransformationen

Hat man Aufgabenstellungen zur analytischen Geometrie mit ganzzahligen numerischen Werten vorgegeben, so kann man die Zahlenwerte durch Anwenden geeigneter affiner Transformationen rasch modifizieren.

3.1 Grundlagen

Bekanntlich versteht man unter einer **affinen Transformation** im R^n eine Abbildung $\varphi: R^n \rightarrow R^n$ der Form $\varphi: X \mapsto A \cdot X + T$, wobei A eine reelle $n \times n$ -Matrix und $T \in R^n$ ein fester Translationsvektor ist.

Eine affine Abbildung setzt sich also aus einer linearen Abbildung und einer Translation zusammen. Sie ist genau dann bijektiv, wenn der Wert der Determinante von A ungleich Null ist.

Durch eine bijektive affine Abbildung wird

- jeder Punkt des \mathbb{R}^n auf einen Punkt des \mathbb{R}^n , jede Gerade auf eine Gerade und jede Ebene auf eine Ebene abgebildet,
- Das Teilverhältnis dreier Punkte auf einer Geraden bleibt invariant. (Daher wird insbesondere der Mittelpunkt einer Strecke auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet).
- Parallele Vektoren (Geraden) werden auf parallele Vektoren (Geraden) abgebildet.

Wichtige Beispiele affiner Transformationen sind die Kongruenzabbildungen und die Ähnlichkeitsabbildungen:

Für Kongruenzabbildungen gilt außerdem, dass sie

- Winkel zwischen Vektoren invariant lassen (Daher werden insbesondere zwei zueinander normale Geraden auf zueinander normale Geraden abgebildet),
- Streckenlängen, Flächeninhalte und Volumina invariant lassen.

Für Ähnlichkeitsabbildungen gilt über die allgemeinen Eigenschaften affiner Abbildungen hinaus, dass sie

- wie Kongruenzabbildungen Winkel zwischen Vektoren invariant lassen
- und dass jede Strecke auf eine Strecke mit genau k -facher Länge abgebildet wird.

Kongruenz- bzw. Ähnlichkeitsabbildungen in \mathbb{R}^n können folgendermaßen charakterisiert werden:

Eine **Kongruenzabbildung** (Bewegung) im \mathbb{R}^n ist eine Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Form $\varphi: X \mapsto A \cdot X + T$ wobei A eine orthogonale $n \times n$ -Matrix und $T \in \mathbb{R}^n$ ein fixer Translationsvektor ist.

Eine **Ähnlichkeitsabbildung** im \mathbb{R}^n ist eine Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Form $\varphi: X \mapsto k \cdot A \cdot X + T$ wobei A eine orthogonale $n \times n$ -Matrix, k eine positive reelle Zahl und $T \in \mathbb{R}^n$ ein fixer Translationsvektor ist.

Orthogonale Matrizen sind reelle $n \times n$ -Matrizen, deren Zeilenvektoren ein Orthonormalsystem bilden, d.h. jeder Zeilenvektor hat Betrag 1 und das Skalarprodukt $A_i \cdot A_j$ zweier verschiedener Zeilenvektoren hat den Wert Null.

Orthogonale 2×2 -Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sind demnach jene 2×2 -Matrizen, die der Bedingung $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \wedge ac + bd = 0$ genügen.

Alle diese Matrizen sind von der Form $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$.

Der erste Typus beschreibt eine Drehung mit dem Ursprung als Drehzentrum und dem Drehwinkel α , der zweite eine Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung mit Anstiegswinkel $\alpha/2$.

3.2 Beispiele für Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen im \mathbb{R}^2

a) Translationen

Die einfachste Möglichkeit, Punkte mit ganzzahligen Koordinaten durch eine Kongruenzabbildung in Punkte mit ganzzahligen Koordinaten abzubilden, besteht darin, eine Translation anzuwenden.

$$X \mapsto X + T, \quad (x/y) \mapsto (x + t_1 / y + t_2)$$

b) „Triviale“ orthogonale Abbildungen

Einfach anzuwenden sind auch die folgenden orthogonalen Abbildungen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{Spiegelung an der y-Achse}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{Spiegelung an der x-Achse}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um (0/0) um } 180^\circ$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{Spiegelung an der ersten Mediane}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{Spiegelung an der zweiten Mediane}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um (0/0) um } 90^\circ$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{Drehung um (0/0) um } 270^\circ$$

Da jede orthogonale 2×2 -Matrix von der Form $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a^2 + b^2 = 1$ ist, kann es (abgesehen von der Einheitsmatrix) keine weiteren orthogonalen 2×2 -Matrizen mit ganzzahligem a und b geben.

Beispiel:

Das Dreieck ABC [$A(-6/0)$, $B(9/-3)$, $C(6/8)$] hat den Höhenschnittpunkt $H(5/3)$ und den Umkreismittelpunkt $U(2/1)$.

- Durch Anwenden der Translation $X \mapsto X + T$ mit $T = (2/-1)$ erhält man das kongruente Dreieck $A_1 B_1 C_1$ mit dem Höhenschnittpunkt H_1 und dem Umkreismittelpunkt U_1 :

$$A_1 = A + T = (-6/0) + (2/-1) = (-4/-1)$$

$$B_1 = B + T = (9/-3) + (2/-1) = (11/-4)$$

$$C_1 = C + T = (6/8) + (2/-1) = (8/7)$$

$$H_1 = H + T = (5/3) + (2/-1) = (7/2)$$

$$U_1 = U + T = (2/1) + (2/-1) = (4/0)$$

- Durch Vertauschen der Koordinaten und anschließendes Addieren des Vektors $T(-2/1)$, d.h. durch Anwenden der Kongruenzabbildung $(x / y) \mapsto (y - 2 / x + 1)$ erhält man das Dreieck $A_2B_2C_2$ mit dem Höhenschnittpunkt H_2 und dem Umkreismittelpunkt U_2 :

$$\begin{aligned} A_2 &= (0/-6) + (-2/1) = (-2/-5) \\ B_2 &= (-3/9) + (-2/1) = (-5/10) \\ C_2 &= (8/6) + (-2/1) = (6/7) \\ H_2 &= (3/5) + (-2/1) = (1/6) \\ U_2 &= (1/2) + (-2/1) = (-1/3) \end{aligned}$$

Faustregel:

Wendet man auf die Koordinaten aller gegebenen Punkte eine (oder mehrere) der folgenden Umformungen an, so liegt eine Kongruenzabbildung vor:

- zur x-Koordinate eine fixe reelle Zahl c addieren,
- zur y-Koordinate eine fixe reelle Zahl d addieren
- das Vorzeichen der x-Koordinate ändern
- das Vorzeichen der y-Koordinate ändern
- die beiden Koordinaten vertauschen

c) Ähnlichkeitsabbildungen

Beispiele für Ähnlichkeitsabbildungen, die ganzzahlige Koordinaten in ganzzahlige Koordinaten überführen, lassen sich einfach finden: Jede Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ von der Form

$$X \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \text{ das heißt } (x / y) \mapsto (ax + by + t_1 / -bx + ay + t_2)$$

$$\text{oder } X \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \text{ das heißt } (x / y) \mapsto (ax + by + t_1 / bx - ay + t_2)$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $T = (t_1/t_2) \in \mathbb{Z}^2$ ist eine solche Abbildung.

Konkrete Beispiele sind etwa:

- $(x / y) \mapsto (x + y / -x + y)$
- $(x / y) \mapsto (-x + y / -x - y)$
- $(x / y) \mapsto (2x + y / -x + 2y)$
- $(x / y) \mapsto (3x + y / -x + 3y)$
- $(x / y) \mapsto (-2x + y / -x - 2y)$
- $(x / y) \mapsto (2x + 3y / -3x + 2y)$
- $(x / y) \mapsto (3x + 2y / -2x + 3y)$
-

3.3 Beispiele für Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen im \mathbb{R}^3

a) Kongruenzabbildungen:

Beispiele für Kongruenzabbildungen im \mathbb{R}^3 , die ganzzahlige Koordinaten in ganzzahlige Koordinaten überführen, sind analog zu Abschnitt 3.2:

- alle Translationen mit ganzzahligem Translationsvektor im \mathbb{R}^3
- und alle „trivialen“ orthogonalen Abbildungen im \mathbb{R}^3 (Insgesamt gibt es 48 orthogonale Matrizen, bei denen jeder Zeilenvektor einmal die Eintragung ± 1 und sonst nur die Eintragung 0 enthält).

Analog zum \mathbb{R}^2 kann man die folgende Faustregel formulieren:

Faustregel:

Wendet man auf die Koordinaten aller gegebenen Punkte eine (oder mehrere) der folgenden Umformungen an, so liegt eine Kongruenzabbildung vor:

- zur x-Koordinate eine fixe reelle Zahl c addieren,
- zur y-Koordinate eine fixe reelle Zahl d addieren
- zur z-Koordinate eine fixe reelle Zahl e addieren
- das Vorzeichen der x-Koordinate ändern
- das Vorzeichen der y-Koordinate ändern
- das Vorzeichen der z-Koordinate ändern
- x- und y-Koordinaten vertauschen
- x- und z-Koordinaten vertauschen
- y- und z-Koordinaten vertauschen

b) Ähnlichkeitsabbildungen:

Durch systematisches Probieren kann man Beispiele für Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ mit

ganzzahligen Eintragungen a, b, c, d, e, f, g, h, i finden, die den Bedingungen $a^2+b^2+c^2 = d^2+e^2+f^2 = g^2+h^2+i^2 \wedge ad+be+cf = ag+bh+ci = dg+eh+fi = 0$ genügen.

So führt etwa der Ansatz $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ auf die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ und auf die Bei-

spiele $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ -8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & 5 & 0 \\ -5 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}, \dots$

Der Ansatz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ führt auf die Bedingung $ac + ab + bc = 0$, und auf die Beispiele:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 6 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 12 & -3 \\ -3 & 4 & 12 \\ 12 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -6 & 10 & 15 \\ 15 & -6 & 10 \\ 10 & 15 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 20 & 5 \\ 5 & -4 & 20 \\ 20 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \dots$$

Der Ansatz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ führt auf die Bedingung $a+c+d = 0 \wedge b^2 = -2ac$ und auf die Bei-

spiele $\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 & 12 & 8 \\ 12 & 1 & 12 \\ 8 & 12 & -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -18 & 6 & 1 \\ 6 & 17 & 6 \\ 1 & 6 & -18 \end{pmatrix}, \dots$

3.4 Prismen, Tetraeder und Pyramiden mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten

Eckpunktskoordinaten von Würfeln, Prismen, Tetraedern, Pyramiden,...in besonderer Lage zu den Koordinatenebenen kann man ganz einfach angeben, zum Beispiel:

Würfel: $[A(0/0/0), B(1/0/0), C(1/1/0), D(0/1/0), E(0/0/1), F(1/0/1), G(1/1/1), H(0/1/1)]$

Regelmäßiges Tetraeder: $[A(1/0/0), B(0/1/0), C(0/0/1), D(1/1/1)]$

Regelmäßiges Oktaeder: $[A(1/0/0), B(0/1/0), C(-1/0/0), D(0/-1/0), E(0/0/1), F(0/0/-1)]$

Quadratische Pyramide mit Kantenlänge a und Höhe h : $[A(0/0/0), B(a/0/0), C(a/a/0), D(0/a/0), S(\frac{1}{2}a / \frac{1}{2}a / h)]$

.....

Wendet man auf diese Eckpunkte eine Ähnlichkeitsabbildung an, so erhält man einen ähnlichen Körper mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten in allgemeiner Lage zu den Koordinatenebenen.

Beispiel 1:

Durch die Ähnlichkeitsabbildung

$$X \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

dh. $(x / y / z) \mapsto (-2x+6y+3z+5 / 3x-2y+6z-1 / 6x+3y-2z+6)$

werden die Eckpunkte des regelmäßigen Tetraeders $[A(1/0/0), B(0/1/0), C(0/0/1), D(1/1/1)]$ mit der Kantenlänge $\sqrt{2}$ auf die Eckpunkte des regelmäßigen Tetraeders

$[A_1(3/2/12), B_1(11/-3/9), C_1(8/5/4), D_1(12/6/13)]$
mit der Kantenlänge $7\sqrt{2}$ abgebildet. (Da jeder Zeilenvektor der obigen Matrix Absolutbetrag 7 hat, ist jede Bildstrecke 7-mal so lang wie die Urstrecke.)

Beispiel 2

Eine gerade quadratische Pyramide kann man durch Angabe der Koordinaten des Basiseckpunkts A, der Spitze S und eines Normalvektors \vec{n} der Grundflächenebene festlegen. So wird durch $A(0/0/0)$, $S(2/2/5)$ und $\vec{n} = (0/0/1)$ eine Pyramide mit Grundkantenlänge 4 und Höhe 5 festgelegt, deren Grundfläche in der xy-Ebene liegt.

Anwenden der Ähnlichkeitsabbildung $X \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ ergibt:

$$\begin{aligned} A &= (0/0/0) \mapsto A_1 = (0/0/0) + (-4/-3/7) = (-4/-3/7) \\ S &= (2/2/5) \mapsto S_1 = (12/12/3) + (-4/-3/7) = (8/9/10) \\ \vec{n} &= (0/0/1) \mapsto \vec{n}_1 = (2/2/-1) \end{aligned}$$

(Man beachte: Da eine affine Transformation $\varphi(x) = A \cdot X + t$ einen Vektor \overrightarrow{PQ} auf den Vektor $\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)} = \varphi(Q) - \varphi(P) = (A \cdot Q + t) - (A \cdot P + t) = A \cdot Q - A \cdot P = A \cdot (Q - P) = A \cdot \overrightarrow{PQ}$ abbildet, ist der Normalvektor \vec{n} nur mit der Matrix zu multiplizieren).

Durch den Basiseckpunkt $A_1(-4/-3/7)$, die Spitze $S_1(8/9/10)$ und den Normalvektor $\vec{n}_1 = (2/2/-1)$ der Grundflächenebene wird nun eine gerade quadratische Pyramide mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten festgelegt, deren Grundflächenebene nicht mehr parallel zur xy-Ebene liegt. Da jeder Zeilenvektor der verwendeten Ähnlichkeitsmatrix den Betrag 3 hat, hat diese Pyramide die Grundkantenlänge $4 \cdot 3 = 12$ und die Höhe $5 \cdot 3 = 15$.

Beispiel 3

Es sollen „schöne“ numerische Werte für die folgende Aufgabenstellung gefunden werden: „Von einer dreiseitigen Pyramide kennt man eine Gleichung der Grundflächenebene sowie Gleichungen der Trägergeraden zweier Seitenkanten. Die dritte Seitenkante stehe auf die Grundfläche normal. Die Eckpunktskoordinaten der Pyramide sind zu bestimmen.“

Wieder kann man von einer Pyramide in besonderer Lage zu den Koordinatenebenen ausgehen:

Sei, zum Beispiel, $A(0/0/0)$, $B(6/0/0)$, $C(4/3/0)$ und $D(4/3/5)$. Dann liegen die Punkte A, B, C in der xy-Ebene, und die Seitenkante CD steht auf die Grundflächenebene ABC normal.

Anwenden der Ähnlichkeitsabbildung $X \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ergibt die Bildpunkte

$$A_1(5/-3/-5), B_1(-1/9/7), C_1(7/2/9), D_1(17/12/4).$$

Als Gleichung der Ebene $A_1B_1C_1$ ermittelt man $2x + 2y - z = 9$, Gleichungen der Trägergeraden der Kanten A_1D_1 bzw. B_1D_1 sind gegeben durch: $g: X = (9/2/-2) + t \cdot (4/5/3)$ bzw. $h: X = (5/10/6) + u \cdot (6/1/-1)$.

4. Orthotetraeder

Im Unterschied zu Dreiecken hat nicht jedes Tetraeder einen Höhenschnittpunkt. Tetraeder, deren vier Höhen sich in einem Punkt H schneiden, werden als **Orthotetraeder** bezeichnet. Im Folgenden werden einige interessante Eigenschaften von Orthotetraedern aufgelistet, und es wird gezeigt, wie man konkrete numerische Beispiele für Orthotetraeder erzeugen kann.

4.1 Orthotetraeder mit ganzzahligen Eckpunktskoordinaten:

Um konkrete numerische Beispiele für Eckpunktskoordinaten eines Orthotetraeders zu finden, kann man folgendermaßen vorgehen:

Zunächst wählt man die Eckpunkte $A(0/0/0)$, $B(x_1/0/0)$ und $C(x_2/y_2/0)$ in der xy -Ebene. Der Höhenschnittpunkt H_{ABC} des Dreiecks ABC ist gegeben durch $H_{ABC} \left(x_2 / \frac{x_2(x_1 - x_2)}{y_2} / 0 \right)$.

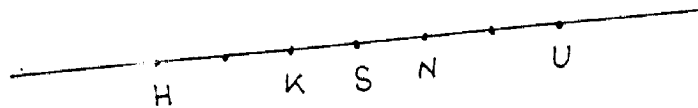
Wählt man nun den vierten Tetraedereckpunkt $D \left(x_2 / \frac{x_2(x_1 - x_2)}{y_2} / z_3 \right)$ lotrecht über dem Punkt H_{ABC} , so bilden A, B, C und D ein Orthotetraeder. Der Höhenschnittpunkt H dieses Tetraeders ist gegeben durch $H \left(x_2 / \frac{x_2(x_1 - x_2)}{y_2} / - \frac{x_2(x_1 - x_2)}{y_2} \cdot \frac{(x_2(x_1 - x_2) - y_2^2)}{y_2 z_3} \right)$.

Konkrete Zahlenbeispiele sind (diese Werte können durch Ähnlichkeitsabbildungen bequem verändert werden):

A	B	C	D	H	U
(0/0/0)	(6/0/0)	(4/2/0)	(4/4/4)	(4/4/-2)	(3/-1/4)
(0/0/0)	(10/0/0)	(4/4/0)	(4/6/4)	(4/6/-3)	(5/-1/5)
(0/0/0)	(14/0/0)	(8/4/0)	(8/12/4)	(8/12/-24)	(7/-4/26)
(0/0/0)	(6/0/0)	(2/4/0)	(2/2/4)	(2/2/1)	(3/1/1)
(0/0/0)	(10/0/0)	(6/4/0)	(6/6/4)	(6/6/-3)	(5/-1/5)
(0/0/0)	(4/0/0)	(1/1/0)	(1/3/3)	(1/3/-2)	(2/-1/3.5)
(0/0/0)	(14/0/0)	(5/3/0)	(5/15/9)	(5/15/-20)	(7/-6/24.5)
(0/0/0)	(3/0/0)	(1/1/0)	(1/2/2)	(1/2/-1)	(1.5/-0.5/2)
(0/0/0)	(4/0/0)	(2/1/0)	(2/4/2)	(2/4/-6)	(2/-1.5/7)
(0/0/0)	(4/0/0)	(1/3/0)	(1/1/2)	(1/1/1)	(2/1/0)
(0/0/0)	(10/0/0)	(4/6/0)	(4/4/4)	(4/4/2)	(5/1/0)
(0/0/0)	(14/0/0)	(8/4/0)	(8/12/8)	(8/12/-12)	(7/-4/16)

Die folgende Auflistung von Eigenschaften solcher Orthotetraeder ist als Anregung für mögliche Aufgabenstellungen gedacht:

- Die windschiefen Gegenkanten AB und CD (bzw. BC und AD bzw. BD und AC) liegen zueinander orthogonal, und für ihre Längen gilt: $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 = t^2$.
- Die Mittelpunkte der sechs Tetraederkanten liegen auf einer Kugel mit dem Tetraederschwerpunkt $S = (A+B+C+D)/4$ als Mittelpunkt und dem Radius $t/4$.
- Der Schwerpunkt S ist der Mittelpunkt der Strecke HU, wobei U den Umkugelmittelpunkt des Tetraeders bezeichnet.
- Die Schwerpunkte der vier Seitenflächen und die Fußpunkte der vier Tetraederhöhen liegen auf einer Kugel mit Mittelpunkt K und Radius $r/3$ (wobei r den Umkugelradius des Tetraeders bezeichnet, und K jener Punkt auf der Geraden durch H, S und U ist, der die Strecke HS im Verhältnis 2:1 teilt).
- Die in den Schwerpunkten der vier Seitenflächen auf diese errichteten normalen Geraden schneiden einander in einem Punkt N. N liegt auf der Geraden durch H, K, S und U, und es gilt $\overline{HN} = 4/3 \cdot \overline{HS}$.



4.2 Rechtwinkelige Orthotetraeder

Besonders einfache Orthotetraeder erhält man, wenn man $x_3 = 0$ setzt: In diesem Fall liegen alle vier Eckpunkte sowie drei der sechs Seitenkanten auf den Koordinatenachsen. Drei der vier Seitenflächen sind paarweise aufeinander normal stehende rechtwinkelige Dreiecke, und der Höhenschnittpunkt fällt mit dem Eckpunkt $A(0/0/0)$ zusammen.

Für rechtwinkelige Orthotetraeder mit den Eckpunkten $A(0/0/0)$, $B(a/0/0)$, $C(0/b/0)$, $D(0/0/c)$ und $a, b, c > 0$ gilt:

- Die Eckpunkte B, C und D sind die Schnittpunkte der Ebene $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ mit den drei Koordinatenachsen.
- Drei der vier Tetraederhöhen fallen mit den Kanten AB, AC und AD zusammen, die Höhen haben die Längen $h_1 = a$, $h_2 = b$, $h_3 = c$ und $h_4 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$.
- Für die Längen zueinander windschiefer Gegenkanten gilt:

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 = t^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

- $H = A = (0/0/0)$, $S = \left(\frac{a}{4} / \frac{b}{4} / \frac{c}{4}\right)$, $U = \left(\frac{a}{2} / \frac{b}{2} / \frac{c}{2}\right)$, $K = \left(\frac{a}{6} / \frac{b}{6} / \frac{c}{6}\right)$, $N = \left(\frac{a}{3} / \frac{b}{3} / \frac{c}{3}\right)$
- Der Umkugelradius ist gegeben durch $r = t/2$.
- Das Tetraeder hat den Inkugelmittelpunkt $I(\rho/\rho/\rho)$ und den Inkugelradius ρ , wobei

$$\rho = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}}$$

Konkrete Zahlenbeispiele sind:

A	B	C	D	U	ρ
(0/0/0)	(8/0/0)	(0/4/0)	(0/0/4)	(4/2/2)	1
(0/0/0)	(10/0/0)	(0/25/0)	(0/0/15)	(5/12.5/7.5)	3
(0/0/0)	(8/0/0)	(0/6/0)	(0/0/2)	(4/3/1)	3/4
(0/0/0)	(2/0/0)	(0/7/0)	(0/0/5)	(1/3.5/2.5)	5/7
(0/0/0)	(6/0/0)	(0/9/0)	(0/0/3)	(3/4.5/1.5)	1
(0/0/0)	(4/0/0)	(0/7/0)	(0/0/7)	(2/3.5/3.5)	7/6
(0/0/0)	(6/0/0)	(0/7/0)	(0/0/7)	(3/3.5/3.5)	7/5
(0/0/0)	(12/0/0)	(0/21/0)	(0/0/21)	(6/10.5/10.5)	7/2

Zahlenbeispiele für rechtwinkelige Orthotetraeder mit ganzzahligen Eckpunkten $A(0/0/0)$, $B(a/0/0)$, $C(0/b/0)$, $D(0/0/c)$ und rationalem Inkugelradius ρ kann man folgendermaßen ermitteln:

Falls $a, b, c > 0$ sind, kann man die Trägerebene der Seitenfläche BCD durch eine Gleichung $ux + vy + wz = p$ mit $u, v, w, p > 0$ beschreiben (Dann ist $a = p/u$, $b = p/v$ und $c = p/w$). Der Inkugelmittelpunkt $I(\rho/\rho/\rho)$ liegt unterhalb dieser Ebene und hat von ihr den Abstand ρ . Daraus folgt:

$$\rho = \frac{|u \cdot \rho + v \cdot \rho + w \cdot \rho - p|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = -\frac{u \cdot \rho + v \cdot \rho + w \cdot \rho - p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

(c) Umformen dieses Ausdrucks ergibt:
$$\rho = \frac{p}{u + v + w + \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

Wählt man daher positive ganze Zahlen u, v, w so, dass $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ eine ganze Zahl ist (siehe dazu die Tabelle in Abschnitt 1.2), und wählt man p als gemeinsames Vielfaches von u, v und w , so erhält man ein Orthotetraeder mit ganzzahligen Kantenlängen a, b, c und rationalem Inkugelradius ρ .

5. Ganzzahlige Punkte auf Ellipsen und Hyperbeln

Die Gleichung $x^2 + v \cdot y^2 = a^2$ beschreibt für $v \in \mathbb{R}^+$ eine Ellipse und für $v \in \mathbb{R}^-$ eine Hyperbel (jeweils mit den Hauptscheiteln $(-a/0)$, $(a/0)$ und den Nebenscheiteln $\left(0 / \frac{a}{\sqrt{|v|}}\right)$, $\left(0 / -\frac{a}{\sqrt{|v|}}\right)$).

Für jedes $i \in \mathbb{R}$ mit $i^2 \neq -1/v$ wird nun durch

$$\varphi_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -iv \\ i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - ivy / ix + y),$$

eine bijektive lineare Transformation festgelegt, die den Kegelschnitt $k_1: x^2 + v \cdot y^2 = a^2$ auf den Kegelschnitt $k_2: x^2 + v \cdot y^2 = a^2(1+i^2v)$ abbildet. Darüber hinaus bildet φ_i auch die Tangente an k_1 in einem Punkt $T \in k_1$ auf die Tangente an k_2 im Bildpunkt $\varphi_i(T) \in k_2$ ab, und allgemein entspricht der Polaren eines Punktes $P \in \mathbb{R}^2$ bezüglich k_1 als Bildgerade die Polare des Punktes $\varphi_i(P)$ bezüglich k_2 .

Mit Hilfe dieser Transformation φ_i kann man relativ einfach ganzzahlige Punkte auf Kegelschnitten finden, deren Tangenten an den Kegelschnitt ebenfalls ganzzahlige Schnittpunkte haben (Im Folgenden wird für $X = (x/y) \in \mathbb{R}^2$ die Bezeichnung $-X = (-x/-y)$ und $X^* = (x/-y)$ verwendet.):

Ist $T = (x_0/y_0)$ ein Punkt auf dem Kegelschnitt $x^2 + v \cdot y^2 = a^2$, so liegen die Punkte

$$T_1 = \varphi_i(T) = (x_0 - ivy_0 / ix_0 + y_0) \quad \text{und} \quad T_2 = \varphi_i(T^*) = (x_0 + ivy_0 / ix_0 - y_0)$$

sowie die Punkte $-T_1, T_1^*, -T_1^*, -T_2, T_2^*, -T_2^*$ auf dem Kegelschnitt $x^2 + v \cdot y^2 = a^2(1+i^2v)$. Als Schnittpunkte der Tangenten an den Kegelschnitt $x^2 + v \cdot y^2 = a^2(1+i^2v)$ mit diesen Berührungspunkten errechnet man:

$$\text{Tangenten in } T_1 \text{ und in } T_2: \quad \left(\frac{a^2}{x_0} / \frac{a^2 i}{x_0} \right)$$

$$\text{Tangenten in } T_1 \text{ und in } -T_2: \quad \left(-\frac{a^2 i}{y_0} / \frac{a^2}{vy_0} \right)$$

$$\text{Tangenten in } T_1 \text{ und in } T_2^*: \quad (x_0(1+i^2v) / y_0(1+i^2v))$$

$$\text{Tangenten in } T_1 \text{ und in } -T_2^*: \quad \left(-\frac{y_0(1+i^2v)}{i} / \frac{x_0(1+i^2v)}{iv} \right)$$

Alle übrigen Tangentenschnittpunkte liegen symmetrisch zu einem dieser vier Punkte (bzw. liegen auf einer Koordinatenachse).

Ellipse bzw. Hyperbel:	Punkte auf dem Kegelschnitt:		Schnittpunkt der Tangenten an den Kegelschnitt mit den Berührungspunkten:			
	T_1	T_2	T_1 und T_2	T_1 und $-T_2$	T_1 und T_2^*	T_1 und $-T_2^*$
$x^2 + 2y^2 = 27$	(-3/3)	(5/-1)	(9/9)	(-4.5/2.25)	(3/6)	(-6/1.5)
$x^2 + 2y^2 = 54$	(-2/5)	(6/3)	(3/6)	(-12/3)	(18/9)	(-4.5/4.5)
$x^2 + 2y^2 = 114$	(-4/7)	(8/5)	(3/9)	(-18/3)	(38/19)	(-6 $\frac{1}{3}$ /6 $\frac{1}{3}$)
$x^2 + 2y^2 = 198$	(-6/9)	(10/7)	(3/12)	(-24/3)	(66/33)	(-8.25/8.25)
$x^2 + 3y^2 = 52$	(-5/3)	(7/1)	(4/8)	(-8/ $\frac{2}{3}$)	(13/13)	(- $\frac{13}{2}$ / $\frac{13}{2}$)
$x^2 + 3y^2 = 84$	(-3/5)	(9/1)	(7/7)	(-10.5/3.5)	(12/8)	(-8/4)
$x^2 + 3y^2 = 156$	(-3/7)	(9/5)	(4/8)	(-24/4)	(39/13)	(-6.5/6.5)
$x^2 + 3y^2 = 273$	(-9/8)	(15/4)	(7/14)	(-21/3.5)	(39/26)	(-13/6.5)
$x^2 + 3y^2 = 588$	(-9/13)	(15/11)	(4/16)	(-48/4)	(147/49)	(-12.25/12.25)
$x^2 + 4y^2 = 40$	(-2/3)	(6/1)	(4/4)	(-8/2)	(10/5)	(-5/2.5)
$x^2 + 4y^2 = 80$	(-4/4)	(8/2)	(4/6)	(-12/2)	(20/10)	(-6 $\frac{2}{3}$ /3 $\frac{1}{3}$)
$x^2 + 4y^2 = 136$	(-6/5)	(10/3)	(4/8)	(-16/2)	(34/17)	(-8.5/4.25)
$x^2 + 4y^2 = 200$	(-2/7)	(10/5)	(5/7.5)	(-30/5)	(40/10)	(-6 $\frac{2}{3}$ /6 $\frac{2}{3}$)
$x^2 + 4y^2 = 200$	(-10/5)	(14/1)	(10/15)	(-15/2.5)	(20/20)	(-13 $\frac{1}{3}$ /3 $\frac{1}{3}$)
$x^2 + 4y^2 = 208$	(-8/6)	(12/4)	(4/10)	(-20/2)	(52/26)	(-10.4/5.2)
$x^2 + 4y^2 = 340$	(-4/9)	(12/7)	(5/10)	(-40/5)	(68/17)	(-8.5/8.5)
$x^2 + 4y^2 = 340$	(-14/6)	(18/2)	(10/20)	(-20/2.5)	(34/34)	(17/4.25)
$x^2 + 4y^2 = 520$	(-6/11)	(14/9)	(5/12.5)	(-50/5)	(104/26)	(-10.4/10.4)
$x^2 + 4y^2 = 520$	(-18/7)	(22/3)	(10/25)	(-25/2.5)	(52/52)	(-20.8/5.2)
$x^2 + 4y^2 = 520$	(-14/9)	(18/7)	(4/16)	(-32/2)	(130/65)	(-16.25/8.125)
$x^2 + 5y^2 = 54$	(-3/3)	(7/-1)	(12/6)	(-6/2.4)	(4.5/4.5)	(-9/1.8)
$x^2 + 5y^2 = 126$	(-9/3)	(11/1)	(6/12)	(-12/1.2)	(21/21)	(-10.5/2.1)
$x^2 + 5y^2 = 189$	(-8/5)	(12/3)	(4.5/9)	(-18/1.8)	(42/21)	(-10.5/4.2)
$x^2 + 5y^2 = 270$	(-5/7)	(15/3)	(9/9)	(-22.5/4.5)	(30/12)	(-12/6)
$x^2 + 5y^2 = 276$	(-14/4)	(16/2)	(6/18)	(-18/1.2)	(46/46)	(-15 $\frac{1}{3}$ /3 $\frac{1}{3}$)
$x^2 + 5y^2 = 486$	(-19/5)	(21/3)	(6/24)	(-24/1.2)	(81/81)	(-20.25/4.05)
$x^2 + 5y^2 = 504$	(-18/6)	(22/2)	(12/24)	(-24/2.4)	(42/42)	(-21/4.2)
$x^2 + 5y^2 = 630$	(-5/11)	(15/9)	(6/12)	(-60/6)	(105/21)	(-10.5/10.5)
$2x^2 + 3y^2 = 115.5$	(4.5/5)	(7.5/1)	(7/3.5)	(-10.5/14)	(8.25/2.75)	(-5.5/11)
$2x^2 + 3y^2 = 210$	(-3/8)	(9/4)	(5/10)	(-15/5)	(21/14)	(-7/7)
$2x^2 + 3y^2 = 435$	(-6/11)	(12/7)	(5/15)	(-22.5/5)	(43.5/29)	(-9 $\frac{2}{3}$ /9 $\frac{2}{3}$)
$2x^2 + 3y^2 = 750$	(-9/14)	(15/10)	(5/20)	(-30/5)	(75/50)	(-12.5/12.5)
$3x^2 + 4y^2 = 336$	(-2/9)	(10/3)	(7/10.5)	(-14/7)	(16/12)	(-8/8)
$3x^2 + 4y^2 = 624$	(-10/9)	(14/3)	(8/24)	(-16/4)	(26/39)	(-13/6.5)
$3x^2 + 4y^2 = 912$	(-2/15)	(14/9)	(8/16)	(-32/12)	(38/19)	(-9.5/14.25)
$x^2 - y^2 = 24$	(7/5)	(5/-1)	(4.5/1.5)	(-3/-9)	(5 $\frac{1}{3}$ /2 $\frac{1}{3}$)	(-8/-16)
$x^2 - y^2 = 27$	(14/13)	(6/-3)	(3.6/1.8)	(-2.25/-4.5)	(7.5/6)	(-12/-15)
$x^2 - y^2 = 45$	(9/6)	(7/-2)	(6/1.5)	(-3/-12)	(7.5/3.75)	(-15/-30)
$x^2 - y^2 = 63$	(12/9)	(8/1)	(8.4/4.2)	(-10.5/-21)	(7.5/3)	(-6/-15)
$x^2 - y^2 = 72$	(11/7)	(9/3)	(9.6/4.8)	(-24/-48)	(7.5/1.5)	(-3/-15)
$2x^2 - y^2 = 14$	(5/6)	(3/-2)	(2/1)	(-1/-4)	(3.5/3.5)	(-7/-14)
$2x^2 - y^2 = 23$	(6/7)	(4/-3)	(2.5/1)	(-1/-5)	(4.6/4.6)	(-11.5/-23)

$2x^2 - y^2 = 62$	(9/10)	(7/-6)	(4/1)	(-1/-8)	(7.75/7.75)	(-31/-62)
$4x^2 - y^2 = 63$	(6/9)	(4/1)	(4.2/4.2)	(-5.25/-21)	(3.75/3)	(-3/-15)
$4x^2 - y^2 = 96$	(7/10)	(5/-2)	(4.5/3)	(-3/-18)	(5 $\frac{1}{2}$ /5 $\frac{1}{2}$)	(-8/-32)
$4x^2 - y^2 = 180$	(9/12)	(7/-4)	(6/3)	(-3/-24)	(7.5/7.5)	(-15/-60)
$4x^2 - y^2 = 288$	(11/14)	(9/-6)	(7.5/3)	(-3/-30)	(9.6/9.6)	(-24/-96)
$x^2 - 2y^2 = 7$	(5/3)	(3/1)	(3.5/1.75)	(-7/-7)	(2/0.5)	(-1/-2)
$x^2 - 2y^2 = 14$	(8/5)	(4/-1)	(3/1)	(-2/-3)	(4 $\frac{1}{3}$ /2 $\frac{1}{3}$)	(-7/-7)
$x^2 - 2y^2 = 28$	(10/6)	(6/-2)	(4/1)	(-2/-4)	(7/3.5)	(-14/-14)
$x^2 - 2y^2 = 34$	(14/9)	(6/1)	(6.8/3.4)	(-8.5/-8.5)	(5/2)	(-4/-5)
$x^2 - 2y^2 = 98$	(14/7)	(10/-1)	(9 $\frac{1}{2}$ /2 $\frac{1}{2}$)	(-7/-14)	(10.5/3.5)	(-14/-21)
$x^2 - 3y^2 = 6$	(9/5)	(3/-1)	(1.5/0.5)	(-1/-1)	(4/2)	(-6/-4)
$x^2 - 3y^2 = 78$	(15/79)	(9/-1)	(8/2)	(-6/-8)	(9.75/3.25)	(-13/-13)
$x^2 - 3y^2 = 132$	(18/8)	(12/-2)	(10/2)	(-6/-10)	(13.2/4.4)	(-22/-22)
$x^2 - 3y^2 = 132$	(30/16)	(18/-8)	(6/1)	(-2/-4)	(22/11)	(-66/-44)
$x^2 - 3y^2 = 198$	(21/9)	(15/-3)	(12/2)	(-6/-12)	(16.5/5.5)	(-33/-33)
$x^2 - 4y^2 = 180$	(18/6)	(14/2)	(15/3.75)	(-30/-30)	(12/1.5)	(-6/-12)
$x^2 - 4y^2 = 252$	(24/9)	(16/1)	(16.8/4.2)	(-21/-21)	(15/3)	(-12/-15)
$x^2 - 4y^2 = 288$	(22/7)	(18/3)	(19.2/4.8)	(-48/-48)	(15/1.5)	(-6/-15)
$2x^2 - 3y^2 = 15$	(9/7)	(3/-1)	(2/1)	(-1.5/-2)	(3.75/2.5)	(-5/-5)
$2x^2 - 3y^2 = 45$	(12/9)	(6/-3)	(3/1)	(-1.5/-3)	(7.5/5)	(-15/-15)
$2x^2 - 3y^2 = 141$	(18/3)	(12/-7)	(5/1)	(-1.5/-5)	(14.1/9.4)	(-47/-47)
$2x^2 - 3y^2 = 150$	(15/10)	(9/-2)	(7.5/2.5)	(-5/-10)	(10/5)	(-15/-20)
$3x^2 - 2y^2 = 30$	(8/9)	(4/3)	(5/5)	(-10/-15)	(2/1)	(-1/-3)
$3x^2 - 2y^2 = 138$	(15/14)	(10/-9)	(4/1)	(-1/-6)	(11.5/11.5)	(-46/-69)
$4x^2 - 3y^2 = 24$	(9/10)	(3/2)	(4/4)	(-6/-8)	(1.5/1)	(-1/-2)
$4x^2 - 3y^2 = 132$	(15/16)	(9/-8)	(3/1)	(-1/-4)	(11/11)	(-33/-44)
$4x^2 - 3y^2 = 312$	(15/14)	(9/-2)	(8/4)	(6/-16)	(9.75/6.5)	(-13/-26)

Literatur:

- Altshiller-Court, N.: College Geometry. Barnes & Noble Books, New York, 1952.
- Baptist, P.: Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie. B.I. Verlag, Mannheim, 1992.
- Engel, A.: Mathematisches Experimentieren mit dem PC. Klett-Verlag, Stuttgart, 1991.
- Johnson, R.A.: Advanced Euclidian Geometry. Dover Publications, New York, 1960.
- Lode, H.: Rationale Dreiecke und einfache Orthotetraeder in der analytischen Geometrie. In Der Mathematikunterricht 9, 1963.
- Mitsch, H.: Lineare Algebra und Geometrie I und II. Prugg Verlag, Wien 1978.
- Neubrand, M.: Analoga im Tetraeder zu den sogenannten merkwürdigen Punkten des Dreiecks. In Praxis der Mathematik 27 (1985)
- Renner, C.: Planimetrie. Ehrenwirth Verlag, München 1950.
- Schuler, K.: Heronische Dreiecke auf Gitterpunkten. In Der Mathematikunterricht 9, 1963.
- Seebach, K.: Über Schwerpunkte von Dreiecken, Vierecken und Tetraedern. In Didaktik der Mathematik 11(1983) und 12(1984).
- Walter, H.: Rationale und ganzzahlige Elemente in Verbindung mit dem Durchmesserbegriff bei Ellipse und Hyperbel. In Der Mathematikunterricht 9, 1963.

KURVEN: VON DEN KEGELSCHNITTEN DER GRIECHISCHEN ANTIKE ZUR FRAKTALEN GEOMETRIE. EIN BEISPIEL FÜR EINEN LÄNGSSCHNITT

Manfred Kronfellner, Wien

„Dem forschenden Mathematiker erschließt sich neue Mathematik in Form eines Netzwerkes. Wenn er seine neuen Ergebnisse darstellt, dann tut er dies meist in Form einer axiomatisch aufgebauten Theorie. Seine Darstellung ist dann von Linearität geprägt. Wenn der Schüler Mathematik linear dargestellt erhält, wie soll er dann Mathematik selbst entdecken lernen? Immer wieder ist deshalb vorgeschlagen worden, Netzwerke mathematischer Sachverhalte im Unterricht zu erarbeiten. Ein solcher Unterricht kann jedoch in ein unentwirrbares Chaos münden, bei dem die Schüler keinen roten Faden mehr erkennen. Also ist eine gewisse Systematik nötig.“ (Vollrath 1987, S. 374)

Im Mathematikunterricht dominiert die innermathematische Systematik; diese führt zu (Bruchstücken von) solchen linearen Theorien. Um zu einer stärkeren Vernetzung zu gelangen, ist es notwendig, die Dominanz der einen Systematik aufzuweichen und (mindestens) eine weitere Systematik (im Ansatz) zuzulassen bzw. zu verwenden. Eine ähnliche „vertikale Gliederung“ verspricht man sich auch von fundamentalen Ideen. (Vgl. Schweiger 1992, S. 207)

In anderen Schulfächern wird in zunehmendem Maße das Aufweichen der jeweils dominierenden Fachsystematik propagiert: im Geschichtsunterricht etwa soll die dominante chronologische Systematik in vermehrtem Maße durch die Behandlung von **Längsschnitten** ergänzt werden, d. h. durch die Bearbeitung desselben Themas in verschiedenen Zeitepochen. (Vgl. BMUKS 1987b, S. 1!) Im Physikunterricht der 6. Schulstufe lässt man sich – insb. zu Beginn – nicht von einer traditionellen Physik-Systematik einengen, sondern bespricht verschiedenste physikalische Effekte des täglichen Lebens. (Vgl. Lehrplan 1985, S. 218: „Begegnung mit Physik im Alltag“)

In vielen Fächern war auch schon bisher das Verlassen der jeweils dominierenden Systematik unumgänglich (z. B. Musik: Musikgeschichte – Formenlehre, analog Deutsch, u. s. w.)

Auch im Mathematikunterricht, vor allem aber im Wahlpflichtfach oder im Zuge einer Fachbereichsarbeit, besteht die Möglichkeit der Behandlung solcher Längsschnitte (im weitesten Sinn, nicht notwendigerweise nur historische Themen; einige Vorschläge samt Literaturhinweisen siehe Kronfellner 1998, S. 52f). Der nachfolgende Längsschnitt ist eine überarbeitete Fassung von Kronfellner 1998, Kapitel 13 (S. 96ff).

1 Kegelschnitte

Bereits bei den Griechen in der Antike traten Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln auf. Ihre Namen gehen auf Problemstellungen zurück, bei denen Rechtecke in flächengleiche Quadrate verwandelt werden sollen. Solche Fragestellungen sind bereits bei den Babyloniern zu finden und wurden später von Euklid systematisch untersucht (Euklid, S. 135ff; vgl. auch van der Waerden 1966, S. 102ff und S. 198ff). Das Wort parabolé (παράβολή) bedeutete soviel wie "Anlegen", nämlich Anlegen eines flächengleichen Quadrates (y^2) an ein gegebenes Rechteck ($2p \cdot x$). Ellipse kommt von ekleipsis (ἐκλειψις) bzw. elleipsis (ἐλλειψις), was so viel wie

"Weglassung", "Verminderung" bedeutet. Bei der Flächenumwandlung mit Hilfe einer Ellipse muss nämlich das gegebene Rechteck $2p \cdot x$ zuerst um ein kleines Rechteck vermindert werden. Ähnlich liegt der Fall bei der Hyperbel: hyperbolé (ὑπερβολή) bedeutet "Überschuss"; hier muss das Rechteck $2p \cdot x$ zuerst vergrößert werden. (Vgl. Reichel 1991a, S. 120 – 123!)

Parabeln und Hyperbeln traten aber auch beim Versuch auf, das Delische Problem der Würfelverdopplung – also der Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$ – zu lösen. Menaichmos (um 350 v. Chr.) erkannte, dass dieses Problem äquivalent ist zur Ermittlung zweier Zahlen x und y , für die gilt:

$$a : x = x : y = y : b$$

Wählt man $a = 1$ und $b = 2$, so ergibt sich aus

$$1 : x = x : y = y : 2$$

insbesondere $x = \sqrt[3]{2}$. Denn:

$$\begin{aligned} 1 : x = x : y = y : 2 &\Leftrightarrow y = x^2 \wedge y^2 = 2x \Leftrightarrow (x^2)^2 \\ &= 2x \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Die Zahlen x und y nennt man auch "mittlere Proportionale".

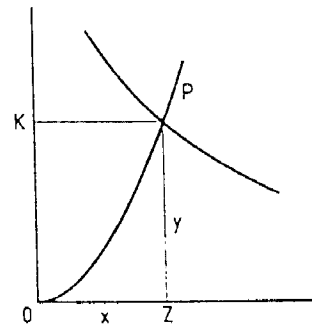


Abb. 1

Es gilt aber auch:

$$1 : x = x : y = y : 2 \Leftrightarrow y = x^2 \wedge xy = 2$$

D.h., die Zahlen x und y sind die Koordinaten des Schnittpunktes der Parabel $y = x^2$ mit der Hyperbel $xy = 2$.

Die Griechen kannten natürlich noch keine Koordinaten in unserem Sinn. Sie gaben Kurven durch sogenannte "Symptome" an. Darunter versteht man eine Bedingung, durch die ein auf der Kurve liegender Punkt charakterisiert ist. Diese Symptome entsprechen inhaltlich in etwa unseren Kurvengleichungen.

Menaichmos stellte sich Kegelschnitte als Schnitte eines Kegels mit einer zu einer Erzeugenden normalen Ebene vor. Durch entsprechende Wahl des Öffnungswinkels α des Kegels erreichte er entweder eine Parabel (für $\alpha=90^\circ$), eine Hyperbel (genauer: einen Hyperbelast; für $\alpha>90^\circ$) oder eine Ellipse (für $\alpha<90^\circ$). Erst Apollonios von Perge (262? – 190? v. Chr.) ging in seinem Werk "Konika", einer systematischen Untersuchung der Kegelschnitte in 8 Büchern, dazu über, einen Kegel mit festem Öffnungswinkel mit Ebenen verschiedener Neigung zu schneiden, um alle möglichen Kegelschnitte zu erhalten.

Zur Lösung der "drei klassischen Probleme der Antike" (das sind die Würfelverdopplung, die Winkeldreiteilung und die Quadratur des Kreises) erdachten die Griechen verschiedene Methoden, auch mechanische Hilfsmittel bzw. Geräte. (Vgl. Kaiser/Nöbauer, S. 130 – 151!) Auch Platon wird die Erfindung eines Gerätes zur Ermittlung der mittleren Proportionalen zugeschrieben. (Vgl. Bretschneider 1870, S. 141!) Deshalb ist es auch umso überraschender, dass Platon andere Mathematiker wegen der Verwendung solcher Methoden tadelte; nach

Plutarch soll Platon gesagt haben: "... denn auf solche Art werde der Vorzug der Geometrie aufgehoben und verdorben ..." (Zitiert nach Bretschneider 1870, S. 143.) Platon wollte nur Methoden zulassen, die man später als "Konstruktion mit Zirkel und Lineal" bezeichnete. (Vgl. Kaiser/Nöbauer 1984, S. 130 ff, oder Radbruch 1989, S. 151!)

Warum gerade diese Instrumente und nicht auch eines jener anderen Geräte, die zur Lösung dieser Probleme erdacht wurden?

Die Beschränkung auf Zirkel und Lineal, die sogenannten "Euklidischen Werkzeuge", leitet sich aus den Postulaten ab, die am Anfang der Elemente des Euklid stehen:

"Gefordert soll sein:

1. Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
2. Dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend verlängern kann,
3. Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.
4. ...

(Euklid, S. 2)

Alles was mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, ist auch aus den Axiomen und Postulaten der Geometrie beweisbar und stellt daher "gesicherte Erkenntnis" dar, gefeit vor Angriffen von Skeptikern und Sophisten.

Dennoch beschäftigten sich in der Folge die griechischen Mathematiker immer wieder auch mit Kurven, die nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar waren.

Die drei klassischen Probleme der Antike beschäftigten sogar Mathematiker bis ins vorige Jahrhundert; erst in dieser Zeit konnte allgemein mit algebraischen Mitteln gezeigt werden, dass diese drei Probleme nicht mit Zirkel und Lineal lösbar sind.

2 Die Cissoide

Diokles, ein Zeitgenosse des Apollonios, entdeckte eine Kurve, die ebenfalls zur Lösung des Delischen Problems verwendet werden kann. Allgemein kann eine Cissoide auf folgende Weise definiert werden:

Es sei O ein fester Punkt und C, D seien zwei Kurven. (In unserem Falle der "Cissoide des Diokles" ist C ein Kreis mit dem Radius r und D eine Gerade.) Legt man durch O eine beliebige Gerade g, so erhält man einen Cissoidenpunkt P durch die Bedingung:

$$\overline{OP} = \overline{P_1P_2}$$

wobei $P_1 \in C$ und $P_2 \in D$ Schnittpunkte der Geraden g mit den Kurven C und D sind. (Siehe Abb. 2!)

Die Gestalt dieser Kurve erinnert – mit einiger Phantasie – an ein Efeublatt; daher auch der Name: Cissoide kommt von kissos (κισσός), Efeu.

Zur Bestimmung der mittleren Proportionalen gehen wir folgendermaßen vor:

Wir errichten im Mittelpunkt Z des Kreises C das Lot auf den Durchmesser \overline{OA} und tragen auf diesem Lot die Strecke $\frac{1}{2} \cdot r = \overline{ZM}$ auf.

Dann gilt für jenen Cissoidenpunkt P, der auf der Verlängerung der Geraden durch A und M liegt:

$$\frac{a}{\overline{LP}} = \frac{r}{\frac{1}{2} \cdot r} = 2, \text{ also } \overline{LP} = \frac{a}{2}$$

Wir wollen nun zeigen, dass $x = \overline{OL}$ und $y = \overline{LS}$ die gesuchten mittleren Proportionalen sind. Auf Grund der Konstruktionsvorschrift der Cissoide gilt $\overline{OP} = \overline{P_1P_2}$ und damit $\overline{AT} = \overline{OL}$ bzw. $\overline{AL} = \overline{OT}$. Damit gilt:

$$\triangle OLP \sim \triangle OTP_1 = \triangle ALS \sim \triangle SLO$$

Daraus folgt:

$$\overline{LP} : \overline{OL} = \overline{OL} : \overline{LS} = \overline{LS} : \overline{AL}$$

oder:

$$\frac{a}{2} : x = x : y = y : a$$

Weiteres über die Cissoide siehe Oettinger 1985!

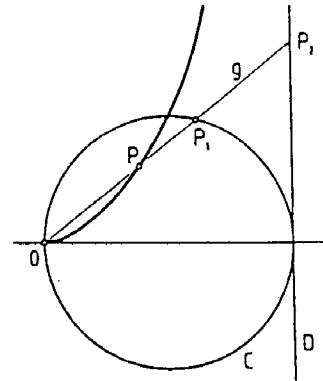


Abb. 2

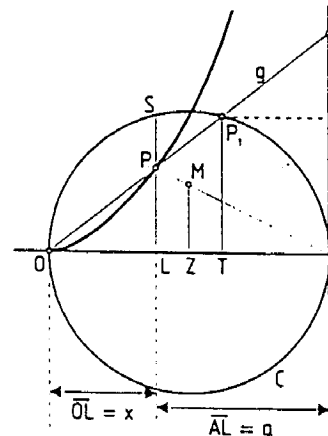


Abb. 3

3 Die Konchoide

Beim Versuch, das Problem der Winkeldreiteilung zu lösen, stieß man in der Antike auf die Konchoide. Diese ist folgendermaßen definiert: Es sei C eine gegebene Kurve. (In unserem speziellen Fall wählen wir für C eine Gerade; man spricht dann von einer "Geradenkonchoide".) Weiters sei O ein fester Punkt (der "Pol") und $k > 0$ ein konstanter Wert. Legt man eine beliebige Gerade durch O und trägt man vom Schnittpunkt von g mit C den Wert k nach beiden Seiten ab, so erhält man zwei Punkte. Die Menge aller so konstruierten Punkte bilden die (beiden Äste der) Konchoide.

Auch bei dieser Kurve leite sich der Name von der Gestalt ab: sie erinnert an die einer Muschel, und "Muschel" heißt auf griechisch kónche (κόγχη). (In Abb. 4 ist k kleiner als der Abstand von O zu c . Ist k größer als dieser Abstand, so ergibt sich insbesondere bei dem durch den Pol verlaufenden Ast der Konchoide ein etwas anderes Aussehen. (Vgl. Abb. 6!)

Um zu sehen, wie die Konchoide zur Winkeldreiteilung verwendet werden kann, betrachten wir folgende Skizze (Abb. 5):

Gegeben ist der Winkel $\sphericalangle ABC$. Wir zeichnen das Lot von A auf die Gerade BC und eine Parallele zu BC durch A . Auf dieser Parallelen ermitteln wir einen Punkt F so, dass gilt: $\overline{EF} = 2\overline{BA}$. (Vgl. Abb.5!) Weiters sei G der Halbierungspunkt der Strecke $[E,F]$. Dann gilt:

$$\overline{EG} = \overline{GF} = \overline{GA} = \overline{BA}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABG &= \sphericalangle AGB = \sphericalangle FAG + \sphericalangle GAF = \\ &= 2 \cdot \sphericalangle GFA = 2 \cdot \sphericalangle GBC \end{aligned}$$

und somit:

$$\sphericalangle ABC = 3 \cdot \sphericalangle GBC$$

Das Problem ist dabei "nur": Wie erhält man den Punkt F bzw. die Gerade BF ? Eine Möglichkeit besteht im "Anpassen" eines mit der Länge $2 \cdot \overline{BA}$ markierten Lineals. Man kann aber auch eine Konchoide verwenden. Wir zeichnen einen Kreis mit Mittelpunkt A und Radius \overline{AB} . Außerdem zeichnen wir eine Konchoide mit dem Pol B , mit der Geraden c und dem Wert $k = \overline{AB}$. Ein Schnittpunkt der Konchoide mit dem Kreis ist der Punkt G . Genauso wie zuvor zeigt man nun, dass gilt:

$$\sphericalangle GBC = 3 \cdot \sphericalangle ABC$$

Die Konchoide kann darüber hinaus auch zur Lösung des Problems der Würfelverdoppelung verwendet werden. Weitere interessante Details zur Konchoide siehe Oettinger 1984!

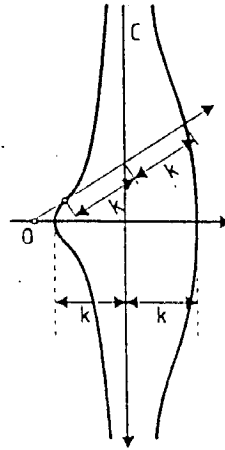


Abb. 4

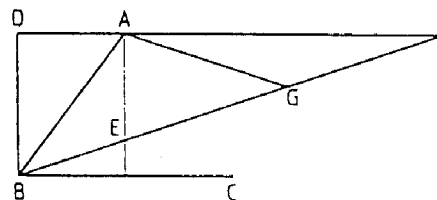


Abb. 5

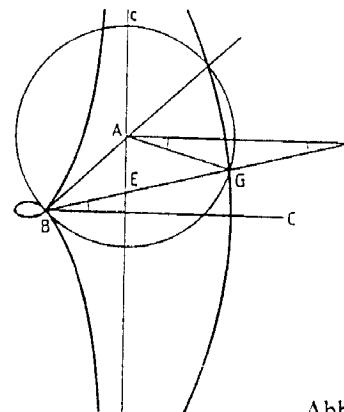


Abb. 6

4 Die Quadratrix

Bei den zahllosen Versuchen, das Problem der Quadratur des Kreises zu lösen (d.h. aus dem Radius eines Kreises die Seite eines flächengleichen Quadrats zu konstruieren), stießen die Griechen unter anderem auf die Quadratrix. Diese kann man sich folgendermaßen entstanden denken:

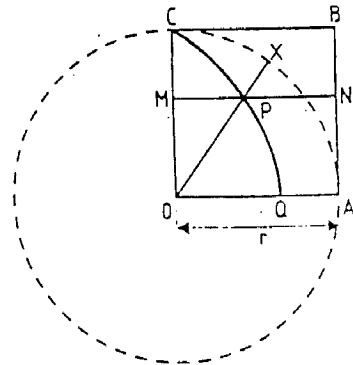


Abb. 7

Einem Quadrat OABC ist ein Viertelkreis mit dem Mittelpunkt O und Radius $r = \overline{OA}$

eingeschrieben. Der Radiusvektor \vec{OX} drehe sich gleichförmig von OC nach OA, und die Gerade MN bewege sich in demselben Zeitraum gleichförmig von CB nach OA. Die Quadratrix ist dann die Menge aller Schnittpunkte von OX mit MN.

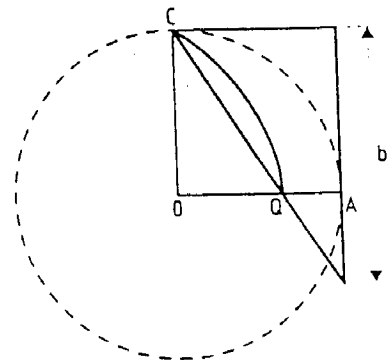


Abb. 8

Man kann zeigen, dass für die Länge des Viertelkreisbogens b durch C, X und A gilt:

$$\frac{b}{CO} = \frac{CO}{OQ}$$

D.h.:

$$\frac{b}{r} = \frac{r}{OQ}$$

(Der Beweis ist etwas langwierig; vgl. Kaiser/Nöbauer 1984, S. 143.)

Diese Beziehung gestattet nun, aus der Länge der Strecke [O,Q] eine Strecke mit der Länge b zu konstruieren (Abb. 8), woraus wieder mit Hilfe des Höhensatzes (Abb. 9;

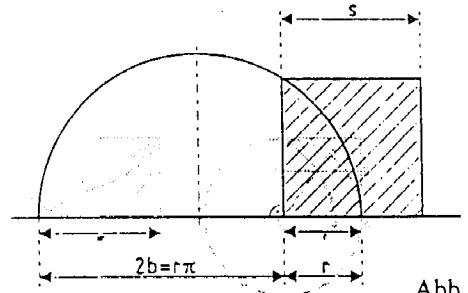


Abb. 9

verkleinert) die gesuchte Seite jenes Quadrats ermittelt werden kann, dessen Flächeninhalt gleich dem des Kreises mit dem gegebenen Radius r ist.

Die Archimedische Spirale

Auch die Archimedische Spirale kann zur Lösung des Problems der Quadratur des Kreises verwendet werden. Eine Archimedische Spirale entsteht, wenn eine Halbgerade mit Anfangspunkt O gleichförmig um O gedreht wird und sich gleichzeitig ein Punkt P auf der Geraden gleichförmig von O aus wegbewegt.

In Polarkoordinaten kann eine Archimedische Spirale mit Hilfe der Gleichung $r = a \cdot \Theta$, $a \in \mathbb{R}$, konstant, beschrieben werden.

Um die Archimedische Spirale zur Lösung des Quadraturproblems verwenden zu können, überlegt man folgendermaßen: Man wählt jenen Punkt Q auf der Spirale, der dem Polarwinkel $\Theta = \frac{\pi}{2}$ entspricht.

Dann gilt: $\overline{OQ} = a \cdot \frac{\pi}{2}$

Wählt man nun auf der waagrechten Geraden durch O einen Punkt R derart, dass $\overline{OR} = 2 \cdot a$, so besitzt das Rechteck ORSQ den Flächeninhalt:

$$A = 2a \cdot a \cdot \frac{\pi}{2} = a^2 \pi$$

Weitere Anregungen zu diesen und ähnlichen Kurven bietet die „Kurvenseite von Th. Weth“ im Internet, wo auch weitere Links sowie Literaturhinweise zu finden sind.

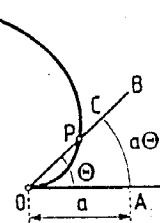


Abb. 10

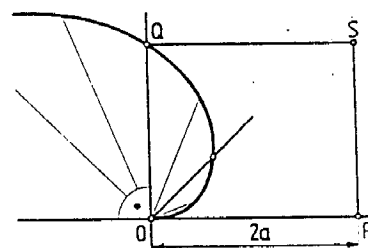


Abb. 11

6 Kurven als geometrische Veranschaulichung von Abhängigkeiten zwischen Größen

Waren bei den Griechen in der Antike die Kurven von primärem Interesse und die Symptome im wesentlichen nur Mittel zur Beschreibung bzw. Charakterisierung der Kurven, so war bei Nicole Oresme (1320? – 1383?) und späteren Mathematikern die Abhängigkeit selbst von Interesse, während die graphische Darstellung eher die logisch nachgeordnete Rolle einer Veranschaulichung spielte. Diese Sichtweise führte in den folgenden Jahrhunderten zur Herausbildung des Funktionsbegriffs im 17. Jahrhundert.

7 Variable und Formeln

Die Einführung von Variablen durch F. Viète zu Ende des 16. Jahrhunderts ermöglichte die Darstellung von Abhängigkeiten – und von Kurven – durch Gleichungen. Auf dieser grundlegenden Idee aufbauend entwickelte R. Descartes in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts die analytische Geometrie.

Insbesondere anhand algebraischer Gleichungen und den entsprechenden Kurven bildeten sich Anfang bis Mitte des 17. Jahrhunderts die Vorstufen zur Differential- und Integralrechnung aus, die dann von Newton und Leibniz in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts zu einer einheitlichen Methode ausgebaut wurde.

8 Kurven als physikalische Bahnen

Der Aufschwung der Physik und der Astronomie zu Beginn der Renaissance brachte es auch mit sich, dass Bewegungsvorgänge studiert und zu ihrer Beschreibung Kurven verwendet wurden. Kepler erkannte, dass die Planetenbahnen Ellipsen sind, und konnte dabei auf das rund 2000 Jahre davor von Menaichmos und vor allem Apollonios geschaffene Wissen aufbauen. Auch die Untersuchung von Geschosßbahnen führte zu einer intensiven Beschäftigung mit solchen Kurven. Neben diesen algebraischen Kurven interessierte man sich insbesondere für die Rollkurve, die Zykloide, auf die Ch. Huygens bei seinen Überlegungen, ganggenaue Uhren zu konstruieren, stieß und die dann in der Folge von ihm und vor allem von Leibniz eingehend untersucht wurde.

9 Funktionen als Darstellungsmittel und Untersuchungsobjekt der Analysis

Die Entwicklung des Calculus einerseits und die explizite Einführung des Funktionsbegriffs andererseits etablieren diesen als einen der zentralsten Begriffe der gesamten Mathematik. Der Ausbau der Differential- und Integralrechnung führte auch zu einem Ausbau der Funktionenlehre und lieferte eine große Zahl neuer Kurven (z.B. als Lösungskurven von Differentialgleichungen).

10 Funktionen als Gegenbeispiele

Im Zuge der Exaktifizierung der Analysis und der Herausbildung der Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit erfanden die Mathematiker "bizarre" Funktionen, um die Grenzen dieser Begriffe abzustecken; zum Beispiel:

- die Dirichletsche Sprungfunktion

$$di(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

als Beispiel einer nirgends stetigen Funktion, und

- das Weierstraßsche "Monster"

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cdot \cos(a^n \pi x) \quad (a \in \mathbb{N}, \text{ungerade}, b \in]0,1[, a \cdot b > 1 + \frac{3\pi}{2})$$

als ein Beispiel einer überall stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion. (Vgl. Volkert 1992, S. 74, Hewitt/Stromberg 1969, S. 258)

Die Bizarrheit dieser Funktionen äußert sich vor allem darin, dass sie sich einer einigermaßen adäquaten geometrischen Darstellung als "Kurve" – und damit auch der Anschauung – entziehen. Für viele Mathematiker war die Existenz solcher Funktionen ein Schock. Charles Hermite schrieb 1893 in einem Brief an Thomas Jan Stieltjes:

"Ich wende mich mit Entsetzen und Schrecken ab von dieser bejammernswerten Plage von Funktionen, die überhaupt keine Ableitung besitzen."

(Zitiert nach Rüthing 1986, S. 15)

Hermite versuchte auch Henry Lebesgue daran zu hindern, eine Arbeit über nicht differenzierbare Flächen zu publizieren. Später schrieb Lebesgue über Hermites Zurückweisung seiner Arbeit:

"Er muss gedacht haben, dass diejenigen, die sich in diese Untersuchung vergraben, ihre Zeit verschwenden, statt sie nützlicher Forschung zu widmen."

Und er sagte auch:

"Für viele Mathematiker wurde ich derjenige mit den Funktionen ohne Ableitung. Und da Hermites Furcht und Schrecken von fast jedem geteilt wurden, so würde bei jeder mathematischen Diskussion, an der ich teilzunehmen suchte, ein Analytiker existieren, der sagt: "Dies wird Sie nicht interessieren; wir diskutieren über Funktionen, die Ableitungen besitzen."

(Stewart 1990, S. 229)

Es stellte sich sogar heraus, dass die differenzierbaren Funktionen sogar die "Ausnahmen" unter den stetigen Funktionen sind. (Genauer: Sie bilden in der Menge der auf einem kompakten Intervall stetigen Funktionen eine Teilmenge von erster Kategorie, das ist eine Menge, die eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Teilmengen ist. Vgl. etwa Hewitt/Stromberg 1969, S. 68 und 260.)

11 Peanokurven

Die Frage, ob jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion rektifizierbar ist, d.h. eine endliche Bogenlänge besitzt, führte auf eine andere Art von Monster: Die Peanokurve ist ein Beispiel einer auf $[0;1]$ stetigen Kurve, die durch jeden Punkt des Einheitsquadrats geht, d.h. das Einheitsquadrat vollständig ausf llt. (Vgl. Peano 1890; siehe auch Kranzer 1989, S. 96 - 98; Volkert 1992, S.73) Eine weitere Kurve dieser Art ist die "Hilbert-Kurve" (Hilbert 1891)

12 Die Diracsche Deltafunktion

Der Versuch, ein mathematisches Modell eines (unendlich kleinen) Massenpunktes mit der Masse $m > 0$ bzw. einer Punktladung, eines (nur eine "unendlich kurze Zeit" dauernden) Kraftsto es o. . zu bilden, führte zur Diracschen Deltafunktion. Solange der Masse (o.B.d.A.: $m=1$) eine Ausdehnung > 0 zugeschrieben wird, kann sie durch folgende Massenverteilungsfunktion beschrieben werden:

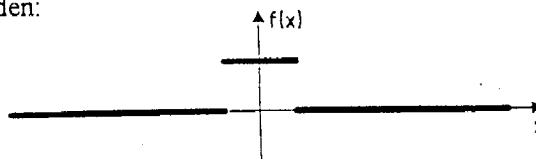


Abb. 12

Dabei gilt:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Lässt man nun bei unverändertem Wert m (d.h. unter Beibehaltung der obigen Gleichung) die Ausdehnung der Masse gegen 0 streben (also zum Massenpunkt werden), so geht f über in die "Funktion" δ mit:

$$\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \neq 0 \\ \infty, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

(Vgl. Rüthing 1986, S. 21f.)

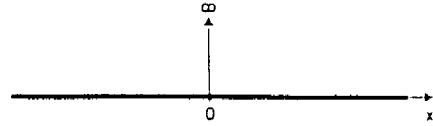


Abb. 13

13 Kochkurve; Fraktale

Wenn man über dem mittleren Drittel einer Strecke ein gleichseitiges Dreieck errichtet und die Basis entfernt, erhält man:



Abb. 14

Führt man nun dasselbe Prinzip bei jeder der vier Teilstrecken durch, bei der entstehenden Figur wieder usw. so erhält man eine "Kurve", die man nach Helge von Koch als Kochsche Kurve bezeichnet. (Koch 1904 und 1906) Sie ist eine überall stetige, aber nirgends differenzierbare Kurve.



Abb. 15

Startet man statt mit einer Strecke mit einem gleichseitigen Dreieck, so ergibt sich nach diesem Verfahren die "Schneeflockenkurve" (Abb. 16). Sie stellt ein Beispiel einer geschlossenen Kurve mit unendlicher Länge dar, die aber eine Fläche von endlichem Inhalt umschließt.

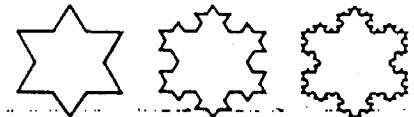


Abb. 16

Die Koch-Kurve ist eines der ersten Beispiele eines Fraktals. Obwohl schon zu Beginn unseres Jahrhunderts theoretisch erdacht, erfuhren sie Interesse und Verbreitung erst nach der Verfügbarkeit eines adäquaten Repräsentationsmittels bzw. Werkzeugs: des Computers. Ähnliches gilt für Julia-Mengen, Cantorsches Diskontinuum (Cantor 1883), Sierpinski-Dreieck (Sierpinski 1916), Mengerschwamm (Vgl. Götz/Reichel 1990), Chaostheorie, u.a.

Begünstigt durch die weite Verbreitung von Computern und eine große Zahl (auch allgemeinverständlicher) Bücher sind Fraktale heute weit über die Mathematik hinaus verbreitet. Sie haben einerseits Eingang in die Kunst gefunden, andererseits könnten sie auch zu einem Paradigma der Naturwissenschaften werden, da man auch in der Natur fraktale Strukturen zu erkennen glaubt. (Vgl. Devlin 1990, S. 91 – 118.)

14 Einige abschließende Bemerkungen

Der Streifzug zeigt, dass mathematische Objekte verschiedene Aspekte besitzen, die in verschiedenen Epochen von unterschiedlicher Bedeutung sein können. Ein solcher Bedeutungswandel ist meist auf den Einfluss von Entwicklungen in solchen Bereichen zurückzuführen, die bis dahin nicht unmittelbar zu dem betreffenden Gebiet gehörten. Durch

die Einführung der Variablen und die daraus resultierende Möglichkeit der Beschreibung von Kurven durch Gleichungen bzw. analytische Ausdrücke wird der geometrische Aspekt im wesentlichen auf die Rolle der Veranschaulichung reduziert (zumindest in der Analysis; in der analytischen Geometrie bleiben algebraischer und geometrischer Aspekt "gleichberechtigt"). Die weitere Entwicklung der Analysis im 19. Jahrhundert zeigt schließlich die Grenzen des geometrischen Kurvenbegriffs – und die Grenzen der Anschauung – auf. Der mengentheoretische Funktionsbegriff trägt über die geometrische Vorstellung hinaus. Dennoch wird der Kurvenbegriff nicht obsolet: Da der Funktionsbegriff in gewissem Sinne sogar zu weit trägt, sind Abgrenzungseigenschaften vonnöten; diese sind nicht selten durch den geometrischen Aspekt motiviert (Stetigkeit, Glattheit, Zusammenhang, u.ä.) Abseits davon erlebt der Kurvenbegriff in der Fraktalen Geometrie eine interessante und faszinierende Renaissance und Verallgemeinerung.

Am Beispiel der Kurve kann man auch die Bedeutung der Mittel, d.h. der Repräsentationsform für die Entwicklung der Mathematik erkennen. Durch die Einführung der Variablen war es einfach, ja in gewisser Weise sogar naheliegend, ausgehend von den Kegelschnitten – nunmehr als algebraische Kurven zweiten Grades erkannt – zu beliebigen algebraischen Kurven überzugehen. Dieser Schritt wäre für die Griechen mit ihrer rein geometrischen Repräsentation nur schwer vorstellbar.

Entwicklungen in der Mathematik gehen meist nicht gleichmäßig vonstatten, sondern sprunghaft. Dabei spielt die Verfügbarkeit von Mitteln, insbesondere neuer Mittel, oft eine große Rolle. (Vgl. R. Fischer 1988!) Ein erster "Quantensprung" auf dem Gebiet der Kurven ergab sich durch das Mittel "Variable", d.h. durch die Möglichkeit der Beschreibung von Kurven durch Gleichungen. Der zweite Quantensprung wurde durch den Computer ermöglicht: die rasche Ausführung rechenintensiver Iterationen erweckte Kochkurve, Hilbertkurve, Julia-Mengen u.ä. aus einem jahrzehntelangen Dornröschenschlaf. Nicht die Idee allein, sondern auch die Möglichkeiten der Repräsentation, der Realisierung und der Verbreitung sind in der Wissenschaftsentwicklung von entscheidender Bedeutung.

Literatur

- BMUKS (Hrsg.): Handreichungen Geschichte und Sozialkunde, Heft 15, Klagenfurt, Oktober 1987b
- Bretschneider, C. A.: Geometrie und die Geometer vor Euklides. Ein historischer Versuch
B. G. Teubner, Leipzig 1870
- Cantor, G.: Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten V
Math. Annalen 21 (1883), S. 545 – 591
- Devlin, K.: Sternstunden der modernen Mathematik
Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin 1990
- Euklid: Die Elemente. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und
herausgegeben von Clemens Thaer
Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1980
- Fischer, R.: Mittel und System. Zur sozialen Relevanz der Mathematik
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 1988, Heft 1, S. 20 – 28

- Götz, S., Reichel, H. Ch.: Fraktale Dimensionen – Über das Titelbild des Oberstufenlehrbuches Reichel-Müller-Laub
Didaktik-Reihe der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Heft 18, Oktober 1990, S. 124 – 142
- Hewitt, E., Stromberg, K.: Real and Abstract Analysis
Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1969
- Hilbert, D.: Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück
Math. Annalen 38 (1891), S. 459 – 560
- Kaiser, H., Nöbauer, W.: Geschichte der Mathematik
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1984
- Koch, H. v.: Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire
Arkiv för Matematik 1 (1904), S. 681 – 704
- Koch, H. v.: Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes
Acta Mathematica 30 (1906), S. 145 – 174
- Kranzer, W.: So interessant ist Mathematik
Aulis-Verlag Deubner & Co, Köln 1989
- Kronfellner, M.: Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unerrichtsspezifischen Beispielen.
Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1998
- Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schule – Unterstufe Österreichischer Bundesverlag, Wien, Jugend und Volk, Wien, 1985
- Oettinger, E. (Hrsg.): Winkeldritteln und Konchoide
mathe-plus 1, Oktober 1984, S. 8 – 12
- Oettinger, E. (Hrsg.): Die Zissoide oder "Efeuartige"
mathe-plus 3, Februar 1985, S. 4 – 7
- Peano, G.: Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane
Math. Annalen 36 (1890), S. 157 – 160
- Radbruch, K.: Mathematik in den Geisteswissenschaften
Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1989
- Reichel, H.-Ch.: Wie Ellipse, Hyperbel und Parabel zu ihrem Namen kamen und einige allgemeine Bemerkungen zum Thema "Kegelschnitte" im Unterricht
Didaktik der Mathematik 2, 1991a, S. 111 – 130
- Rüthing, G.: Einige historische Stationen zum Funktionsbegriff
Der Mathematikunterricht 1986, Heft 6, S. 4 – 25
- Schweiger, F.: Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik
Journal für Mathematikdidaktik 13 (1992), Heft 2/3, S. 199 – 214
- Sierpinski, W.: Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée
C. R. Acad. Paris 162 (1916), S. 629 – 632
- Stewart, I.: Mathematik. Probleme – Themen – Fragen
Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1990
- Volkert, K.: Anschauung und Formalismus in der Mathematik
Spektrum der Wissenschaft, März 1992, S. 72 – 80

Vollrath, H. J.: Störungen des "didaktischen Gleichgewichts" im Mathematikunterricht
Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 40/6 (1987), S. 373 – 378

van der Waerden, B. L.: Erwachende Wissenschaft
Birkhäuser, Basel, Stuttgart 1966 (2. Auflage)

Wagenschein, M.: Pädagogische Aufsätze zum mathematischen Unterricht
(hrsg. von E. Löffler) Der Mathematikunterricht 8 (1962), Heft 4

Günther Malle, Universität Wien

WAS IST EIN VEKTOR? - ANTWORTEN AUS DER GESCHICHTE DER MATHEMATIK

1. Intuitive Vorideen zur Vektorrechnung

Die Idee des Kräfteparallelogramms (bzw. Geschwindigkeitsparallelogramms) findet sich schon in der Antike. Man findet sie in der sog. „Pseudo-Aristotelischen Mechanica“, bei ARCHIMEDES und bei HERON. Über den späteren Gebrauch solcher Parallelogramme ist wenig bekannt, im 16. und 17. Jahrhundert dürften sie jedoch gängig gewesen sein. Galileo GALILEI (1564 - 1642) war anscheinend der erste, der die Parallelogrammregel *expressis verbis* formulierte.

Dabei ist zu beachten, daß die Kräfte bzw. Geschwindigkeiten noch nicht als spezielle Vektoren angesehen wurden und die Zusammensetzung von Kräften bzw. Geschwindigkeiten noch nicht als Addition von Vektoren. Es lag also noch keine Vektorrechnung im heutigen Sinn vor.

Die Methoden der antiken Geometrie und Physik reichten jedoch bald nicht mehr aus. Die physikalischen Probleme änderten sich so, daß immer deutlicher wurde, daß manche physikalische Größen nicht nur durch einen Betrag allein charakterisiert werden können, sondern daß zu ihrer Angabe auch eine Richtung benötigt wird. Man denke etwa an die drei Grundgesetze der Mechanik, die Isaac NEWTON (1642 - 1727) in seiner *Philosophiae naturalis Principia Mathematica* formuliert hat. In diesen ist die Rede von Kräften, Geschwindigkeiten, Impulsen und Beschleunigungen, also Größen, die wir heute als Vektoren bezeichnen würden. Diese Entwicklung setzte sich bis ins 19. Jahrhundert fort. Der physikalische Raum wurde geradezu mit Vektoren vollgestopft. Dies mußte schon frühzeitig ein Bedürfnis nach einem geeigneten Formalismus für solche Größen geweckt haben.

Eine Vision dieses Formalismus finden wir bei Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 - 1716). LEIBNIZ war ja ein großer Visionär, der viele Dinge vorausgesehen hat (man denke etwa an seine Vision einer Rechenmaschine oder einer mathematischen Universalsprache). Es ist weniger bekannt, daß LEIBNIZ auch die Vektorrechnung vorausgesehen hat. In einem Brief an Christian HUYGENS schreibt er (in einer von mir vorgenommenen deutschen Übersetzung):

Ich bin mit der Algebra noch nicht zufrieden, weil sie nicht die kürzesten Methoden oder schönsten Konstruktionen in der Geometrie liefert. Deshalb glaube ich, soweit es die Geometrie betrifft, daß wir eine andere Analysis brauchen, die ausdrücklich geometrisch oder linear ist und die eine Lage direkt ausdrückt wie die Algebra einen Betrag ausdrückt. Und ich glaube, daß ich den Weg gefunden habe und daß wir Figuren, ja sogar Maschinen und Bewegungen durch Symbole so ausdrücken können, wie die Algebra Zahlen oder Beträge präsentiert.

LEIBNIZ sandte HUGYENS in diesem Brief einen Aufsatz, in dem er schrieb:

Ich habe gewisse Elemente einer neuen Sprache gefunden, die von der Algebra grundverschieden ist und die große Vorteile aufweist, indem sie dem Geist ... auch ohne Figuren alles repräsentiert, was auf sinnlicher Wahrnehmung beruht. Algebra ist lediglich die Sprache für unbestimmte Zahlen und Beträge, aber sie drückt nicht Lage, Winkel und Bewegung direkt aus. Daher ist es oft schwierig, die Eigenschaften einer Figur durch Rechnung zu analysieren, und noch schwieriger ist es, bequeme geometrische Beweise und Konstruktionen zu finden ... Aber diese neue Sprache... kann nicht fehlgehen, die Lösung, die Konstruktion und den geometrischen Beweis zur gleichen Zeit zu geben Aber ihr hauptsächlichster Wert liegt im Denken, das damit ausgeführt werden kann, sowie in den Schlüssen, die durch Operationen mit ihren Zeichen gezogen werden können und die nicht durch Figuren ... ausgedrückt werden können, ohne diese zu sehr anzuhäufen oder mit zu vielen Punkten und Geraden zu verwirren, die zu zeichnen man im Verlauf der vielen flüchtigen Versuche gezwungen ist.

Was LEIBNIZ jedoch im Gegensatz zu dieser großartigen Vision tatsächlich anzubieten hat, ist vergleichsweise dürftig. In seiner *Analysis situs* (Geometrie der Lage) entwickelt er ein System, das auf der Kongruenz von Figuren beruht und mit der heutigen Vektorrechnung so gut wie nichts gemeinsam hat. Trotzdem ist diese *Analysis situs* von historischer Bedeutung, weil von ihr starke Anregungen ausgingen. Die Jablonowskische Gesellschaft (eine damalige Mathematikervereinigung) schrieb einen Preis aus, der demjenigen gebühren sollte, dem es gelingt, das LEIBNIZsche System in eine Form zu bringen, die für die Geometrie und Physik brauchbar ist. Der Gewinner dieses Preises war ein deutscher Gymnasiallehrer, Hermann Günther GRASSMANN, über den wir noch sprechen werden.

2. Die Entwicklung erster vektorieller Systeme

2.1 Caspar WESSEL (1745-1818) und andere – Vektor als ortsgebundene gerichtete Strecke bzw. formaler Ausdruck der Form $x + \eta y + \varepsilon z$

Der Versuch, die komplexen Zahlen geometrisch zu deuten, hatte großen Einfluß auf die Entwicklung vektorieller Systeme. Es ist bekannt, daß an dieser geometrischen Deutung mehrere Mathematiker beteiligt waren, exemplarisch sei jedoch nur der Beitrag von WESSEL besprochen. Zunächst sei jedoch hervorgehoben, daß das vordringliche Interesse dieser Mathematiker nicht der Existenzsicherung der damals noch dubiosen komplexen Zahlen galt -wie dies heute oft fälschlich dargestellt wird -, sondern der Suche nach einem geeigneten Werkzeug für die Geometrie und die Physik, also die Suche nach einer geeigneten Vektorrechnung (in der LEIBNIZschen Tradition). Der Wunsch nach einem solchen Werkzeug war so stark, daß dafür sogar die dubiosen komplexen Zahlen erhalten mußten. Daß durch die geometrische Deutung die Dubiosität der komplexen Zahlen gemildert wurde, war ein angenehmer Nebeneffekt, aber nicht die Hauptsache.

WESSEL kennt zwei Darstellungen von komplexen Zahlen, nämlich $a + \varepsilon b$ und $r(\cos \nu + \varepsilon \cdot \sin \nu)$ wobei ε dem späteren i entspricht. Er deutet komplexe Zahlen in der bekannten Weise durch gerichtete Strecken, die vom Ursprung eines ebenen Koordinatensystems ausgehen. Er definiert dann eine Addition, Subtraktion und skalare Vervielfachung von gerichteten Strecken, ebenfalls auf die bekannte Weise.

WESSEL definiert auch ein Produkt für komplexe Zahlen, indem er die Produkte der Einheiten festsetzt:

$$\begin{aligned} (+1)(+1) &= +1; & (+1)(-1) &= -1; & (-1)(-1) &= +1; & (+1)(+\varepsilon) &= +\varepsilon; & (+1)(-\varepsilon) &= -\varepsilon \\ (-1)(+\varepsilon) &= -\varepsilon; & (-1)(-\varepsilon) &= +\varepsilon; & (+\varepsilon)(+\varepsilon) &= -1; & (+\varepsilon)(-\varepsilon) &= +1; & (-\varepsilon)(-\varepsilon) &= -1 \end{aligned}$$

Das Produkt $(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d)$ zweier beliebiger komplexer Zahlen kann dann berechnet werden, indem man die beiden Klammern nach den üblichen Rechenregeln ausmultipliziert und dabei die obigen Festsetzungen für die Produkte der Einheiten benutzt. WESSEL deutet dieses Produkt geometrisch auf die bekannte Weise und definiert damit ein Produkt zweier gerichteter Strecken: Das Produkt zweier gerichteter Strecken ist eine gerichtete Strecke, deren Länge das Produkt der beiden Ausgangslängen und deren Neigungswinkel die Summe der beiden Ausgangsneigungswinkel ist. Er führt auch eine Division von Strecken ein.

Dann geht WESSEL daran, die komplexen Zahlen und deren geometrische Deutung auf den Raum zu übertragen. Dabei liegt nichts näher, als neben den Einheiten 1 und ε eine dritte Einheit η anzunehmen und „Zahlen“ der Form $a + \eta b + \varepsilon c$ zu betrachten (WESSEL wählt diese Reihenfolge). Er deutet diese Zahlen als gerichtete Strecken, die vom Ursprung eines räumlichen Koordinatensystems ausgehen. Es bereitet ihm keine Schwierigkeiten, die geometrischen Deutungen der Addition, Subtraktion und skalaren Vervielfachung komplexer Zahlen auf diese neuen Zahlen auszuweiten und damit entsprechende Operationen für gerichtete Strecken im Raum zu definieren. Bei der Definition des Produktes dieser Zahlen stößt er jedoch auf eine unerwartete Schwierigkeit. Zwar setzt er in Analogie zu den komplexen Zahlen $\eta\eta = \varepsilon\varepsilon = -1$, aber er findet keine Festsetzungen für $\eta\varepsilon$ und $\varepsilon\eta$, die so geartet sind, daß alle für komplexe Zahlen gültigen Rechengesetze auch für diese neuen Zahlen gelten. (Wir wissen heute aufgrund von Sätzen der modernen Algebra, daß es solche Festsetzungen nicht geben kann.) In eingeschränkten Fällen gelingt es ihm durch diverse Tricks, die Produkte $\eta\varepsilon$ und $\varepsilon\eta$ zu vermeiden, und es gelingt ihm trotz dieses Mangels seines Produktes, bedeutende Resultate der sphärischen Trigonometrie herzuleiten.

2.2 William Rowan HAMILTON (1805 - 1865) – Vektor als Zahlenpaar bzw. formaler Ausdruck der Form $a + bi + cj + dk$

HAMILTON identifiziert eine komplexe Zahl $a + bi$ mit dem Zahlenpaar (a, b) , insbesondere die Zahl i mit dem Zahlenpaar $(0, 1)$. Er definiert eine Addition, Subtraktion, skalare Vervielfachung und Multiplikation solcher Zahlenpaare, die den jeweiligen Operationen mit komplexen Zahlen entsprechen. Bis auf die Multiplikation stimmen diese Operationen mit den heute im Vektorraum \mathbb{R}^2 gebräuchlichen Operationen überein. Die Darstellung komplexer Zahlen durch Zahlenpaare nahm den komplexen Zahlen viel von ihrer Mysteriosität.

Wie WESSEL plagt sich auch HAMILTON mit dem Problem herum, die komplexen Zahlen auf drei Dimensionen auszudehnen, ja er träumt sogar von einer Ausdehnung auf n Dimensionen. Er untersucht Ausdrücke der Form $(a,b,c) = a + bi + cj$. Wie WESSEL bereitet es ihm keine Probleme, eine Addition, Subtraktion und skalare Vervielfachung für solche Tripel einzuführen, wie WESSEL scheitert er jedoch am Produkt. Da er die Ergebnisse der modernen Algebra noch nicht kannte, verbrachte er große Teile seines Lebens mit der erfolglosen Suche nach einem solchen Produkt. Es gelingt HAMILTON jedoch, eine einigermaßen brauchbare Multiplikation für vierdimensionale Ausdrücke der Form $a + bi + cj + dk$ zu finden, die er *Quaternionen* nannte (bekannt nach dem Quaternion der vier Knechte, die Petrus beschützten). Er setzte dazu fest.

$$\begin{aligned}i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ij &= k \quad jk = i \quad ki = j \\ji &= -k \quad kj = -i \quad ik = -j\end{aligned}$$

Das Produkt $(a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk)$ zweier beliebiger Quaternionen kann dann berechnet werden, indem man die beiden Klammern nach den üblichen Rechenregeln ausmultipliziert und die obigen Festsetzungen benutzt. Die Addition, Subtraktion und skalare Vervielfachung sind für Quaternionen analog zu den komplexen Zahlen definiert. HAMILTON zeigt, daß die Quaternionen alle üblichen Rechengesetze erfüllen, bis auf das Kommutativgesetz der Multiplikation. Die Quaternionenmultiplikation ist antikommutativ, d.h. für alle Quaternionen α, β gilt $\alpha \cdot \beta = -\beta \cdot \alpha$. Anzumerken ist auch, daß HAMILTON als erster die Gültigkeit des Assoziativgesetzes klar hervorgehoben hat.

HAMILTON überschätzte seine Quaternionen in gewaltiger Weise und sah sie als ebenbürtig mit der Schöpfung der Infinitesimalrechnung an. Mit missionarischem Eifer betrieb er ihre Verbreitung in der mathematischen Welt. Er wurde in Irland und England zu einer Gallionsfigur einer Schule von Quaternionisten, die ihren Meister an Starrheit und Intoleranz noch übertraf. Im Mittelpunkt stand ein mit Scheu und Ehrfurcht gehandhabter Formalismus, von dem man sich ganz neue Einsichten in die Mathematik und Physik erwartete. Die moderne Algebra hat jedoch gezeigt, daß die Quaternionen nicht mehr sind als ein sehr spezielles Beispiel einer sog. Algebra (siehe dazu EBBINGHAUS et al. 1983, S. 131-134).

In einem Quaternion $\alpha = a + bi + cj + dk$ bezeichnete Hamilton a als *Skalarteil* und $bi + cj + dk$ als *Vektorteil des Quaternion*, abgekürzt $S\alpha$ und $V\alpha$. Es hat den Mathematikern des 19. Jahrhunderts große Mühe bereitet, den Vektorteil von einem Quaternion zu lösen und zu einer eigenständigen Existenz zu verhelfen.

2.3 August Ferdinand MÖBIUS (1790 - 1868) – Vektor als gewichteter Punkt

MÖBIUS entwickelte in seinem *Barycentrischen Calcul* einen Kalkül für gewichtete Punkte. Er betrachtet z.B. fünf Punkte A, B, C, D, E im Raum, die die jeweilige Masse a, b, c, d, e haben. Er beweist, daß man immer einen eindeutig bestimmten Punkt S - nämlich den Schwerpunkt - finden kann, der folgende Eigenschaften hat: Legt man parallele Geraden (in irgendeine Richtung) durch die Punkte A, B, C, D, E und S und schneidet diese mit einer beliebigen Ebene, wobei A', B', C', D', E' und S' die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Ebene sind, dann gilt:

$$a \cdot AA' + b \cdot BB' + c \cdot CC' + d \cdot DD' + e \cdot EE' = (a + b + c + d + e) \cdot SS'$$

Dabei ist AA', BB', \dots die jeweilige vorzeichenbehaftete Strecke (positiv, wenn der Punkt auf der einen Seite der Ebene liegt, negativ, wenn er auf der anderen liegt). Geht insbesondere die Ebene durch S , dann gilt:

$$a \cdot AA' + b \cdot BB' + c \cdot CC' + d \cdot DD' + e \cdot EE' = 0$$

MÖBIUS sagt nun, daß es für eine fixe Ebene genügt, statt der Strecken AA', BB', \dots die Punkte A, B, \dots anzugeben. Er schreibt also die obigen Gleichungen so:

$$\begin{aligned} a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C + d \cdot D + e \cdot E &= (a + b + c + d + e) \cdot S \\ a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C + d \cdot D + e \cdot E &= 0 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich

$$S = \frac{1}{a + b + c + d + e} (a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C + d \cdot D + e \cdot E)$$

Der Schwerpunkt ist also eine Art gewichteter Mittelpunkt der Punkte A, B, C, D, E .

Mit solchen gewichteten Punkten führt MÖBIUS auch verschiedene andere Rechnungen aus. Sein Kalkül hat bereits große Ähnlichkeit mit dem späteren Punktmodell eines Vektorraums.

MÖBIUS führt auch zwei Produkte für gerichtete Strecken ein. Das *projektive Produkt* $\underline{AB \cdot CD}$ entspricht dem heute gebräuchlichen Skalarprodukt, das *geometrische Produkt* $\overline{AB \cdot CD}$ ist die von AB und CD aufgespannte orientierte Parallelogrammfläche (nicht dessen Inhalt). Diese Idee taucht im 19. Jahrhundert immer wieder auf.

2.4 Giusto BELLAVITIS (1803-1880) – Vektoren als äquivalente, gerichtete Strecken

BELLAVITIS führte als erster eine Äquivalenzrelation für gerichtete Strecken ein: Zwei gerichtete Strecken AB und CD heißen *äquipollent*, geschrieben $AB \simeq CD$, wenn sie gleich lang, parallel und gleich orientiert sind. Er betrachtete jedoch noch nicht die dazugehörigen „Pfeilklassen“ (diese Betrachtungsweise entstand erst im 20. Jahrhundert im Rahmen der Mengenlehre). Darüber hinaus beschreibt BELLAVITIS gerichtete Strecken durch Länge und Neigungswinkel (*inclinatio*), wobei er die Länge einer gerichteten Strecke AB mit \overline{AB} und deren Neigungswinkel (gegenüber der positiven ersten Achse) mit $inc \cdot AB$ bezeichnet. Er weist darauf hin, daß eine „Gleichung“ wie z.B.

$$AB \simeq \frac{CD \cdot EF}{GH}$$

gleichbedeutend ist mit den Gleichungen

$$\overline{AB} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{EF}}{\overline{GH}} \quad \text{und} \quad inc \cdot AB = inc \cdot CD + inc \cdot EF - inc \cdot GH$$

2.5 Hermann Günther GRASSMANN (1809-1877) – Vektor als (gewichteter) Punkt bzw. gerichtete Strecke bzw. Bewegung bzw. orientierte Fläche bzw. formaler Ausdruck der Form $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$

GRASSMANN entwickelte unabhängig von HAMILTON ein vektorielles System, in dem der Vektorteil eines Quaternions von Anfang an als eigenes Objekt betrachtet wurde. Seine Ausführungen hätten die Entwicklung der Vektorrechnung ein gutes Stück weiterbringen können, wenn sie seine Zeitgenossen gelesen hätten. Doch sein Werk galt als schwer lesbar bis unlesbar. (HAMILTON selbst hat zugegeben, daß er nicht über die ersten Seiten hinausgekommen ist.) Dies lag u.a. daran, daß GRASSMANN seine Ideen in einen schwer zugänglichen philosophischen Kontext verpackte. Aus heutiger Sicht betrachtet war diese philosophische Verpackung notwendig, weil es sonst GRASSMANN mit den Mitteln seiner Zeit nicht möglich gewesen wäre, seine sehr abstrakten Ideen auszudrücken. Was ihm nämlich vorschwebte, war eine Art universale Algebra, die unabhängig von der geometrischen Anschauung entwickelt und begründet werden kann, aber bei Bedarf auf die Geometrie angewandt werden kann.

Zunächst entwickelt GRASSMANN jedoch in seiner *Theorie der Ebbe und Flut* (1840, aber erst 1911 publiziert) einen Kalkül für gerichtete Strecken und wendet diesen auf die Mechanik der Gezeiten an. Er führt zunächst eine *geometrische Gleichheit* für gerichtete Strecken ein, für die er das Symbol \doteq verwendet und die die Übereinstimmung in Betrag und Richtung ausdrückt. Anschließend führt er eine *geometrische Addition* für gerichtete Strecken ein, für die er das Symbol \ddagger verwendet und die gemäß der Parallelogrammregel erfolgt. Subtraktion und skalare Ver-

vielfachung von gerichteten Strecken fließen mehr oder weniger selbstverständlich ein. GRASSMANN beweist die wichtigsten Rechengesetze für die bisher erwähnten Operationen. Anschließend behandelt er sehr kurz die Vektordifferentialrechnung (partielle Ableitungen gerichteter Strecken). Schließlich führt er zwei Produkte von gerichteten Strecken ein. Das *lineare Produkt* $a \oslash b$ zweier gerichteter Strecken entspricht dem heute gebräuchlichen Skalarprodukt, das *geometrische Produkt* $a \dot{\times} b$ stellt wie bei MÖBIUS die von a und b aufgespannte, orientierte Parallelogrammfläche dar.

In seinem Hauptwerk, der *linealen Ausdehnungslehre* (1844) stellt GRASSMANN seine Ideen in einen allgemeineren und systematischeren Zusammenhang. Er entwickelt eine sehr abstrakte „Theorie der Formen“. Formen sind abstrakte Elemente, die man bei Bedarf als Punkte, Zahlen, gerichtete Strecken, orientierte Flächen usw. deuten kann. Spezielle Formen sind die sog. *Ausdehnungsgrößen* (extensive Größen), die durch einen Stufenprozeß erzeugt werden. Ausgangspunkte sind dabei die sog. *Elementargrößen*, die GRASSMANN nicht näher definiert, doch meist als Punkte deutet. Durch die Bewegung eines Punktes entsteht eine Ausdehnungsgröße erster Stufe, d.h. eine gerichtete Strecke; durch die Bewegung einer gerichteten Strecke in eine geeignete Richtung entsteht eine Ausdehnungsgröße zweiter Stufe, d.h. eine orientierte Fläche; durch die Bewegung einer orientierten Fläche in eine geeignete Richtung entsteht eine Ausdehnungsgröße dritter Stufe, d.h. ein orientiertes Parallelepipid; usw. GRASSMANNs abstrakter Standpunkt erlaubt es ihm, diesen Prozeß auch für mehr als drei Dimensionen fortzusetzen. Dies ist der Beginn einer n -dimensionalen Geometrie.

GRASSMANN stellt eine Ausdehnungsgröße n -ter Stufe in der Form $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ dar, wobei e_1, e_2, \dots, e_n als *Einheiten erster Ordnung* bezeichnet werden (heute würde man sie als normierte Basisvektoren des \mathbb{R}^n auffassen). Er definiert Addition, Subtraktion und skalare Vervielfachung in der üblichen Weise (koordinatenweises Vorgehen) und definiert dann verschiedene Produkte für Ausdehnungsgrößen, von denen die wichtigsten das innere und das äußere Produkt sind.

Für das *innere Produkt* $\alpha | \beta$ setzt GRASSMANN fest:

$$\begin{aligned} e_i | e_i &= 1 \\ e_i | e_j &= 0 \text{ für } i \neq j \end{aligned}$$

Das innere Produkt $(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) | (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n)$ zweier beliebiger Ausdehnungsgrößen n -ter Stufe kann dann berechnet werden, indem man die beiden Klammern nach den üblichen Rechenregeln miteinander ausmultipliziert und dabei die obigen Festsetzungen benutzt. Strenggenommen bräuchte man dazu zumindest noch ein Distributivgesetz. Distributivität sah GRASSMANN jedoch als eine selbstverständliche Eigenschaft eines Produktes an.

GRASSMANN beweist die folgenden Eigenschaften des inneren Produktes:

$$(1) \alpha|\beta = a \cdot b \cdot \cos \phi, \text{ wobei } a = |\alpha|, b = |\beta|, \phi = \sphericalangle(a, b)$$

$$(2) |\alpha| = \sqrt{|\alpha|^2} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}$$

Das innere Produkt stimmt also mit dem heutigen (euklidischen) Skalarprodukt im \mathbb{R}^n überein, das ja heute noch als inneres Produkt bezeichnet wird.

Für das *äußere Produkt* $[\alpha\beta]$ setzt GRASSMANN fest:

$$\begin{aligned} [e_i e_i] &= 0 \\ [e_i e_j] &= -[e_j e_i] \text{ für } i \neq j \end{aligned}$$

Das äußere Produkt $[\alpha\beta]$ zweier beliebiger Ausdehnungsgrößen n -ter Stufe kann dann wiederum durch Ausmultiplizieren der beiden Klammern nach den üblichen Rechenregeln ermittelt werden. Strenggenommen bräuchte man auch hier zumindest noch ein Distributivgesetz. Z. B. für $n = 3$:

$$\begin{aligned} [\alpha\beta] &= [(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3)] = \\ &= \alpha_1 \beta_1 [e_1 e_1] + \alpha_1 \beta_2 [e_1 e_2] + \alpha_1 \beta_3 [e_1 e_3] + \alpha_2 \beta_1 [e_2 e_1] + \alpha_2 \beta_2 [e_2 e_2] + \alpha_2 \beta_3 [e_2 e_3] + \\ &\quad + \alpha_3 \beta_1 [e_3 e_1] + \alpha_3 \beta_2 [e_3 e_2] + \alpha_3 \beta_3 [e_3 e_3] \\ &= (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) [e_2 e_3] + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) [e_3 e_1] + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) [e_1 e_2] \end{aligned}$$

Daran erkennt man die Ähnlichkeit dieses Produktes mit dem heutigen Vektorprodukt. Im Gegensatz zum heutigen Vorgehen reduziert jedoch GRASSMANN die Produkte $[e_2 e_3], [e_3 e_1], [e_1 e_2]$ nicht, er setzt also nicht etwa $[e_2 e_3] = e_1$, sondern läßt diese Produkte stehen und bezeichnet sie als *Einheiten zweiter Ordnung*. Ähnlich verfährt er in höheren Dimensionen.

Im zweiten Teil der linealen Ausdehnungslehre dehnt GRASSMANN sein äußeres Produkt auf Elementargrößen (Punkte) aus. Für Elementargrößen α, β gibt er die Zusatzdefinition

$$[\alpha\beta] = \beta - \alpha$$

und deutet $[\alpha\beta]$ geometrisch als die gerichtete Strecke von Punkt α zum Punkt β .

(Die obige Festsetzung ist also nichts anderes als die wohlbekannte Regel Vektor = Endpunkt - Anfangspunkt.) Das Rechnen mit diesem Produkt mutet schon sehr modern an. Z.B. erhält GRASSMANN:

$$\begin{aligned} [\alpha\alpha] &= \alpha - \alpha = 0 \\ [\alpha\beta] &= \beta - \alpha = -(\alpha - \beta) = -[\beta\alpha] \\ [\alpha\beta] &= \beta - \alpha \Rightarrow \beta = \alpha + [\alpha\beta] \end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf entwickelt GRASSMANN auch einen Kalkül für gewichtete Punkte, ähnlich wie MÖBIUS. Dabei wird zum ersten Mal der Nullvektor als Punkt mit dem Gewicht 0 betrachtet.

2.6 Matthew O'BRIEN (1814 - 1855) – Vektor als gerichtete Strecke

O'BRIEN entwickelt einen Kalkül für gerichtete Strecken. Addition, Subtraktion und skalare Vervielfachung von gerichteten Strecken führt er auf die übliche Art ein. Die Einheitsvektoren längs der drei Koordinatenachsen bezeichnet er mit α, β, γ und er zeigt, daß jede vom Ursprung ausgehende Strecke u in der Form $u = x\alpha + y\beta + z\gamma$ dargestellt werden kann.

O'BRIEN will mit Hilfe seines Streckenkalküls vor allem Translationen gerichteter Strecken beschreiben. Dabei zerlegt er eine Translation in eine longitudinale und eine laterale Komponente. Eine Translation der gerichteten Strecke u längs der gerichteten Strecke v heißt *longitudinal*, wenn $\angle(u, v) = 0^\circ$ und *lateral*, wenn $\angle(u, v) = 90^\circ$.



O'BRIEN bezeichnet das Ergebnis einer longitudinalen Translation mit $u \times v$ und das Ergebnis einer lateralen Translation mit $u \cdot v$ (wobei unklar bleibt, ob damit eine Zahl, eine gerichtete Strecke oder die von u und v aufgespannte Rechtecksfläche gemeint ist). Er faßt $u \times v$ und $u \cdot v$ als Produkte auf und stellt zunächst durch geometrische Überlegungen fest, daß beide Operationen kommutativ und distributiv sind.

Algebraisch definiert er das Produkt $u \times v$ durch folgende Festsetzungen für die Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned} \alpha \times \alpha &= \beta \times \beta = \gamma \times \gamma = 1 \\ \alpha \times \beta &= \alpha \times \gamma = \beta \times \gamma = 0 \end{aligned}$$

Damit zeigt er, daß für beliebige gerichtete Strecken u, v die Formel

$$u \times v = mn \cos \theta$$

gilt, wobei m die Länge von u , n die Länge von v und θ der von u und v eingeschlossene Winkel ist. Das Produkt $u \times v$ entspricht also dem heute gebräuchlichen Skalarprodukt.

Das Produkt $u \cdot v$ definiert O'BRIEN nicht algebraisch, er führt jedoch für dieses Produkt eine sog. *Direktrix* ein, die er mit $D(u \cdot v)$ bezeichnet. Diese ist definiert durch die Festsetzungen:

$$\begin{aligned} D(\alpha \cdot \beta) &= \gamma, & D(\alpha \cdot \gamma) &= -\beta, & D(\beta \cdot \gamma) &= \alpha \\ D(\beta \cdot \alpha) &= -\gamma, & D(\gamma \cdot \alpha) &= \beta, & D(\gamma \cdot \beta) &= -\alpha \end{aligned}$$

Damit zeigt O'BRIEN, daß die Direktix $D(u \cdot v)$ eines Produktes $u \cdot v$ beliebiger gerichteter Strecken u, v eine gerichtete Strecke ist, die auf u und v normal steht und die Länge $mn \sin \theta$ hat. (Über die Orientierung sagt er nichts, doch gilt offensichtlich die Rechtsschraubenregel.) Daran erkennt man, daß die Direktix $D(u \cdot v)$ dem modernen Vektorprodukt $u \times v$ entspricht.

3. Die Entwicklung der modernen Vektorrechnung

Ab HAMILTONs Tod (1865) war die weitere Entwicklung der Vektorrechnung fast ausschließlich eine Sache der Physiker. Dabei kann man zwei Phasen unterscheiden. In einer ersten Phase (ca. 1865-1880) wurden keine wesentlich neuen Ideen zum Vektorbegriff entwickelt, es ging vielmehr darum, abzutesten, inwiefern die vorhandenen vektoriellen Systeme in der Physik brauchbar sind (wobei es vor allem um eine Konfrontation der HAMILTONschen Quaternionen mit den GRASSMANNschen Ausdehnungsgrößen ging). Man darf nicht vergessen, daß es zu dieser Zeit unter den Physikern noch sehr viele Gegner der Vektorrechnung gegeben hat, z.B. Lord KELVIN. Die wichtigsten Vertreter dieser Phase sind TAIT (der Hauptvertreter der Quaternionentheorie), MAXWELL und CLIFFORD. Die letzten beiden gaben eine gewisse Unzufriedenheit mit der Quaternionentheorie zu erkennen, doch war ihre Kritik noch milde. In einer zweiten Phase (ca. 1880 - 1900), deren Hauptvertreter GIBBS und HEAVISIDE waren, wurden die Quaternionen endgültig aus der Physik verbannt. GIBBS und HEAVISIDE übernahmen mit großem Geschick aus der Quaternionentheorie das, was für die Physik brauchbar war, und ließen das weg bzw. änderten das, was nicht brauchbar war. Darüber hinaus entwickelten sie ein brauchbares Bezeichnungssystem. Insgesamt entwickelten sie – ziemlich unabhängig voneinander – eine Vektorrechnung, die bis auf unwesentliche Bezeichnungsunterschiede mit der heutigen Vektorrechnung übereinstimmt. GIBBS und HEAVISIDE können also als die eigentlichen Vollender der modernen Vektorrechnung bezeichnet werden.

In der Zeit von 1865 - 1900 wurde auch die *Vektoranalysis* weiterentwickelt. Dabei ging es vor allem um die Anwendung des schon von HAMILTON eingeführten Nabla-Operators $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$. Infolge der Einführung des Feldbegriffes in die Physik durch FARADAY wurden verschiedene Vektorfelder untersucht und dabei entstanden heute gängige Begriffe der mehrdimensionalen Analysis wie *Gradient*, *Divergenz*, *Rotation* usw. Diese Entwicklung war eng verbunden mit der Entwicklung der Theorie der Mehrfachintegrale, Kurvenintegrale und Oberflächenintegrale bis hin zu den Sätzen von GREEN, GAUSS und STOKES.

4. Die Axiomatisierung des Vektorbegriffes

Wenn Mathematiker längere Zeit mit etwas arbeiten, tritt meist über kurz oder lang ein Moment der Reflexion ein und es wird die Frage gestellt: Was ist eigentlich dieses „etwas“, mit dem wir die ganze Zeit gearbeitet haben? So muß ungefähr um 1900 die Frage aufgekommen sein: Was ist eigentlich ein Vektor? Es läßt sich allerdings nicht sagen, wann und wo diese Frage zum ersten Mal gestellt wurde. Diese Frage war nun gar nicht leicht zu beantworten. Denn im Lauf der Geschichte sind viele inhaltliche Vorstellungen von einem Vektor entwickelt worden: Vektor als Betrag und Richtung, als Punkt, als gewichteter Punkt, als (ortsabhängige oder ortsunabhängige) gerichtete Strecke, als orientierte Fläche, als Translation, als n -Tupel, als formaler Rechenausdruck usw. Diese Vorstellungen waren so verschieden, daß sie nicht unter einen Hut gebracht werden konnten.

Das Problem wurde schließlich so gelöst, wie Mathematiker solche Probleme immer lösen: der Vektorbegriff wurde axiomatisch definiert. Giuseppe PEANO (1858 - 1932) war derjenige, der den Begriff des *Vektorraumes* in der heutigen Form einführte, als eine Menge, in der bestimmte Operationen definiert sind und in der gewisse Axiome erfüllt sind. Von nun an war ein Vektor ein *Element eines Vektorraumes* und sonst nichts.

Aber ist das Problem damit wirklich gelöst? Zwar hat man durch die Vektorraumdefinition das offiziell festgehalten, worauf sich alle einigen konnten und das war im wesentlichen das Rechnen mit Vektoren. Aber wer mit Vektoren wirklich arbeiten will, muß wesentlich mehr wissen als das, was in der Definition des Vektorraumes steht. In dieser Definition steht ja z.B. nichts über die geometrischen Deutungen von Vektoren und deren Rechenoperationen oder über n -Tupel. Manchmal wird der Standpunkt vertreten: Offiziell ist nur das, was in der Vektorraumdefinition steht, was man sich sonst unter Vektoren vorstellt, ist Privatsache. Dieser Standpunkt wird heute von vielen Mathematikern (z.B. René THOM) und fast allen Mathematikdidaktikern für falsch gehalten - einfach weil Mathematik auf der formalen Ebene allein nicht funktioniert. Ich vergleiche einen mathematischen Begriff gerne mit einem Eisberg. Der über der Wasseroberfläche liegende Teil eines Begriffes ist der offizielle Teil, der in der Definition des Begriffes ausgedrückt wird. Aber zum Funktionieren von Mathematik ist auch der weitaus größere, unter der Wasseroberfläche liegende inoffizielle Teil notwendig.

Die im 20. Jahrhundert aufkommende formalistische Sichtweise der Mathematik sah von diesem inoffiziellen Teil schlichtweg ab, d.h. man vergaß diese Dinge oder besser: man verschwieg oder verdrängte sie. Aber bereits Daniel Gottlob FREGE (1848 - 1925) hat sich über diese *Methode des Absehens* lustig gemacht:

Man hat das noch längst nicht genügend ausgenutzt. Einige Andeutung für weitere Verwertungen mögen daher nicht unerwünscht sein. Anwendungen können davon gemacht werden in der Metallurgie (Entphosphorung des Eisens), Pädagogik (Erziehung von Musterknaben), Medizin (Vermeidung störender Nebenwirkungen von Heilmitteln), Politik (Unschädlichmachung widerstrebender Parteien und feindlicher Mächte) und gewiß noch auf vielen anderen Gebieten.

FREGE fügt die Fußnote hinzu:

Dieser Gedanke möchte indessen nicht neu sein; schon der Vogel Strauß soll einen ähnlichen gehabt haben.

Der Vektor als Element eines Vektorraumes kann also nicht der Weisheit letzter Schluß sein. Dies ist eine der Lehren, die man aus der Geschichte der Vektorrechnung ziehen kann: Ein mathematischer Begriff ist ständig in Entwicklung und nie fertig. So gesehen ist „Vektor“ kein Fertigprodukt, sondern eher eine „Idee“, die immer neue Ausprägungen erfährt. Die Titelfrage „Was ist ein Vektor?“ läßt sich also wohl nie endgültig beantworten. Wir wissen nicht, was die Zukunft bringen wird. Von den Physikern hört man ja gelegentlich Unzufriedenheiten mit dem Vektorbegriff im Sinne des Vektorraumes, weil dadurch physikalische „Vektoren“ angeblich nicht immer gut beschrieben werden. In der Tat gibt es bereits echte Veränderungen des Vektorbegriffes, z.B. die von PASTOR u.a. 1989 eingeführten „senseless vectors“, die man als Doppelpfeile deuten kann und die Anwendungen bei der Untersuchung anisotroper Medien gefunden haben. Schließlich ist ein „Vektor“ in den Computerwissenschaften auch nicht mehr ganz das, was er in der Mathematik ist.

Literatur:

CROWE, M. (1967): A History of Vector Analysis.
University of Notre Dame, London.

EBBINGHAUS, H.-D. / HERMES, H. / HIRZEBRUCH, F. / KOECHER, M. /
MAINZER, K. / PRESTEL, A. / REMMERT, R. (1983): Zahlen.
Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.

PASTOR, G. / FERREIRO, A. / JIMENEZ, I. / TORRES, M (1989): How to give a sense to senseless vectors in plane. Int. Journal for Education in Science and Technology, vol. 20, no. 3, p. 441-446.

Robert MÜLLER
BRG 3, Wien

Mathematik mit dem TI-92

Seit Herbst 1997 läuft nach einzelnen lokalen Initiativen (z.B. Fuchs in Salzburg, Wurnig in Graz, Aspetsberger und Schlöglhofer in Oberösterreich, Böhm, Klinger und Lechner in Niederösterreich, Pecharda in Wien usw.) ein von LSI Dr. Heugl initiiertes und vom Unterrichtsministerium und der Firma Texas Instruments unterstützter österreichweiter Feldversuch zur Einbindung des TI-92 in den Mathematikunterricht. Als flankierende Maßnahme hat der Verlag hpt zeitgerecht zu Schulbeginn 1997 das Werk "Mathematik mit dem TI-92" herausgebracht. Über dessen Konzept wie auch Möglichkeiten des konkreten Gebrauchs will dieser Vortrag informieren.

Schon in der Wahl des Titels eines Werkes kann – ja soll – sich dessen Anspruch und Konzept zeigen. "Mathematik mit dem TI-92" ([L1], Abb. 1) will weder das von den gleichen Autoren verfaßte vierbändige "Lehrbuch der Mathematik" ([L2], Abb. 2) noch das Handbuch des TI-92 ersetzen.



Abb. 1



Abb. 2

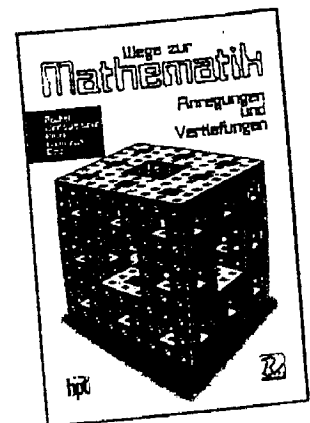


Abb. 3

Es kann auch nicht – im selben Maß – wie das gleichzeitig erschienene Werk "Wege zur Mathematik" ([L3], Abb. 3) anhand vieler motivierender Aufgaben und Themen die Freude an Mathematik wecken und vertiefen und so Lesern *Wege zur Mathematik* weisen.

Vielmehr handelt es sich – um es im EDV-Jargon modernistisch auszudrücken – um ein Add-on bzw. Plug-in. Anders als andere Werke ergänzt es nicht Jahr für

Jahr Band um Band, sondern es ergänzt(e) auf einen Streich den *gesamten* in Abb. 2 gezeigten vierbändigen Lehrgang um Kenntnisse und Fertigkeiten, die den Einsatz des TI-92 betreffen. Sachlogisch orientiert es sich daher nicht so sehr an den *Fähigkeiten* des Geräts (wie dies sonst beim Handbuch und bei einigen in Deutschland erschienen TI-92-Büchern der Fall ist), sondern an den *Anforderungen und Bedürfnissen* beim Lösen der im Lehrgang gestellten Aufgaben und Probleme und daher an dessen Struktur und Systematik – in letzter Konsequenz daher am Lehrplan für die Oberstufe der Allgemeinbildenden Höheren Schule.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

- 5-1 Grundsätzliches zur Bedienung des TI-92
- 5-2 Die Sprache der Mathematik
- 5-3 Schaltalgebra
- 5-4 Rechnen mit "konkreten" und "allgemeinen" Zahlen
- 5-5 Algebraisches Lösen von Gleichungen mit einer Variablen
- 5-6 Algebraisches Lösen von Ungleichungen mit einer Variablen
- 5-7 Funktionen – Bedeutung, Darstellung und Eigenschaften
- 5-8 Spezielle Funktionen – Klassifikation und Anwendungen
- 5-9 Daten- und Beziehungsstrukturen
- 5-10 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen
- 5-11 Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen – Lineare Optimierung
- 5-12 Ebene Koordinatengeometrie
- 5-13 Räumliche Koordinatengeometrie

- 6-1 Potenz- und Wurzelfunktionen
- 6-2 Trigonometrie
- 6-3 Koordinatengeometrie
- 6-4 Vektorprodukte
- 6-5 Matrizen
- 6-6 Grenzprozesse und Reelle Zahlen
- 6-7 Exponential- und Logarithmusfunktionen
- 6-8 Reelle Funktionen
- 6-9 Wirtschaftsmathematik

- 7-1 Komplexe Zahlen und Algebraische Gleichungen
- 7-2 Differentialrechnung
- 7-3 Kurvendiskussionen
- 7-4 Einige Anwendungen der Differentialrechnung
- 7-5 Nichtlineare Analytische Geometrie
- 7-6 Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme und Prozesse
- 7-7 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

- 8-1 Exponential- und Logarithmusfunktionen
- 8-2 Integralrechnung
- 8-3 Anwendung der Integralrechnung
- 8-4 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
- 8-5 Wiederholung, Vertiefung und Ergänzung

Anhang

Begleitdiskette

Indem das Werk so den *gesamten* Lehrstoff der Oberstufe abdeckt, unterscheidet es sich auch von jenen Werken, die anhand ausgewählter Problemstellungen (etwa die Einführung des Bestimmten Integrals, eingeschränkter Fragestellungen aus der Stochastik usw.) *nur punktuell* den Einsatz des TI-92 demonstrieren – wobei letztere Feststellung nicht abwertend gemeint ist. Letztlich geht es in diesem Vortrag aber eben auch darum, den Anspruch unseres Buches von denen anderer Bücher unterscheiden zu helfen.

Diesen Anspruch versuchen wir durch den Untertitel "Gewußt wie mit dem TI..." zu verdeutlichen. *Gewußt wie* weist auf unseren Anspruch für ein *verständiges* Umgehen mit dem TI-92 hin. *Gewußt wie* ist ein Bekenntnis zur bewußten und kritischen Antizipation einer Entwicklung, in der die Mathematik als (Hilfs-)Wissenschaft längst alle Bereiche unseres Lebens, ja die Art unseres Denkens durchdrungen hat. Es führt heute kein Weg daran vorbei, Erkenntnisse und Methoden, Begriffe und Notationen der Mathematik im Sinn von *Kulturtechnik* in seiner gerade aktuellen Ausprägung anzunehmen und zu leben.

Das Verwenden von Rechenhilfsmitteln (Taschenrechner, PC usw.) zählt heutzutage ebenso wie Fernsehen, Telephonieren oder auch das Ausfüllen von Schecks etc. und das Lenken von Fahrzeugen unübersehbar zu den Kulturtechniken unserer westlichen Zivilisation. Kennzeichnend für eine Kulturtechnik ist die fast vollständige Durchdringung unseres Lebens mit ihr, ebenso wie die Selbstverständlichkeit ihrer Anwendung (fast) von Kindesbeinen an.

Während jedoch Fernsehen wie Telephonieren Kulturtechniken darstellen, die schon dreijährige Kinder weitgehend beherrschen, stellt das Ausfüllen von Schecks etc. und das Lenken von Fahrzeugen, erst recht aber der Umgang mit Computern und Taschenrechnern weit höhere Ansprüche an das "Gewußt wie". Insofern macht es Sinn das "Gewußt wie" einer Kulturtechnik auf verschiedenen Levels zu erlernen und anzuwenden – auch und besonders dann, wenn nach REICHEL [L4] "die Allgemeinbildenden Höheren Schulen sicherlich nicht primär dazu da sind, Scheckausfüllen, Autofahren, Streitkultur und Medienumgang zu lehren".

Bezogen auf das Arbeiten mit dem TI-92 zielt das in Rede stehende Buch auf drei Levels des "Gewußt wie":

- * *Gewußt wie* man mit dem Rechner "sofort" das Ergebnis erhält, und bei welchen Aufgaben dies der Fall ist.
- * *Gewußt wie* der Rechner das jeweils (im Prinzip) "macht".
- * *Gewußt wie* man den Rechner dazu bringen kann, Aufgaben, die er nicht von Haus aus "sofort" (auf Tastendruck) lösen kann, letztlich doch "sofort" (auf Tastendruck) lösen zu können.

In der Diktion der österreichischen Lehrpläne entspricht dies folgenden Ansprüchen bzw. Anspruchsniveaus:

- * Grundkenntnisse und Grundfertigkeiten,
- * Vertiefte Kenntnisse und Fertigkeiten, Begründen, Argumentieren und kritisches Denken
- * Verallgemeinern, Abstrahieren, Algorithmisieren

All diesen Ansprüchen im Unterricht wie auch den verschiedenen Benutzergruppen in *einem* Unterrichtswerk zu genügen, ist nicht ganz einfach, wie das nebenstehende Epigramm (Abb. 4) oder die beiden folgenden Zitate von diametralen Rückmeldungen an den Verlag "beweisen".

Herr Prof. xxx schreibt: "Heute muß ich ein allergrößtes Kompliment an Sie, den Verlag und die Autoren betreffend das neue Buch 'Mathematik mit dem TI-92' aussprechen! Es ist erstens ausgezeichnet geschrieben. Zweitens knüpft es in großartiger Weise an das vorliegende Oberstufenwerk an. Drittens scheint es tatsächlich für die Lehrerfortbildung genauso gut geeignet wie für interessierte Schüler..."

Der Lehrer hat die
Aufgabe
eine Wandergruppe
mit Spitzensportlern
und Behinderten
bei Nebel
durch unwegsames
Gelände zu führen,
und zwar so,
dass alle bei bester Laune
und möglichst gleichzeitig
an drei verschiedenen
Zielorten ankommen!

Abb. 4

Herr Prof. yyy hingegen kam zum Ergebnis "dass das Buch für Schüler eher unbrauchbar ist, weil keine mathematischen Beispiele, sondern nur Theorie beschrieben wird und die haben die Schüler sehr schnell heraus".

Aber machen Sie sich doch selbst ein Bild! Ich habe dafür bewußt (aber ohne bewußte Beschränkung der Allgemeinheit) Abschnitte aus einem Standard-Kapitel gewählt: aus der Trigonometrie in der 6. Klasse. Gerade im "grauen" Unterrichtsalltag zeigt sich die Brauchbarkeit eines Unterrichtsbehelfs – und mehr als ein *Behelf* kann und will dieses für den Unterricht approbierte (und daher via Schulbuchliste bestellbare) Buch ja nicht sein! Seine konkrete Umsetzung ist Teil der kreativen Arbeit und der methodischen Freiheit des Lehrers, bei der wir ihn unterstützen, aber nicht bevormunden wollen¹.

¹ Dies schließt nicht aus, daß der TI-92 in naher Zukunft in das Buch integriert wird. Im Gegenteil: auf vielfachen Wunsch wird es in naher Zukunft parallel zum bestehenden ein dahingehend erweitertes (und auch in anderer Hinsicht "modernisiertes") Lehrwerk geben!

Warnung: $\text{[SIN}^{-1}\text{]}$ ruft nicht den *Kehrwert* (im Sinn der Potenzrechnung) von SIN – also $1/\text{SIN}$ – auf, sondern die Umkehrung von SIN im Sinn der *Umkehrfunktion*. Dabei müssen wir die Taste $\text{[SIN}^{-1}\text{]}$ drücken – Eintippen von SIN^{-1} wird nicht akzeptiert. Zwecks Vermeidung von Missverständnissen wird daher in der Mathematik (wie auch im Lehrbuch) auf die Schreibweise $\text{[SIN}^{-1}\text{]}$ zu Gunsten der Schreibweise ARCSIN (für Arcus Sinus) verzichtet. Analoges gilt für COS und TAN.

Die Anwendung des eben Gesagten zur rechnerischen Auflösung eines rechtwinkligen Dreiecks (Beispiel H, LB 6. Klasse S. 55) zeigt Fig. 6.2.8. Dabei beschriften wir die Seiten mit a, b und c, die Winkel mit α ([2nd] G A), β ([2nd] G B) und γ ([2nd] G G). Da zwischen Groß- und Kleinbuchstaben nicht unterschieden werden kann, wird der Flächeninhalt A mit Area (wovon das A ja stammt), der Inkreisradius mit ir und der Umkreisradius mit ur benannt.

Bemerkung: Die durch Zuweisungen gespeicherten Ein- und Ausgabegrößen sollten vor neuen Rechnungen zur Vorsicht mittels DELVAR ([F4] 4) wieder gelöscht werden.

¹ Wir verwenden x statt – wie im Lehrbuch – φ , weil das kleine phi im Zeichensatz des TI-92 nicht enthalten ist.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
45. $\rightarrow a : 27. \rightarrow p$ 27.					
$\cos^{-1}\left(\frac{p}{a}\right) \rightarrow \beta$ 53.1301					
$90^\circ - \beta \rightarrow \alpha$ 36.8699					
$a \cdot \tan(\beta) \rightarrow b$ 60.					
$\frac{a^2}{p} \rightarrow c$ 75.					
$c - p \rightarrow d$ 48.					
$\sqrt{p \cdot q} \rightarrow h$ 36.					
$\frac{a \cdot b}{2} \rightarrow \text{area}$ 1350.					
$\frac{a+b+c}{2} \rightarrow s : \frac{\text{area}}{s} \rightarrow \text{ir}$ 15.					
$\frac{c}{2} \rightarrow \text{ur}$ 37.5					
MAIN DEG AUTO FUNC 12/50					

Fig. 6.2.8

Der voranstehende Ausschnitt aus S. 92 des Buches enthält ersichtlich die konkrete und *vollständige* Durchrechnung eines Musterbeispiels (dazu sind ja Musterbeispiele da), garniert mit einer Warnung, einer Bemerkung und einer Fußnote. Es ist dies das typische Strickmuster des Buches: unter Bezugnahme auf ein ganz konkretes Musterbeispiel oder eine ganz konkrete Übungsaufgabe aus dem zugrundeliegenden Lehrwerk werden nicht nur die vollständige Lösung angeboten, sondern auch Warnungen vor Fallstricken und typischen Fehlern, Hinweise auf andere (im Lehrwerk oft nicht angegebene) Lösungswege und (erst später thematisierte) theoretische Vertiefungen. Der folgende Ausschnitt aus Seite 93 zeigt in Fig. 6.2.10 ein Beispiel eines solchen Hinweises auf theoretische Vertiefung (Unendlichkeitsstellen der Tangensfunktion), in Fig. 6.2.11 ein Beispiel für die Aufklärung eines typischen Fehlers (Verkettung der Sinus- mit der Arcussinusfunktion).

Spezielle Werte und der Komplementärwinkelsatz lassen sich in Form von Listen leicht darstellen bzw. veranschaulichen (Fig. 6.2.10).

Bemerkung: Da ∞ keine Zahl ist, steht bei $\tan(90^\circ)$ "undef" statt (wie im Lehrbuch) " ∞ ". Beide Antworten sind richtig. Bei der Behandlung von Grenzwerten und Stetigkeit wird sich dieser scheinbare Widerspruch zwischen TI-92 und Lehrbuch klären.

Auch bei den Beziehungen zwischen Winkel- und Kreisfunktionen kommt es bei einer der beiden Beziehungen zu einem scheinbaren Widerspruch zwischen TI-92 und Lehrbuch (zweite Zeile in Fig. 6.2.11). Er klärt sich auf, wenn man in der behaupteten Identität $\arcsin(\sin(x))=x$ das Bogenmaß verwendet und man sich – was wir bisher stets taten – auf spitze Winkel beschränkt (dritte Zeile in Fig. 6.2.11). Erkläre!

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clear	a-z...
$\sin\langle\langle 0, 30, 45, 60, 90 \rangle\rangle$					
$\left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right\}$					
$\cos\langle\langle 0, 30, 45, 60, 90 \rangle\rangle$					
$\left\{ 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right\}$					
$\tan\langle\langle 0, 30, 45, 60, 90 \rangle\rangle$					
$\left\{ 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \sqrt{3}, \text{undef} \right\}$					
$\tan\langle\langle 0, 30, 45, 60, 90 \rangle\rangle$					
MAIN DEG AUTO FUNC 12/50					

Fig. 6.2.10

$\sin(\sin^{-1}(y))$		y
$\sin^{-1}(\sin(x)) \mid 0 < x \text{ and } x < 90$		$\sin^{-1}(\sin(x))$
$\sin^{-1}(\sin(x^\circ)) \mid 0 < x \text{ and } x < \frac{\pi}{2}$		x
MAIN DEG AUTO FUNC 12/50		

Fig. 6.2.11

Warnung: Bei der Berechnung des Polarwinkels θ sollte man stets im Approx-Modus arbeiten, indem man entweder den Befehl APPROX verwendet oder – einfacher – indem man bei ganzzahligen Eingaben (mindestens) einen Dezimalpunkt dazu setzt. Andernfalls erhält man ein zwar exaktes, aber doch ziemlich unverständliches Ergebnis (Fig. 6.2.13).

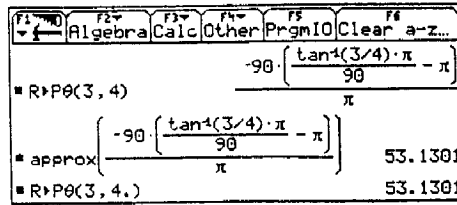


Fig. 6.2.13

Die Reduktionsformeln kann man – wie in der ersten Zeile von Fig. 6.2.14 beispielhaft angegeben – nachweisen. Darüber hinaus kann man diese Formeln auch vom TI-92 umformen lassen; dabei sieht man (zweite Zeile in Fig. 6.2.14), dass der TI-92 nicht automatisch auf das im Lehrbuch definierte Standardintervall $[0^\circ; 360^\circ]$ reduziert.

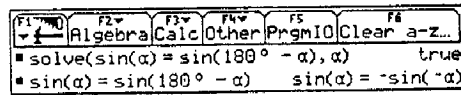


Fig. 6.2.14

Winkelfunktionen beliebiger Winkel – Funktionsgraphen

Zur Darstellung der kartesischen Funktionsgraphen von Winkelfunktionen (siehe LB 6. Klasse S. 69) müssen wir zunächst einmal mittels **MODE** Angle von DEGREE auf RADIAN umstellen!

Sodann definieren wir z.B. die Sinusfunktion im **[Y=]**-Fenster und starten den Zeichenvorgang mittels **ZOOMDEC** (**F2** 4). Offenbar ist die so gewonnene Kurve periodisch mit der primitiven Periodenlänge (LB 6. Klasse S. 68) $p=2\pi$, hat Nullstellen bei $k\pi$, Tiefpunkte bei $(-\pi/2+k*2\pi|-1)$ und Hochpunkte bei $(\pi/2+k*2\pi|1)$ mit jeweils $k \in \mathbb{Z}$. Dies kann man mittels der Befehle **ZERO** (**F5** 2), **MINIMUM** (**F5** 3) und **MAXIMUM** (**F5** 4) vom TI-92 rechnerisch nachprüfen lassen, indem man ihm jeweils die untere Grenze (lower bound) und die obere Grenze (upper bound) jenes Intervalls eingibt, in dem er suchen soll. Die Größe des Suchintervalls sowie die Darstellungsgröße der Kurve spielen dabei keine Rolle – die Werte werden ja rechnerisch ermittelt – nur die Eindeutigkeit des gesuchten Punktes im Suchintervall sowie die mittels **MODE** DisplayDigits voreingestellte Anzeigegenauigkeit (Fig. 6.2.15a bis 15c).

Zur Ermittlung des Funktionswertes $y=f(x)$ bedienen wir uns des Befehls **VALUE** (**F5** 1). Nach Aufruf der Funktion erhalten wir die Möglichkeit, die gewünschte x-Koordinate einzutippen. Nach Betätigen der **ENTER**-Taste wird der Funktionswert yc angezeigt und der Cursor auf den Punkt $(xc|yc)$ platziert – selbst wenn dieser außerhalb des Fensters liegen sollte.

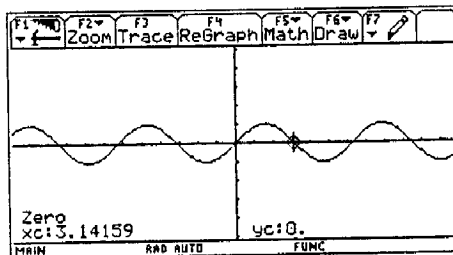


Fig. 6.2.15a

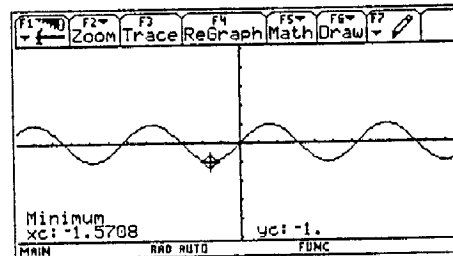


Fig. 6.2.15b

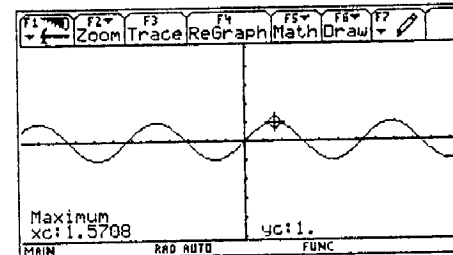


Fig. 6.2.15c

Die obige Seite 94 mag – jedenfalls auf den ersten Blick – den Eindruck vermitteln, als ginge es hier nur um technische Details wie die Aufrufe der passenden Funktion(snam)en. Tatsächlich ist die Darstellung sehr technisch und gerafft – aber nur deswegen, weil hier vieles nur wiederholt bzw. in neuem Zusammenhang angewendet wird. Bei genauerem Hinsehen findet man auch hier sachdien-

liche Hinweise zum "Standardintervall" des TI-92, zum Einfluß der Fenstergröße beim Arbeiten mit MAXIMUM, MINIMUM usw., wobei die Verwendung dieser Funktionen durchaus als (versteckter) methodischer Hinweis aufgefaßt werden darf.

Überraschungen gibt es auch beim Lösen der Gleichung $\tan(x) = \cot(x)$ (Beispiel P, LB 6. Klasse S. 70), die sich laut der ersten beiden Zeilen in Fig. 6.2.18 weder mit SOLVE noch mit NSOLVE lösen lässt. Warum?

Des Rätsels Lösung: Der TI-92 kennt die Funktion Cotangens nicht. Wir ersetzen daher $\cot(x)$ durch $1/\tan(x)$ und erhalten mit SOLVE eine Parameterdarstellung der Lösungen, mit NSOLVE eine partikuläre Lösung – allerdings weitab vom erwarteten Wert. Durch Einschränkung des Suchbereiches mittels des WITH-Operators auf das Intervall $]0,5; 1[$ liefert NSOLVE die erwartete Lösung, die wir noch vom Bogenmaß ins Altgradmaß umrechnen.

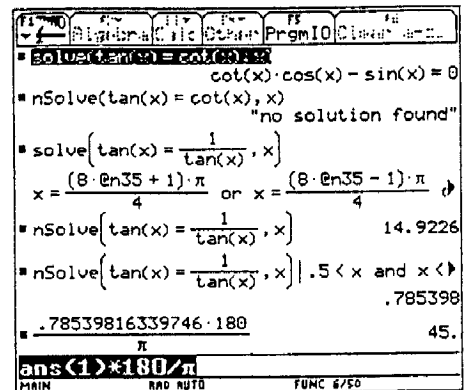


Fig. 6.2.16

Auflösung des schiefwinkligen Dreiecks

Rechnerisch bietet dieses Kapitel, was den Gebrauch der Winkelfunktionen betrifft, nichts Neues. Man setzt bloß in Sätze wie den Cosinussatz, den Sinussatz usw. ein. Wir wollen uns daher hier an einem Beispiel den konstruktiven Lösungsmethoden widmen. Dazu benützen wir – wie in Kap. 5-12 bereits ausführlich beschrieben – das Geometrie-Fenster, allerdings ohne Koordinaten.

Fig. 6.2.19 zeigt die Veranschaulichung bzw. die Herleitung des Sinussatzes mit Hilfe des Ziehmodus. Nach Definition eines neuen Geometrie-Fenster s mittels APPS 8 3 mit Namen Sinus zeichnen wir mittels CIRCLE (F3 1) eine fast fensterfüllende Kreislinie. Auf dieser wählen wir mittels POINT ON OBJECT (F2 2) drei Punkte, die wir mittels LABEL (F7 4) mit A, B und C beschriften. Sodann zeichnen wir mittels SEGMENT (F2 5) die Strecken AB, AC und BC und messen mittels DISTANCE&LENGTH (F6 1) deren Längen. Anschließend messen wir mittels ANGLE (F6 3) die Winkel bei den Punkten A, B und C und bilden mittels CALCULATE (F6 6) die Quotienten aus den Seiten und dem Sinus des jeweils gegenüberliegenden Winkels. (Mathematisch gesehen handelt es sich um die Ausdrücke $a/\sin(\alpha)$, $b/\sin(\beta)$ und $c/\sin(\gamma)$, die aber vom Befehl CALCULATE wie aus Fig. 6.2.19a ersichtlich immer in der Form $R = a/\sin(b)$ gebildet werden.) Die drei Quotienten stimmen gemäß Fig. 6.2.19b überein und ändern sich auch nicht, wenn man den Punkt C mittels der [C] -Taste längs der Kreislinie zieht.

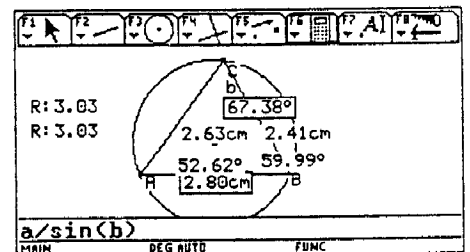


Fig. 6.2.19a

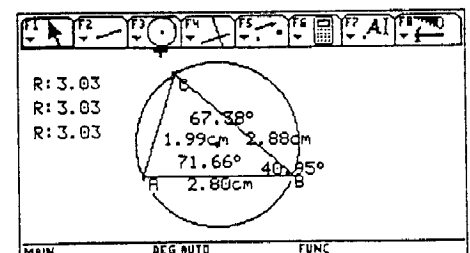


Fig. 6.2.19b

Zieht man insbesondere C so lange, bis die Seite a durch den Kreismittelpunkt geht, so wird das Dreieck ABC rechtwinklig, wobei die Hypotenuse die Länge $a=3.03 = \text{doppelter Umkreisradius}$ annimmt. Damit haben wir den Sinussatz (Aufg. 332, LB 6. Klasse S. 76) hergeleitet.

Auf der voranstehenden S. 96 des Buches sind das Musterbeispiel P sowie die Aufgabe 332 des Lehrbuches für die 6. Klasse vollständig gelöst – wobei es sich ersichtlich nicht allein um eine "technische" Erklärung des (schon in der 5. Klasse behandelten) Handlings des Ziehmodus handelt, sondern gleichermaßen um einen *methodischen Vorschlag* für eine visuell-suggestive Beweisführung!

Für solche Tätigkeiten – Beweise führen, Begriffe bilden, Algorithmisieren und Programmieren – sollte im Unterricht mehr Zeit sein. Dies kann natürlich nur funktionieren, wenn man von "banalen" Rechenarbeiten entlastet wird. Brachte die Einführung des klassischen Taschenrechners hier schon vor Jahren eine deutliche Entlastung, so gilt dies noch viel mehr durch den Einsatz von Programmen am PC oder programmierbaren Taschenrechnern wie insbesondere eben den TI-92. Für alle diejenigen, welche (noch) nicht selbst solche Programme schreiben können oder wollen, sind auf der dem Buch beiliegenden Diskette unter anderem einige Programme zum Auflösen schiefwinkliger Dreiecke enthalten.

Am besten startet man diese wie alle anderen Programme auch vom zentralen Menü "AllKIMen" (Alle-Klassen-Menü), welches man aus der Eingabezeile des [HOME]-Fensters im Hintergrund startet (Abb. 5). Mit [CUSTOM] schaltet man dieses benutzerspezifische Menü in den Vordergrund. Dort drückt man $\boxed{F2}$, um das 6.Klasse-Menü zu öffnen, fährt mit dem Cursor z.B. bis zum Menüpunkt SSS-Satz (Abb. 6) und wählt diesen mittels \boxed{ENTER} aus. Daraufhin wird der Programmaufruf automatisch in die Eingabezeile des [HOME]-Fensters übertragen, von wo man das Programm durch \boxed{ENTER} startet. Es erscheint das Input/

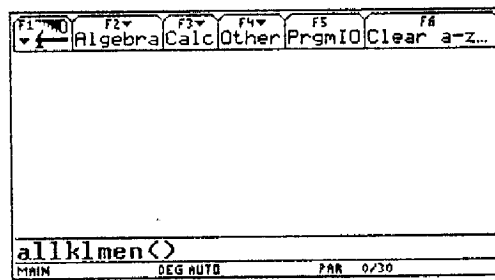


Abb. 5

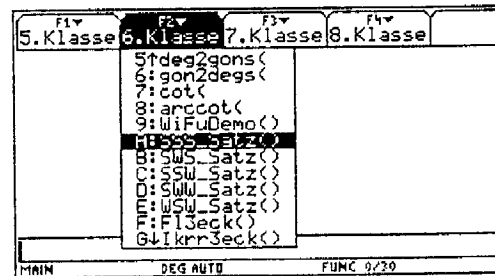


Abb. 6

Output-Fenster, wo vom Benutzer die Eingabe der drei Seiten in Form einer Liste erwartet wird (Abb. 7). Das Ergebnis ist in Abb. 8 zu sehen.

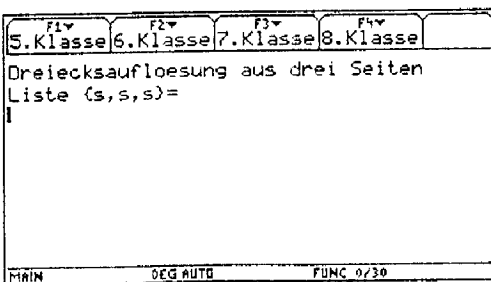


Abb. 7

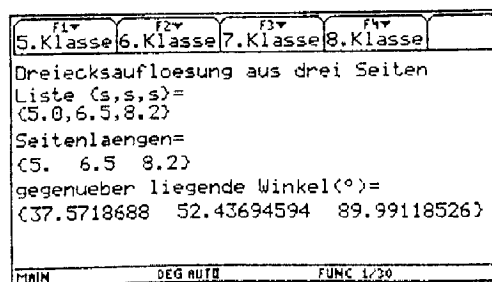


Abb. 8

Abb. 9 zeigt das Listing des Programms:

```
sss_satz()  
Prgm  
Local l1,s11,w11,w  
setMode("Angle","DEGREE")  
ClrIO  
Disp "Dreiecksaufloesung aus drei Seiten"  
Input "Liste {s,s,s}=",l1  
augment(l1,l1)->s11  
  
For i,1,3  
  If s11[i+1]^2+s11[i+2]^2-s11[i+3]^2<0 Then□  
    Disp "Ausgeartetes Dreieck"  
    Stop  
  EndIf  
EndFor  
  
{ }->w11  
For i,1,3  
  cos^-1((s11[i+1]^2+s11[i+2]^2-s11[i+3]^2)/(2.*s11[i+1]*s11[i+2]))->w  
augment(w11,{w})->w11  
EndFor  
l1->é1  
Disp "Seitenlaengen=",é1  
w11->é2  
Disp "gegenueber l1liegende Winkel(*)="  
Disp é2  
EndPrgm
```

Abb. 9

Man sieht, daß schon geringe Vorkenntnisse in einer prozeduralen Sprache ausreichen, um das Programm zu verstehen. Abgesehen vom Augment-Befehl zum Hinzufügen von Elementen zu einer Liste sind es im Prinzip altbekannte BASIC-Befehle zur Eingabe (Input), zum Anzeigen (Disp=Print), zum Generieren einer Schleife (For ... EndFor) oder einer Verzweigung (If ... EndIf). Mit diesen Befehlen findet man ersichtlich das Auslangen, um die Ein- und Ausgabe zu regeln und auf Plausibilität zu untersuchen und anschließend die gesuchten Winkel durch dreimalige Anwendung des Cosinussatzes zu berechnen.

Damit will ich den kurzen Einblick in das Buch "Mathematik mit dem TI-92" beschließen. Natürlich kann das Buch nicht alle der über 10000 Musterbeispiele und Übungsaufgaben des Oberstufenlehrgangs behandeln. Natürlich können die über 100 Programme, Funktionen und Makros auf der Diskette nicht alle Bereiche restlos abdecken. Natürlich können nicht alle möglichen Fehler in Warnungen vorweggenommen, alle denkbaren didaktischen "Gustostücke" in Hinweisen dargeboten oder sogar minutiös ausgearbeitet werden. Um wieder auf die obigen Rückmeldungen zurückzukommen: Offenbar wurden viele Wünsche erfüllt, andere blieben offen ... Aber eröffnet nicht gerade *beides* – Überfluß und Mangel – unserem Beruf die Chance didaktischer Initiative, die Freude an einem kreativen Unterrichten?

Was von den Warnungen beherzigt, was von den methodischen Hinweisen beachtet, oder sogar verwirklicht, was von den Programmen verwendet und was von den vielen vollständig gelösten Aufgaben und Musterbeispielen tatsächlich in den Unterricht einfließt, das liegt letztlich – Gottseidank noch immer – in der Verantwortung des Lehrers. Das vorliegende Buch mag ihm aber dabei helfen, die fachlichen und didaktischen Möglichkeiten wie Probleme bei Verwendung des TI-92 im Mathematik-Unterricht bereits jetzt für den gesamten Oberstufenlehrplan abschätzen zu können und so seiner Verantwortung für einen gedeihlichen Unterricht gerecht zu werden.

Literatur:

- [L1] REICHEL, H.-Chr., MÜLLER, R.: Mathematik mit dem TI-92
Verlag hpt, Wien 1997
- [L2] REICHEL, H.-Chr., MÜLLER, R., HANISCH, G.: Lehrbuch der Mathematik, Bd. 1-4
Verlag hpt, Wien, 1989-1992
- [L3] REICHEL, WINDISCHBACHER, RESEL, LATSCHAM, GÖTZ:
Wege zur Mathematik
Verlag hpt, Wien, 1997
- [L4] REICHEL, H.-Chr.: Neuansätze und eine andere Sichtweise des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.
Vortragsmanuskript, Wien, 1998
- [L5] MÜLLER, R.: Beispiele und Gedanken zum Einsatz des TI-92
Didaktikhefte der ÖMG, Heft 27, Wien, 1997

BESCHREIBENDE STATISTIK: Zentrale Tätigkeiten, lokale Bedeutungen, globale Ideen

Werner Peschek, Universität Klagenfurt

1. Zum Thema

Es ist weitgehend unbestritten, dass die beschreibende Statistik in vielen gesellschaftlichen Lebensbereichen angewandt wird, in den Wissenschaften ebenso wie in der Wirtschaft und Technik, in der Politik, im Sport und in vielen kulturellen Bereichen; die Ergebnisse statistischer Erhebungen begegnen uns nicht nur in Fachzeitschriften, sondern fast täglich auch in Zeitungen und Journalen, im Radio und im Fernsehen, in politischen Argumentationen wie in Festtagsreden, auf Werbeplakaten wie auch in amtlichen Formularen oder Bescheiden. Die Bedeutung der Statistik in vielen beruflichen und außerberuflichen Lebenssituationen (auch von Schülern/innen) ist ein Argument, das für eine unterrichtliche Behandlung dieses mathematischen Gebiets spricht.

Manchem/r Lehrer/in erscheint die *beschreibende Statistik* jedoch als *zu einfach und elementar*, um im Mathematikunterricht (der Oberstufe) sinnvoll behandelt werden zu können. Tatsächlich beschränken sich die rechentechnischen Anforderungen im Wesentlichen auf das Rechnen mit Prozenten, Brüchen, Quadraten, Wurzeln, Betrags- und Summenzeichen, allenfalls trifft man in der zweidimensionalen Statistik bei der Herleitung der Regressionsgleichung auf „höhere Mathematik“.

Andere hingegen sind der Auffassung, dass die *beschreibende Statistik* sehr hohe Anforderungen hinsichtlich Kontextverständnis, Darstellung und Interpretation stelle und aus diesem Grund für den Schulunterricht *eher zu anspruchsvoll* sei. Tatsächlich ist die beschreibende Statistik allein innermathematisch kaum angemessen behandelbar, außermathematische Sachverhalte erfordern aber nicht selten weiterreichendes Kontextwissen und -verständnis (und ein gewisses Maß an Motivation, sich mit solchen Problemstellungen zu befassen) sowie einen kritischen Umgang mit Darstellungen und Interpretationen der kontextbezogenen Daten. Beide Standpunkte führen zur selben Konsequenz: einer in vielen Fällen eher stiefmütterlichen und oft auch recht unangemessenen unterrichtlichen Behandlung der beschreibenden Statistik.

Folgt man der Sichtweise von R. FISCHER und G. MALLE (1985, S. 221), wonach sich Mathematik „im Wechselspiel zwischen Darstellen, Interpretieren und Operieren“ vollzieht, wie auch ihrem (vielfach bestätigten) Befund, dass das Operative den traditionellen Mathematikunterricht so stark beherrscht, dass (zu) wenig Raum für das Darstellen und Interpretieren bleibt, dann kommt zur o. a. Praxisrelevanz ein weiteres Argument für die unterrichtliche Behandlung der beschreibenden Statistik hinzu: die Chance, dem Darstellungs- und Interpretationsaspekts im Mathematikunterricht einen angemesseneren Stellenwert einzuräumen.

In diesem Beitrag sollen zentrale Tätigkeiten, lokale Bedeutungen und globale Ideen der beschreibenden Statistik herausgearbeitet und damit ein didaktischer Rahmen („roter Faden“) zur Planung, Entwicklung, Durchführung und Bewertung entsprechender curricularer Konzepte angeboten werden.

2. Beschreibende Statistik im Spannungsfeld zweier globaler Ideen

Für die beschreibende Statistik lassen sich mindestens zwei globale („fundamentale“) Ideen identifizieren, die die Entwicklung dieses Gebiets nachhaltig beeinflusst haben und ihr heutiges Erscheinungsbild prägen: Die *Idee der Mustererkennung und -darstellung* sowie die *Idee der Raffung*.

Viele statistische Tätigkeiten und Arbeitsweisen (insbesondere diverse Verfahren der grafischen und halbgrafischen Darstellung) zielen darauf ab, in großen Datensätzen explorativ **globale Muster** (Strukturen, Verläufe, Beziehungen) zu **erkennen**, diese **sichtbar zu machen** und zu **beschreiben** (darzustellen). In Abb. 1 etwa wird es wohl darum gehen, die starken saisonalen Schwankungen in der Energieaufbringung Klagenfurts (bei leicht steigender Gesamtentwicklung) zu erkennen bzw. deutlich zu machen, Abb. 2 macht die starken Geburtenrückgänge seit 1970 wie jene der (Nach-)Kriegsjahre ebenso erkenn- und sichtbar wie den Frauenüberschuss in den älteren Jahrgängen u. v. a. m.

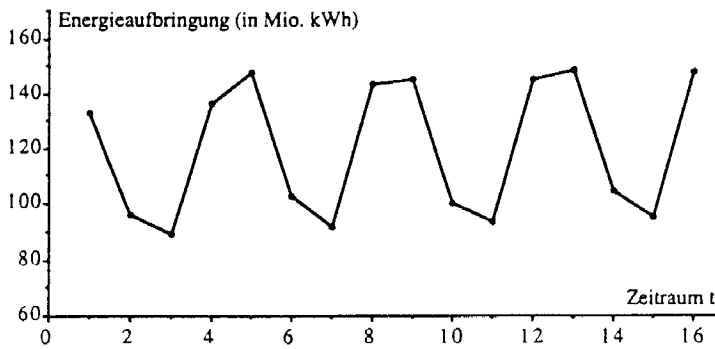


Abb. 1: Energieaufbringung in Klagenfurt 1990 - 1993

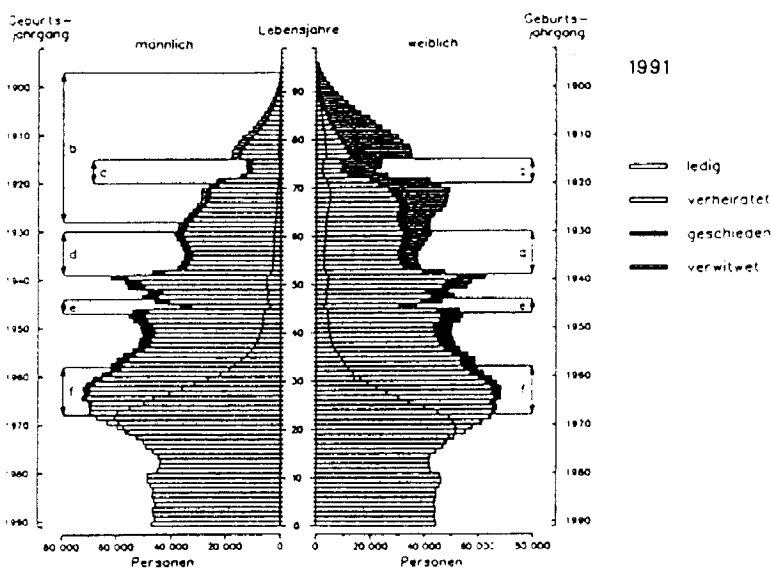


Abb. 2: Alterspyramide für Österreich

Der **Raffung** als weiterer globaler Idee der beschreibenden Statistik liegt eine grundlegende menschliche und gesellschaftlich höchst bedeutsame Denkstrategie zugrunde: Wer umfangreiche, komplexe Informationen (Datensätze) vergleichen will oder muss, wer angesichts unübersichtlicher Informationslage Entscheidungskriterien sucht, kann versuchen, sich durch operative Komprimierung der Daten Überblick, Vergleichsmöglichkeiten oder intersubjektiv nachvollziehbare Entscheidungsgrundlagen zu schaffen: Addition und deren Kommutativität ermöglichen es uns, die in einem Restaurant konsumierten Speisen und Getränke mit einem Gesamtbetrag zu bewerten und zu bezahlen, die verschiedenen Noten im Verlauf eines Schuljahres werden zu einer Endnote (mit entsprechenden Konsequenzen) verdichtet, das quantitative Verhältnis zwischen Budgetdefizit (selbst Produkt einer extremen Raffung) und Bruttonationalprodukt (ebenfalls eine extreme Raffung) macht uns für den Euro (un-)tauglich usw. Erst solche Raffungen machen die Mathematik - in unserem Fall die Statistik - so „einfach, klar und undurchsichtig“, wie dies R. FISCHER (1986, S. 123) einmal formuliert hat. In der beschreibenden Statistik finden wir die Idee der Raffung fast durchgängig, beginnend bei der Datenerhebung (Zusammenfassung in Gruppen) über die Klasseneinteilung und das Histogramm bis hin zu - und ganz besonders bei - den Zentral- und Streuungsmaßen; der damit erreichbaren Vereinfachung und Übersichtlichkeit steht das Problem der Reduktion und geringeren Transparenz gegenüber.

Wesentlichstes Anliegen der Raffung ist *Gewinn an Übersicht*. Damit unterstützt die Raffung einerseits die Mustererkennung (globaler Überblick über Verläufe, Trends, globale Auffälligkeiten), läuft ihr andererseits aber auch zuwider, denn der Raffung ist im Prozess der Komprimierung ja praktisch keine Grenze gesetzt: die Raffung hat ihr Ziel dann am besten erreicht, wenn es gelingt, alle Daten auf ein zentrales Moment, eine einzige Kennzahl, ein einziges grafisches Symbol zu reduzieren. Eine solche Verdichtung der Information ist jedoch i. A. mit *Verlust an Information* verbunden, d. h., Gewinn an Übersicht bedeutet meist auch Verlust an Information. Abb. 3 soll diesen Zusammenhang veranschaulichen:

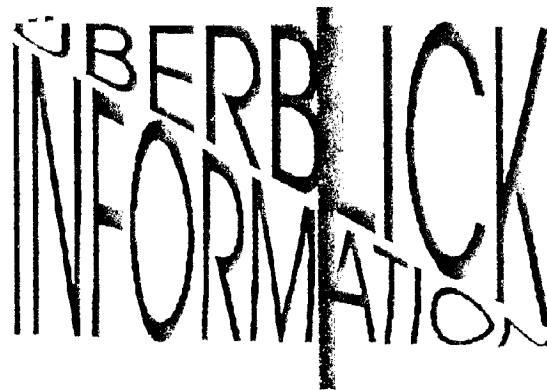


Abb. 3: Überblick vs. Informationsgehalt bei der Raffung

In der Praxis sollte das subjektive und zweckabhängige Bedürfnis nach Mustererkennung dem Prozess der Raffung dort Einhalt gebieten, wo ausreichend Überblick erreicht ist, die wesentlichen (Einzel-)Informationen und Strukturen aber noch erkennbar sind (vgl. dazu Abschnitt 3, Abb. 7 - 9 sowie Abschnitt 4).

3. Zentrale Tätigkeiten und lokale Deutungen in der eindimensionalen beschreibenden Statistik

Neben einer geeigneten *Datenerhebung* (mit ihrer ganzen Problematik), auf die hier nicht näher eingegangen wird, gehören die *Darstellung der Daten* sowie die *Ermittlung von statistischen Kennzahlen* (Zentral- und Streuungsmaße, Schiefe u. a.) zu den zentralen Tätigkeiten der eindimensionalen beschreibenden Statistik.

Die *Darstellung statistischer Daten* lässt sich in Form von *Tabellen* meist besonders einfach und platzsparend realisieren. Andererseits sind Tabellen manchmal aber auch etwas unübersichtlich, man muss sich oft erst „einlesen“ und man kann Größenvergleiche nur über die angegebenen Zahlenwerte durchführen. *Grafische Darstellungen* hingegen zielen darauf ab, einen raschen Überblick zu ermöglichen, Größenverhältnisse und Muster rasch zu erkennen. Im Vergleich zu tabellarischen Darstellungen sind sie meist aufwendiger zu erstellen, benötigen mehr Platz und sind anfälliger für Missverständnisse und gegenüber Fehlinterpretationen.

Bei der Behandlung der Grundtypen grafischer Darstellungen (vor allem Stab-, Kreis- und Streifendiagramm, Piktogramm, Liniendiagramm) sind deren Vor- und Nachteile (lokale Bedeutungen) mitzubedenken: Stabdiagramme etwa ermöglichen sehr viel einfacher als Kreisdiagramme sichere Größenvergleiche zwischen zwei Werten, letztere wiederum stellen den Anteil der einzelnen Werte an der Gesamtheit dar und begünstigen so u. a. den Vergleich zwischen zwei Gruppen von Werten:

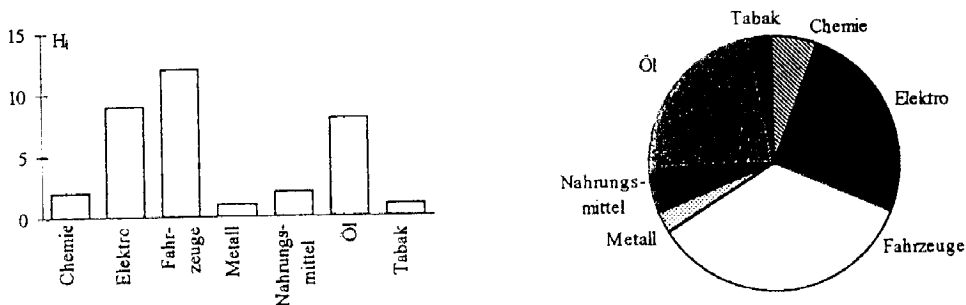


Abb 4: Häufigkeitsverteilung der Variablen „Branche“ für 35 Industrieunternehmen als Stab- und als Kreisdiagramm

Aus dem Stabdiagramm in Abb. 4 erkennt man schneller als aus dem Kreisdiagramm, dass die Anzahl der Elektrounternehmen größer ist als die Anzahl der Ölonternehmen, aus dem Kreisdiagramm wiederum ist sehr viel einfacher zu erkennen, dass der Anteil der Elektro-, Öl- und Nahrungsmittelunternehmen zusammen größer ist als der aller anderen Unternehmen.

Die Liniendiagramme in Abb. 5 und Abb. 6 stellen thematisch sehr ähnliche Zeitreihen dar - und sind doch sehr unterschiedlich zu interpretieren: Während das Liniendiagramm in Abb. 5 Bestandsdaten darstellt, die zu bestimmten Zeitpunkten erhoben wurden, handelt es sich bei den in Abb. 6 dargestellten Daten um Bewegungsdaten, die jeweils für einen bestimmten Zeitraum ermittelt wurden. Das hat Konsequenzen: Während die Verbindungslinien in Abb. 5 einigermaßen sinnvoll interpretiert werden können (sofern man eine gleichmäßige Entwicklung zwischen den gemessenen Werten unterstellt), ist eine entsprechende Interpretation der Verbindungslinien in Abb. 6 nicht möglich (die Darstellung dieser Zeitreihe in einem Stabdiagramm würde allfälligen Fehlinterpretationen besser vorbeugen).

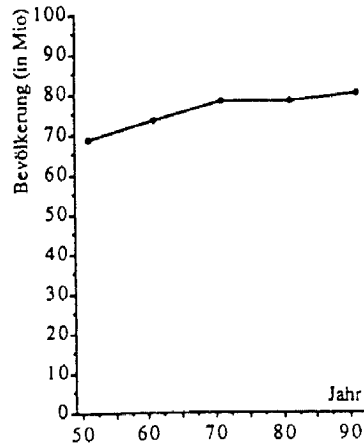


Abb. 5: Bevölkerungsentwicklung in Deutschland

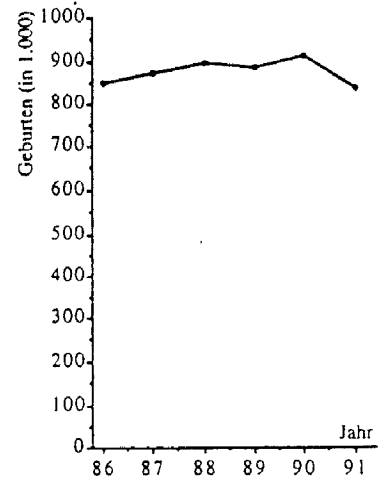


Abb. 6: Entwicklung der Geburtenzahlen in Deutschland

Das Wechselspiel von Raffung und Mustererkennung wird gerade auch bei grafischen Darstellungen recht deutlich: Die Darstellung der Beschäftigtenzahlen in Abb. 7 ist unübersichtlich und lässt für die Häufigkeitsverteilung wenig „Struktur“ erkennen. Verzichtet man auf die Unterscheidung nahe beieinander liegender Werte und fasst benachbarte Werte zu einer Klasse zusammen (Raffung!), so erhält man z. B. die in Abb. 8 gezeigte, in mancher Hinsicht weit aufschlussreichere Darstellung.

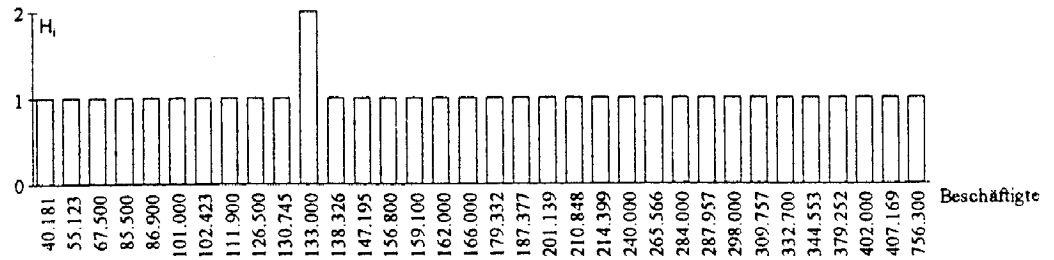


Abb. 7: Beschäftigtenzahlen in 35 Industrieunternehmen

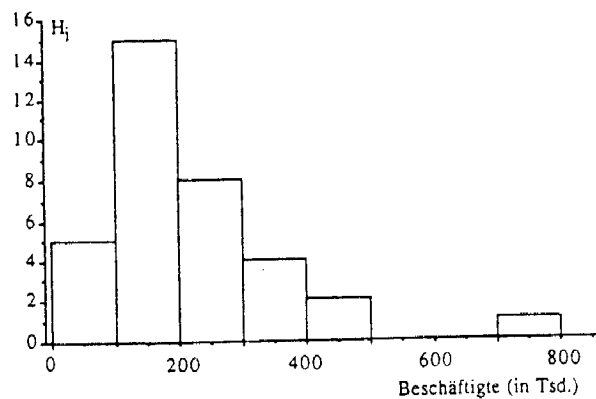


Abb. 8: Beschäftigtenzahlen in 35 Industrieunternehmen

Natürlich hätte man die Raffung auch sehr viel weiter treiben, die Klassenbreiten auf 200.000, 300.000 oder gar 800.000 vergrößern können. Das Ergebnis wäre dann zwar noch übersichtlicher als in Abb. 8, allerdings wäre der Informationsgehalt nur noch sehr gering. Insbesondere würde man durch eine so extreme Raffung fast alles an (Einzel-)Information verlieren und die „Struktur“ der Verteilung völlig zerstören (vgl. Abb. 9).

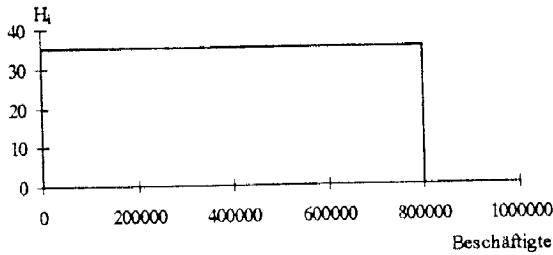


Abb. 9: Beschäftigtenzahlen in 35 Industrieunternehmen

Fast täglich stößt man auf Grafiken, die nicht sosehr statistische Daten als vielmehr ein grobes Unverständnis für die Zielsetzungen und die Bedeutung grafischer Darstellungen erkennen lassen; Abb. 10 und Abb. 11 mögen hier als - nicht weiter kommentierte - Beispiele unzuweckmäßiger bis unsinniger grafischer Darstellungen statistischer Daten dienen.

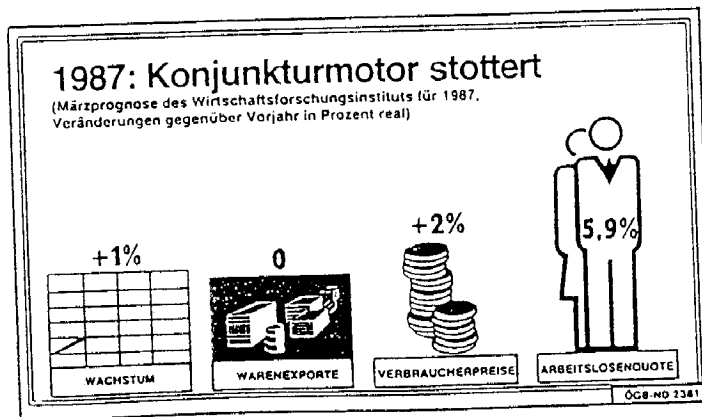


Abb. 10

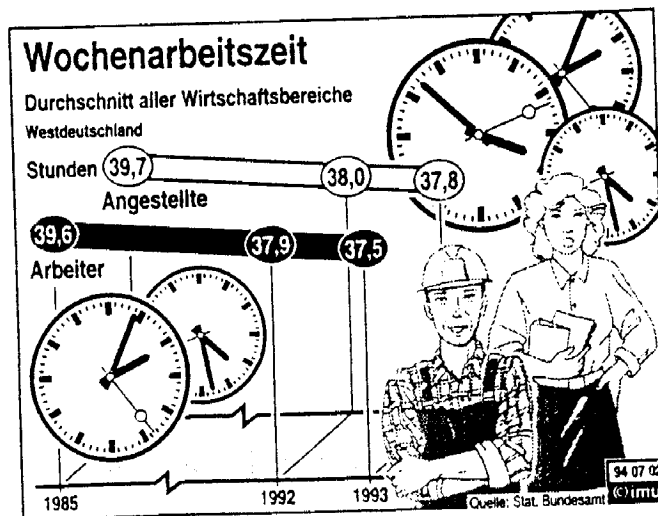


Abb. 11

Schon bei einfachen Grafiken ist man mit grundlegenden Problemen der grafischen Darstellung von statistischen Daten und verschiedenen Manipulationsmöglichkeiten konfrontiert. In den beiden folgenden Beispielen soll dies zumindest exemplarisch gezeigt werden, wobei in Beispiel 1 allein durch verschiedene Festlegungen der Achseneinheiten (gibt es eine „richtige“?), in Beispiel 2 mit verschiedenen Klasseneinteilungen und Bezugsbasen „manipuliert“ wird.

Beispiel 1: Besucher/innenzahlen im Strandbad Klagenfurt:

Jahr	1970	1972	1976	1978	1981
Besucher/innen	755.000	815.000	845.000	840.000	945.000

Opposition: *Es ist ein Skandal: Die Besucher/innenzahlen im Strandbad explodieren und die Stadtregierung weigert sich nach wie vor, finanzielle Mittel für den Ausbau des Strandbades bereitzustellen!*

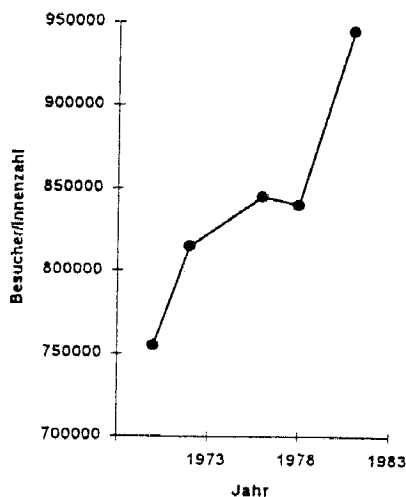


Abb. 12a

Stadtregierung: *Die Entwicklung der Besucher/innenzahlen im Strandbad ist uns wohlbekannt, wir können daraus aber keinen derartigen Zuwachs erkennen, der die Finanzierung einer Erweiterung des Strandbades rechtfertigen würde!*

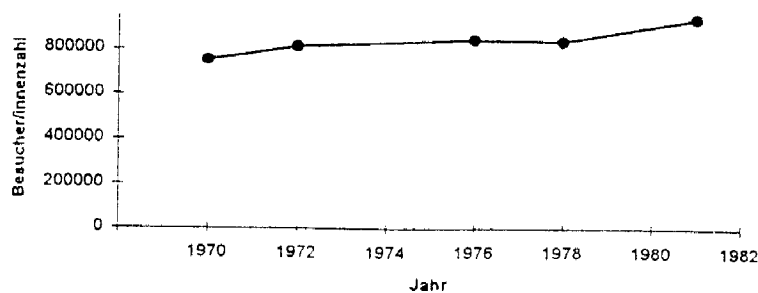


Abb. 12b

Beispiel 2: An einer politischen Diskussionsveranstaltung nahmen 140 Personen teil. Die Altersverteilung der Teilnehmer/innen an dieser Veranstaltung ist aus Abb. 13a - d ersichtlich:

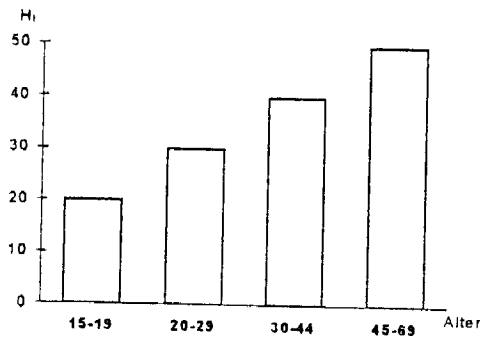


Abb. 13a: Das Interesse an der Politik steigt mit zunehmendem Alter!

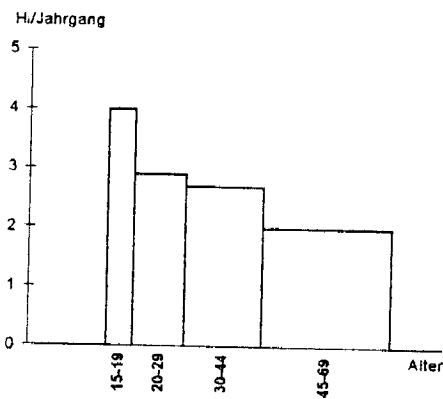


Abb. 13b: Das Interesse an der Politik sinkt mit zunehmendem Alter!

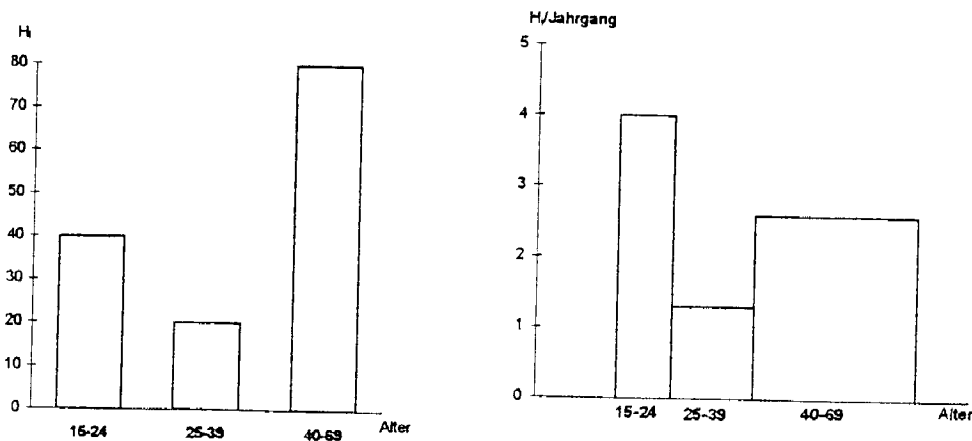


Abb. 13c: Gleichgültig, ob man nach der in Abb. 13a oder nach der in Abb. 13b gewählten Methode vorgeht, in jedem Fall ist es die mittlere Generation, die sich am wenigsten für Politik interessiert! Das Interesse an der Politik sinkt mit zunehmendem Alter!

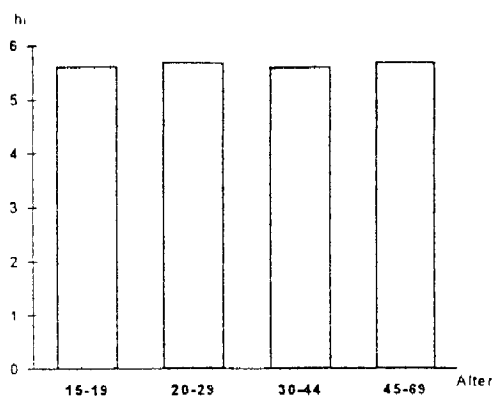


Abb. 13d: Bezogen auf die Altersverteilung in dieser Kleinstadt zeigten alle Altersgruppen ungefähr gleich großes Interesse bzw. Desinteresse an dieser Veranstaltung!

Mit **statistischen Kennzahlen** versucht man, bestimmte Aspekte statistischer Daten durch ein einziges Datum zu beschreiben.

So etwa ist das wesentliche Anliegen der *Zentralmaße*, ihre lokale Bedeutung, darin zu sehen, dass eine ganze (oft unübersichtliche) Liste von Daten durch einen einzigen, „repräsentativen“, „durchschnittlichen“ oder „typischen“ Wert ersetzt wird. Dieser Wert soll die gesamte Liste der Daten möglichst gut charakterisieren und so auch verschiedene Listen von Daten vergleichbar machen. Natürlich stellt eine derartige Komprimierung vieler Daten in ein einziges Zentralmaß eine sehr *extreme Raffung* dar, bei der viele (oft sehr wichtige) Einzelinformationen verlorengehen; die beschreibende Statistik kennt für diese Art der Raffung verschiedene Modelle (diverse Mittelwerte, Median, Modus). Didaktisch und im Hinblick auf Anwendungen sind dabei weniger die jeweiligen Berechnungsmethoden von Interesse als vielmehr die lokalen Bedeutungen der einzelnen Modelle, ihre Aussagekraft und Anwendbarkeit. Wenn ein Statistiker etwa sagt, dass die 100 Mitarbeiter/innen eines Unternehmens „durchschnittlich“ ATS 30.000,- pro Monat verdienen, so kann er damit meinen, dass bei gleichmäßiger Verteilung der Summe aller Gehälter auf alle Mitarbeiter/innen ein/e Mitarbeiter/in ungefähr ATS 30.000,- monatlich bekommen würde (*arithmetisches Mittel*), er kann damit aber auch meinen, dass 50 Mitarbeiter/innen *höchstens* ATS 30.000,-, 50 Mitarbeiter/innen hingegen *mindestens* ATS 30.000,- pro Monat verdienen (*Median*). Denkbar wäre weiters auch die Interpretation, dass das am häufigsten ausbezahlte Entgelt ATS 30.000,- beträgt (*Modus*). Das Konzept des arithmetischen Mittels ist das der Summenbildung (daher muss diese möglich und sinnvoll sein!) und der gleichmäßigen Verteilung - in diesem Sinne ist es „egalitär“, es reagiert stark auf extreme Werte („Ausreißer“) und setzt metrische Daten voraus. Das Konzept des Medians besteht darin, zwischen einer „besseren“ und einer „schlechteren“ Hälfte zu unterscheiden, es ist in diesem Sinn „elitär“, darüber hinaus ausreißerunempfindlich (robust) und verlangt nur Ordinaldaten. Das Konzept des Modus schließlich sucht nach einem häufigsten Wert, der aber wohl nur dann als „typischer“ Wert akzeptabel erscheint, wenn er sehr viel häufiger auftritt als alle anderen Werte; der Modus ist auch auf nominalskalierte Daten anwendbar. So simpel die Zentralmaße auf den ersten Blick erscheinen mögen, wenn man bedenkt, dass selbst gesetzliche Bestimmungen (etwa Stipendiengesetze, Studienzulassungen) die Verwendung des arithmetischen Mittels für die Mittelung von (üblicherweise ordinalskalierten) Noten

zwingend vorschreiben und auch stoffdidaktische Arbeiten mit diesem Thema gewisse Schwierigkeiten haben (siehe etwa Reichel, Hanisch und Müller 1987, S. 31), dann kann man erahnen, dass die Interpretation der lokalen Bedeutungen mancher Zentralmaße schwieriger, zugleich aber auch interessanter ist, als man zunächst angenommen hatte.

Durch die extreme Raffung, die zu den Zentralmaßen führt, gehen viele Informationen verloren, unter anderem auch Informationen darüber, wie gut das Zentralmaß die vorliegenden Daten repräsentiert bzw. wie stark die Einzeldaten um das Zentralmaß *streuen*. (Würden Sie etwa als Nichtschwimmer einen Teich durchwaten, von dem Sie lediglich wissen, dass er „durchschnittlich“ 80 cm tief ist?) Im Hinblick auf solche Beurteilungen ist die Angabe eines Zentralmaßes alleine völlig unzureichend, die Raffung zu extrem. Die beschreibende Statistik versucht, diesen Informationsverlust durch Angabe eines *Streuungsmaßes* etwas zu mildern. *Spannweite* und *Interquartils Spannweite* (Abstand zwischen oberer und unterer Quartile) sind sehr einfache, anschauliche Streuungsmaße, die für die Anliegen der beschreibenden Statistik meist völlig genügen, die *mittlere absolute Abweichung* (vom Median oder vom arithmetischen Mittel) als arithmetisches Mittel der Abstände („durchschnittlicher Abstand“) modelliert recht gut die intuitive Vorstellung von „mittlerer Streuung“. Das in der beschreibenden Statistik am häufigsten verwendete Streuungsmaß hingegen, die *empirische Standardabweichung*, erweist sich als unanschaulich und schwer interpretierbar (Seitenlänge des „durchschnittlichen Abstandsquadrats“, genauer: Seitenlänge jenes Quadrats, dessen Flächeninhalt das arithmetische Mittel der Flächeninhalte all jener Quadrate repräsentiert, die man erhält, wenn man den Abstand jedes einzelnen Werts vom arithmetischen Mittel als Seite eines Quadrats versteht). Mit dieser, von intuitiven Vorstellungen sehr abgehobenen Modellierung der Streuung läuft die empirische Standardabweichung den Anliegen der beschreibenden Statistik (Gewinn an Einsicht und Überblick) geradezu zuwider und erscheint daher für die beschreibende Statistik weniger geeignet; ihre eigentliche Bedeutung kommt erst in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der schließenden Statistik zum Tragen.

4. Zusammenspiel von Raffung und Mustererkennung - ein Beispiel

Die folgende Tabelle zeigt die Bruttoeinkommen (in ATS) von 50 Beschäftigten in 25 verschiedenen Wirtschaftsbereichen:

11.211	15.357	21.099	32.608	18.004	26.365	13.757	21.896	13.677	20.118
12.338	17.571	11.841	15.590	14.040	18.082	15.408	25.653	17.399	28.316
17.064	24.891	16.277	23.393	16.936	23.539	15.500	21.067	13.608	20.560
12.560	14.637	15.106	18.910	20.693	31.063	15.535	20.700	10.679	14.964
14.429	19.499	15.715	22.006	13.570	19.654	17.167	20.934	7.221	6.017

Das *Kastenschaubild* in Abb. 14 liefert für diese 50 Einkommen eine grafische Veranschaulichung von Median, unterer und oberer Quartile (und damit auch des Interquartilabstands) sowie des höchsten und des niedrigsten Wertes (und damit der Spannweite): Das höchste Einkommen liegt bei ca. ATS 32.500,--, das niedrigste bei ca. ATS 6.000,--, die (mittlere) Hälfte der Beschäftigten verdient monatlich zwischen ca. ATS 14.500,-- und knapp ATS 20.500,--, der „Durchschnittsverdiener“ (im Sinne des Medians) kommt auf monatlich ca. ATS 17.000,--. Es sind zwei extrem niedrige und drei vergleichsweise sehr hohe Einkommen erkennbar, zwischen ca. ATS 10.500,-- und ca. ATS 26.500,-- darf man annehmen, dass die Daten „dicht“ liegen (keine großen Lücken auftreten), wobei die Verteilung etwas „rechtsschief“ ist (d. h., die Daten streuen bei den oberen Einkommen etwas stärker als in der unteren Hälfte).

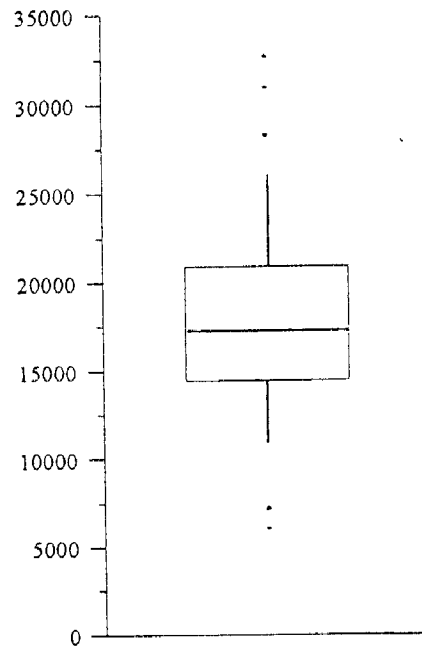


Abb. 14: Bruttoeinkommen von 50 Beschäftigten (in ATS)

Aus diesen stark gerafften Daten (Zentral- und Streuungsmaße) lässt sich also schon sehr viel über die Verteilung der Einkommen aussagen, allerdings ist aus den dargestellten Kennzahlen (Raffung!) die Struktur der Verteilung nicht mehr erkennbar. Diese oft wichtige Information kann z. B. recht gut einem *Stengel-Blatt-Diagramm* (halbgrafische Darstellung) entnommen werden; im vorliegenden Beispiel könnte anhand des Stengel-Blatt-Diagramms in Abb. 15a etwa auffallen, dass sich die Einkommen um ATS 15.000,- wie auch bei ca. ATS 20.000,- häufen, somit eher eine zweigipfelige Verteilung vorliegt als eine Gauß'sche Glockenkurve. Mehrgipfelige Verteilungen sind aber immer alarmierend, sie verweisen auf eine mögliche Inhomogenität der zugrundeliegenden Daten. So könnten etwa die zwei Gipfel im Stengel-Blatt-Diagramm von Abb. 15a durch Einkommensunterschiede zwischen Arbeitern/innen und Angestellten bedingt sein, oder auch durch Einkommensunterschiede zwischen Frauen und Männern. Im Stengel-Blatt-Diagramm von Abb. 15b wurden die Einkommen von Frauen (fett, kursiv) und Männern verschieden gekennzeichnet, das Ergebnis ist recht aufschlussreich! Eine Konsequenz aus dem in Abb. 15a erkannten Muster (und dem in Abb. 15b erkannten, möglichen Ursachen) könnte eine für die Einkommen von Frauen und Männern getrennte (aber vergleichende) Darstellung relevanter Kennzahlen in zwei Kastenschaubildern sein (Abb. 16).

Tausend	Hundert
6	0
7	2
8	
9	
10	6
11	28
12	35
13	5667
14	0469
15	1345557
16	29
17	0135
18	009
19	46
20	05679
21	008
22	0
23	35
24	8
25	6
26	3
27	
28	3
29	
30	
31	0
32	6

Tausend	Hundert
6	0
7	2
8	
9	
10	6
11	28
12	35
13	5667
14	0469
15	1345557
16	29
17	0135
18	009
19	46
20	05679
21	008
22	0
23	35
24	8
25	6
26	3
27	
28	3
29	
30	
31	0
32	6

kursiv: Frauen

Abb. 15a: Bruttoeinkommen (in ATS) Abb. 15b: Bruttoeinkommen (in ATS)

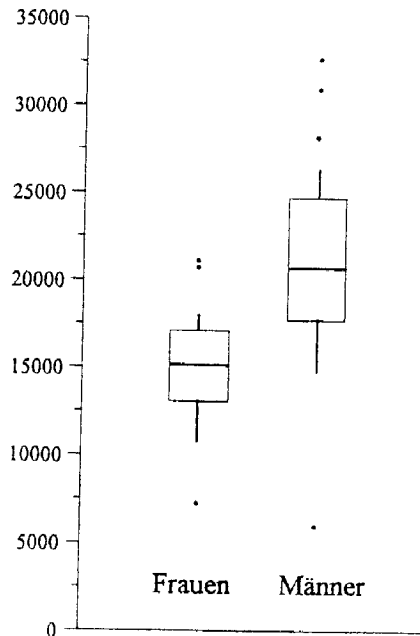


Abb. 16: Bruttoeinkommen von 25 Frauen und 25 Männern

Bei den in diesem Beispiel verwendeten Daten handelt es sich im übrigen um die Durchschnittseinkommen (im Sinne des Medians) aller weiblichen und männlichen Beschäftigten in 25 Wirtschaftsbereichen in Österreich im Jahre 1994.

5. Zweidimensionale beschreibende Statistik

Bei der eindimensionalen Betrachtung von Merkmalen gehen Zusammenhänge zwischen zwei (oder mehreren) Merkmalen verloren, zum Beispiel mögliche Zusammenhänge zwischen den jährlichen Umsätzen und den Beschäftigtenzahlen in verschiedenen Unternehmen. Methoden zur Beschreibung von Zusammenhängen zwischen zwei Merkmalen liefert die zweidimensionale beschreibende Statistik. Dabei werden dieselben globalen Ideen und ähnliche lokale Bedeutungen bzw. zentrale Tätigkeiten wie in der eindimensionalen Statistik sichtbar: Zunächst wird man die Ausprägungen der beiden Merkmale wohl tabellieren. Falls für beide Merkmale metrische Daten vorliegen, wird man meist auch versuchen, diese in einem *Streudiagramm* grafisch darzustellen (Abb. 17).

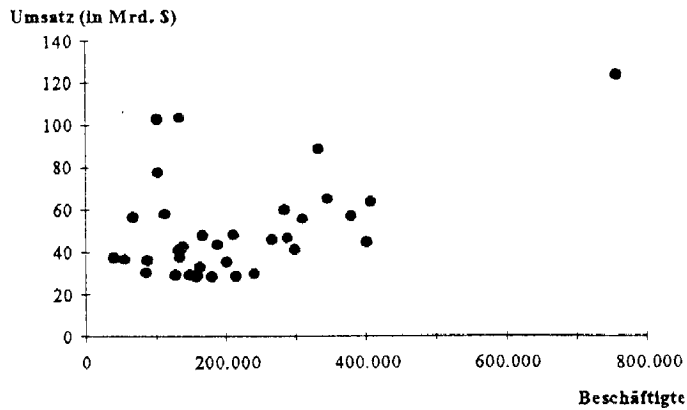


Abb. 17: Beschäftigtenzahlen und Umsätze in 35 Industrieunternehmen

Anhand des Streudiagramms bzw. anhand der durch die eingezeichneten Punkte gegebenen *Punktwolke* lässt sich ein gewisser (hier nicht sonderlich stark ausgeprägter) Trend dahingehend erkennen, dass Unternehmen mit höheren Beschäftigtenzahlen *tendenziell* auch höhere Umsätze aufweisen. Dieser Trend in Abb. 17 lässt sich verdeutlichen und in den Vordergrund rücken, wenn man ihn als Graph einer (im einfachsten Fall linearen) Funktion modelliert und diesen Graphen im Streudiagramm einzeichnet. Die in Abb. 18 dargestellte *Trendgerade* wurde „nach Gefühl“ eingezeichnet; sie ist für die vorliegenden zweidimensionalen Daten in ähnlichem Sinn repräsentativ wie ein Zentralmaß für eine eindimensionale Liste von Daten.

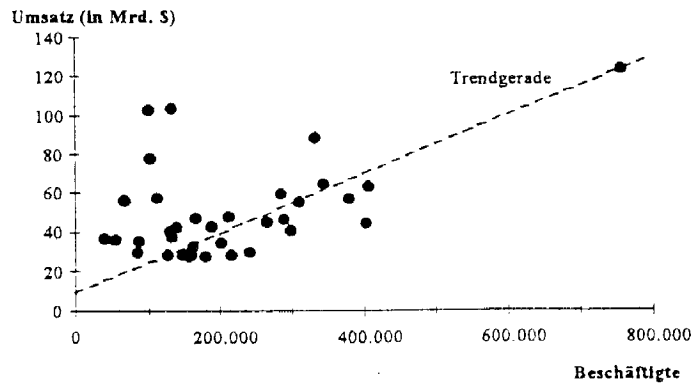


Abb. 18: Beschäftigtenzahlen und Umsätze in 35 Industrieunternehmen

Aus der Grafik lässt sich leicht eine Gleichung der Trendgeraden ermitteln, aus der dann entsprechende quantitative Aussagen ablesbar bzw. berechenbar werden.

Gefühle sind subjektiv und nicht normiert, daher kann es für die nach Gefühl gezeichnete Trendgerade kein eindeutiges Ergebnis geben. Wer ein intersubjektiv eindeutiges Ergebnis möchte oder braucht, wird den Trend daher nach einem *genormten Verfahren*, etwa der *Methode der kleinsten Quadrate*, ermitteln und zum Beispiel durch eine *Regressionsgerade* beschreiben. Je nachdem, ob man dabei die Abstandsquadrate der Punkte von der Regressionsgeraden in vertikaler Richtung (*1. Regressionsgerade*) oder in horizontaler Richtung (*2. Regressionsgerade*) minimiert, erhält man eine Gerade, die gegenüber der nach Gefühl gezeichneten Trendgeraden zu flach oder zu steil erscheint - in jedem Fall also eine Gerade, die der intuitiven (auf Normalabstände ausgerichteten) Vorstellung von einer gut passenden Geraden nicht optimal entspricht (Abb. 19). Der Grund für diese Unzulänglichkeit liegt im Verfahren - darauf soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden.

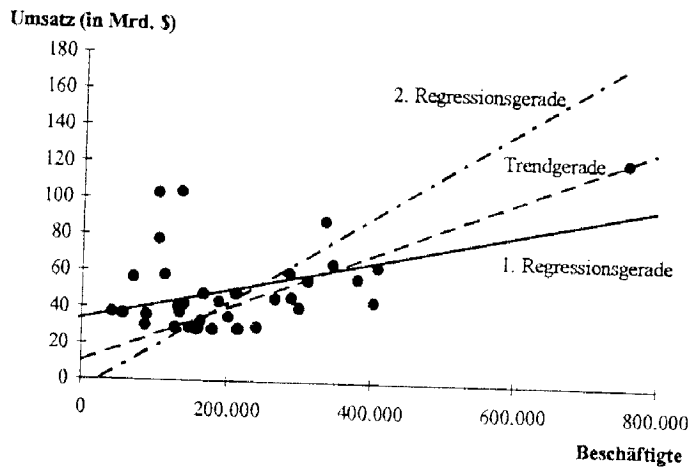


Abb. 19: Beschäftigtenzahlen und Umsätze in 35 Industrieunternehmen

Die beiden Regressionsgeraden lassen sich für jede Punktwolke ermitteln, also auch für solche, bei denen kaum ein linearer Trend erkennbar ist. Ähnlich wie bei den Zentralmaßen gilt auch hier: Bei entsprechend großer Streuung um die Trendgerade ist diese wenig aussagekräftig und kaum geeignet, die vorliegenden Daten in geeigneter Weise zu repräsentieren. Ein (auf Werte zwischen -1 und 1 genormtes) Maß für diese Streuung ist der *Pearsonsche Korrelationskoeffizient*, dessen Formel sehr komplex und undurchsichtig erscheint, der sich aber als Quadratwurzel aus dem Verhältnis der Steigungen der beiden Regressionsgeraden (oder auch als geometrisches Mittel der Anstiege) doch recht anschaulich erklären und anhand von Streudiagramm und Regressionsgeraden zumindest intuitiv auch recht gut nachvollziehen lässt. Der Korrelationskoeffizient ist als ein Maß für die Repräsentativität der Regressionsgeraden zu verstehen; es kommt ihm damit in der zweidimensionalen Statistik eine ähnliche Funktion zu, wie den Streuungsmaßen in der eindimensionalen beschreibenden Statistik: Die Repräsentativität und Aussagekraft der Regressionsfunktion ist umso geringer, je näher der Wert des Korrelationskoeffizienten bei null liegt (d. h., je stärker die Daten um die Regressionsgeraden streuen bzw. je weiter die Regressionsgeraden auseinanderklaffen).

Auch Trend bzw. Regression und Korrelation basieren wesentlich auf der Idee der (extremen) Raffung: Ein großer, zweidimensionaler Datensatz wird durch eine einzige (meist lineare) Funktion repräsentiert und ersetzt, die Streuung (Repräsentativität), wird durch einen einzigen Koeffizienten beschrieben. Dabei gehen natürlich Informationen verloren, Strukturen und Muster, die im Streudiagramm vielleicht noch erkennbar sind, verschwinden in der Regressions- und Korrelationsanalyse. So etwa könnte der nur mäßige Zusammenhang, die stark streuenden Werte in Abb. 17 - 19 darauf zurückzuführen sein, dass die Zusammenhänge zwischen Beschäftigtenzahlen und Umsätzen in unterschiedlichen Branchen sehr unterschiedlichen Trends folgen (vgl. die *Clusterung* nach Branchen in Abb. 20), die dann - wie die Einkommen von Männern und Frauen in Abb. 16 - besser getrennt untersucht werden sollten.

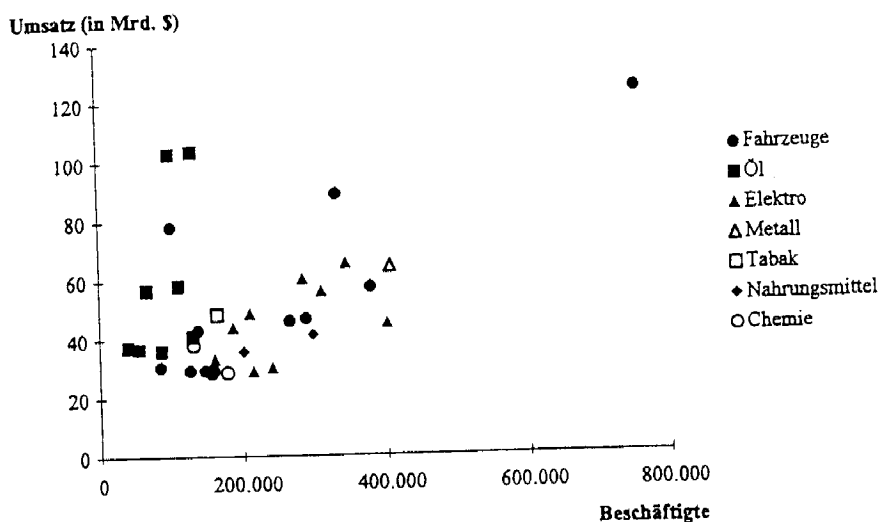


Abb. 20: Beschäftigtenzahlen und Umsätze in 35 Industrieunternehmen

Streudiagramm, Regressions- und Korrelationsanalyse verlangen metrische Daten. Bei der Untersuchung von Zusammenhängen zwischen qualitativen Merkmalen wird man sich auf die Darstellung in Tabellen und die Ermittlung eines *Kontingenzkoeffizienten* (der ähnlich wie der Pearsonsche Korrelationskoeffizient zu interpretieren ist) beschränken müssen.

Bei der Interpretation von Trend, Regression, Korrelation bzw. Kontingenz ist Vorsicht geboten: Zum einen sind Extrapolationen über den vorliegenden Datensatz hinaus jedenfalls problematisch (z. B. längerfristige Prognosen bei Zeitreihen), weiters sollten Verallgemeinerungen, die über die vorliegenden Daten hinausgehen („Hochrechnungen“), der schließenden Statistik vorbehalten bleiben und schließlich sind eventuell konstatierte Zusammenhänge zunächst nur formaler Art und ohne tiefere, kontextbezogene Einsichten in mögliche Ursachen und Wirkung nicht kausal interpretierbar: Ob die häufigen Absenzen mancher Schüler die Ursache für schlechte Noten sind oder die schlechten Noten Ursache für häufige Absenzen (oder ob der Zusammenhang doch viel komplexer ist), lässt sich anhand von Regression und Korrelation allein nicht beurteilen, eine kausale Interpretation der hohen Korrelation zwischen dem Verschwinden der Störche und dem drastischen Geburtenrückgang in einer schwedischen Kleinstadt dürfte bei schulpflichtigen Kindern doch berechtigte Zweifel auslösen.

6. Resumé

In der folgenden Tabelle sind die globalen Ideen, lokalen Bedeutungen und zentralen Tätigkeiten der beschreibenden Statistik noch einmal übersichtlich zusammengestellt:

BESCHREIBENDE STATISTIK		
Ordnen und Darstellen von vorhandenen (erhobenen) Daten, Charakterisierung der verfügbaren Daten und Aussagen darüber.		
Globale Ideen	Lokale Bedeutungen	Zentrale Tätigkeiten
<p>MUSTER ERKENNEN und SICHTBAR MACHEN</p> <p>RAFFUNG</p>	<p>Möglichkeiten, Grenzen und Probleme der Datenerhebung; Datentypen</p> <p>Aussagekraft tabellarischer, halbgrafischer oder grafischer Darstellungen</p> <p>Deutung diverser Zentral- und Streuungsmaße, von Trend (Regression) und Korrelation bzw. Kontingenz</p>	<p>Konkretisieren des Problems; Erheben von Daten</p> <p>Daten ordnen und (tabellarisch oder grafisch) übersichtlich darstellen</p> <p>Kennzahlen ermitteln</p>

Literatur

- FISCHER, R. (1986): Zum Verhältnis von Mathematik und Kommunikation. In: *mathematica didactica* 9, S. 119-131.
- FISCHER, R. und MALLE, G. (1989): *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim-Wien-Zürich.
- KRÖPFL, B., PESCHEK, W., SCHNEIDER, E. und SCHÖNLIEB, A. (1994): *Angewandte Statistik. Eine Einführung für Wirtschaftswissenschaftler und Informatiker*. Hanser Verlag, München-Wien.
- KRONFELLNER, M. und PESCHEK, W. (1998): *Angewandte Mathematik 4*. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.
- REICHEL, H.-C., HANISCH, G. und MÜLLER, R. (1987): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

Konvergenz in der sechsten Klasse

Rudolf Taschner, Wien

Das Thema konvergenter Folgen ist jenes, welches in der Schule am nächsten an die „reine“ Mathematik heranführt — dementsprechend anspruchsvoll und anwendungsfremd wird es empfunden.

Die hier präsentierte Behandlung dieses Themas ist ein Auszug (ohne die eigentlich das Karnstück bildenden Übungsbeispiele) eines Kapitels eines in Kürze erscheinenden „Übungs- und Lehrbuches“ für die Mathematik an Oberstufen von AHS. Es wird wesentlich darauf Wert gelegt, dass der *Kern* des zu behandelnden Stoffes *möglichst früh* herausgeschält wird, sodass man im Unterricht fast an jeder Stelle abbrechen kann, ohne sich dem Vorwurf aussetzen zu müssen, Wesentliches nicht erwähnt zu haben. Statt Folgen und Grenzwerten steht die *geometrische Reihe* als das *Paradebeispiel* aller Konvergenzuntersuchungen am Beginn; aus ihr werden alle weiteren Begriffe entwickelt.

Motivation: Das Paradoxon des Zenon

Zenon von Elea (geb. um -495, gest. um -430) war ein begeisterter Anhänger und Gefolgsmann des Parmenides (geb. um -520, gest. um -450), welcher lehrte, dass uns unsere Sinne *betrügen*, wenn sie uns vorgaukeln, es gäbe in der Welt irgendwelchen Wandel. In Wahrheit — so meinte Parmenides — ist der Kosmos unveränderbar *starr*. Jede Bewegung, die wir wahrnehmen, wäre bloß *Sinnestäuschung*.

Diese wahrhaft sonderbare Ansicht seines Lehrers meinte Zenon *logisch begründen* zu können. Er verwob seine Beweisführung in eine Geschichte, in der *Achill*, der sagenhafte Held und schnellste Läufer der Antike, eine *Schildkröte*, das langsamste Tier, das man damals kannte, einzuholen versucht:

Um sich eine bildhafte Vorstellung machen zu können, nehmen wir an, Achill laufe zehnmal so schnell wie die Schildkröte, und zu Beginn habe die Schildkröte einen Vorsprung von 900 Meter. Dann ist zu dem Zeitpunkt, an dem Achill die 900 Meter zurückgelegt hat, die Schildkröte immer noch 90 Meter voraus. Wenn Achill diese 90 Meter bewältigt hat, bleibt der Schildkröte immer noch ein Vorsprung von 9 Meter. Und selbst wenn Achill diese 9 Meter in Windeseile durchlaufen hat, die Schildkröte kriecht immer noch mit einem Vorsprung von 90 Zentimeter vor ihm.

Zenon teilt diesen unbestreitbaren Sachverhalt seinen verblüfften Zuhörern mit folgenden Worten mit: „*Immer*, wenn Achill den ursprünglichen Ort der Schildkröte erreicht, ist sie ihm ein Stück Weges voraus. Wenn dies tatsächlich *immer* der Fall ist, wie gibt es dann *je* die Möglichkeit, dass Achill die Schildkröte einholt?“

Und auf den arglosen Einwurf seines Publikums, man *sehe* doch, dass Achill die Schildkröte erreicht, entgegnet Zenon, ganz Schüler des Parmenides: „Seht ihr, so betrügen euch die Sinne!“

Die Summenformel der geometrischen Reihe

Einen ersten Einblick in das Geheimnis der Geschichte des Zenon gewinnt man, wenn man die einzelnen Strecken, die Achill zurücklegt, zu addieren versucht: Nehmen wir einen Kilometer als Einheit an, dann lauten die von Zenon genannten Strecken addiert:

$$0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + \dots$$

Führt man ganz naiv diese Addition durch, bemerkt man, dass jeder Summand die vorhergehende Summe nur dadurch ändert, dass er sie um eine weitere Ziffer 9 in der folgenden Nachkommastelle bereichert:

$$0,9 + 0,009 = 0,99,$$

$$0,99 + 0,009 = 0,999,$$

$$0,999 + 0,0009 = 0,9999,$$

und so weiter.

Die gesamte Überholstrecke wäre somit die „unendliche Dezimalzahl“

0,999...99...

mit „unendlich vielen Neunern nach dem Komma“ — doch worum handelt es sich dabei eigentlich?

Geschickter ist es, so zu argumentieren: Wenn Achill zehnmal so schnell läuft wie die Schildkröte und dabei die Strecke der Länge s zurücklegt, hat die Schildkröte nur eine Strecke der Länge $s/10$ durchlaufen. Wenn im Speziellen s die gesuchte Überholstrecke darstellt, muss für sie die Gleichung

$$s = 0,9 + \frac{s}{10}$$

gelten. Ihre Lösung führt nach Multiplikation beider Seiten mit 10 auf

$$10s = 9 + s \quad | -s$$

$$9s = 9 \quad | :9$$

$$s = 1.$$

Wir sehen, dass Achill die Schildkröte nach genau einem Kilometer überholt hat. Überdies erkennen wir, dass die oben angeschriebene „unendliche Dezimalzahl“ mit 1 übereinstimmt:

$$0,999...99... = 1.$$

Das eben gebrachte Argument hängt keineswegs davon ab, dass wir der Schildkröte gerade einen Vorsprung von 900 Meter gewährten und Achill genau zehnmal so schnell laufen ließen: Wenn die Schildkröte einen Vorsprung der Länge a besitzt und ihre Laufgeschwindigkeit sich von der des Achill um den Faktor q unterscheidet, gelingt dieses Argument genauso: Legt Achill die Strecke s zurück, hat die Schildkröte die Strecke sq durchlaufen. Wenn im Speziellen s die gesuchte Überholstrecke ist, besteht für sie die Gleichung

$$s = a + sq,$$

welche (im Falle $q \neq 1$) folgendermaßen gelöst wird:

$$s = a + sq \quad | -sq$$

$$s(1 - q) = a \quad | : (1 - q)$$

$$s = a \cdot \frac{1}{1 - q}.$$

Zenon argumentiert: Zuerst hat Achill den Vorsprung a zu durchlaufen und die Schildkröte ist inzwischen die Strecke aq voraus, dann hat Achill den verbleibenden Vorsprung aq zu durchlaufen und die Schildkröte hat inzwischen den Weg $aq \cdot q = aq^2$ zurückgelegt, dann hat Achill diesen Vorsprung aq^2 zu durchmessen, während die Schildkröte ihm mit der Strecke $aq^2 \cdot q = aq^3$ voraus ist, und so weiter. Im Lichte der obigen Überlegung behaupten wir, dass die für die gesamte Überholstrecke zu bildende *unendliche* Summe

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

in Wahrheit *nicht* — wie Zenon meinte — *unbewältigbar* ist, sondern den oben berechneten Wert s liefert.

Geometrische Reihen

Nicht nur bei der Geschichte des Zenon, immer wieder kommt es vor, dass sich ein Prozess ununterbrochen wiederholt und dabei der Reihe nach Summanden $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ einer „unendlichen Summe“, einer sogenannten *Reihe*,

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

liefert, die man zu berechnen versucht.

Wenn sich in einer Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

jeder Summand a_n vom vorhergehenden Summanden a_{n-1} um den gleichen Faktor $q \neq 1$ unterscheidet,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

spricht man von einer *geometrischen Reihe*. Setzt man $a_0 = a$, sind $a_1 = aq, a_2 = aq^2, a_3 = aq^3, \dots$, und ihre *Summenformel* lautet:

$$s = a \cdot \frac{1}{1-q}$$

Periodische Dezimalzahlen

Eine sogenannte *periodische unendliche Dezimalzahl* wie zum Beispiel

$$p = 1,153846153846153846\dots153846\dots,$$

in der sich — nach einer sogenannten *Vorperiode*, die hier 1,1 lautet — in den Nachkommastellen eine endliche Ziffernfolge — in diesem Beispiel die Ziffernfolge 153846 — andauernd wiederholt, fassen wir als geometrische Reihe auf. Im vorliegenden Beispiel schreiben wir nämlich

$$p = 1,1 + s$$

mit

$$\begin{aligned} s &= 0,0153846153846153846\dots153846\dots = \\ &= 0,0153846 + \\ &+ 0,0000000153846 + \\ &+ 0,0000000000000153846 + \\ &+ \dots = \\ &= 1,53846 \cdot 10^{-2} + 1,53846 \cdot 10^{-8} + 1,53846 \cdot 10^{-14} + \dots \end{aligned}$$

Hier lautet

$$q = \frac{1,53846 \cdot 10^{-8}}{1,53846 \cdot 10^{-2}} = 10^{-6}.$$

Darum ist

$$\begin{aligned} s &= 1,53846 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{1}{1-10^{-6}} = 1,53846 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{10^6-1} = \frac{153846}{999999} \cdot 10^{-1} = \\ &= \frac{2}{13} \cdot 10^{-1} = \frac{2}{130}. \end{aligned}$$

Dies ergibt für p das Resultat

$$p = \frac{11}{10} + \frac{2}{130} = \frac{29}{26}.$$

Was hier im Speziellen für $p = 29/26$ gezeigt wurde, gilt natürlich ganz allgemein:

Jede periodische unendliche Dezimalzahl stellt die Summe einer (endlichen) Dezimalzahl und einer geometrischen Reihe dar. Verwendet man für die geometrische Reihe die Summenformel, wird die periodische unendliche Dezimalzahl in Form einer *rationalen* Zahl geschrieben.

Berechtigter Zweifel an der Summenformel

Die Summenformel der geometrischen Reihe scheint Zenon nach Strich und Faden zu widerlegen. In Wahrheit ist dies jedoch *nicht* der Fall. Zenon könnte, hätte man ihm — wie oben erläutert — die Summenformel der geometrischen Reihe entgegengehalten, auf folgende Weise erfolgreich gegen diese ankämpfen:

Stellen wir uns vor, Achill und die Schildkröte *vertauschen ihre Rollen*: die zehnmal so langsame Schildkröte läuft dem Achill nach, der bereits einen Vorsprung von 900 Meter hat. Wenn die Schildkröte die 900 Meter mühsam zurückgelegt hat, ist ihr Achill bereits 9000 Meter im Vorsprung. Und wenn die Schildkröte diese 9000 zusätzlichen Meter gekrochen ist, hat Achill einen noch größeren Vorsprung von 90000 Meter. Einigen wir uns wieder auf einen Kilometer als Längeneinheit, bürden wir der Schildkröte auf, eine Strecke der Länge

$$0,9 + 9 + 90 + 900 + 9000 + \dots$$

zu durchlaufen — und niemand wird glauben, dass sie dabei jemals Achill erreicht. Trotzdem handelt es sich bei der oben angeschriebenen Strecke um eine geometrische Reihe mit $a = 0,9$ und $q = 10$. In die Summenformel der geometrischen Reihe eingesetzt, ergibt dies

$$s = 0,9 \cdot \frac{1}{1-10} = -0,1.$$

Niemand wird ernsthaft das absurde Resultat

$$0,9 + 9 + 90 + 900 + 9000 + \dots = -0,1$$

akzeptieren!

Zenon hätte mit diesem Gegenargument entdeckt, dass die obige Herleitung der Summenformel einer geometrischen Reihe *nicht korrekt* sein kann, ihn daher *nicht* widerlegt. Ein *Rechenfehler* ist in der Herleitung nicht zu finden. Sie leidet vielmehr an einer *logischen Unterlassungssünde*: Bisher wissen wir nämlich nicht, *was man überhaupt unter einer Summe mit unendlich vielen Summanden versteht*. Darüber gilt es, sich Klarheit zu verschaffen.

Geometrische Summen

Statt *Reihen*

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

mit *unendlich* vielen Summanden zu betrachten, beschränken wir uns nun auf *Summen*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1},$$

in denen nur *endlich* viele Summanden auftreten — in der obigen Summe liegen N Summanden vor.

Eine *geometrische Summe* liegt vor, wenn — wie bei der geometrischen Reihe — das Verhältnis jedes nachfolgenden Summanden a_n zum vorhergehenden Summanden a_{n-1} stets den gleichen Wert $q \neq 1$ annimmt:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q, \quad (n = 1, 2, \dots, N-1).$$

Setzen wir $a_0 = a$, sind daher $a_1 = aq$, $a_2 = aq^2$, ..., $a_{N-1} = aq^{N-1}$.

Wenn vom Wert einer geometrischen Summe spricht und diesen

$$s_N = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{N-1}$$

nennt, befindet man sich — im Gegensatz zur Summenformel einer geometrischen *Reihe* — noch auf logisch abgesichertem Boden. Mit einem klugen Trick kann man s_N berechnen: Beide Seiten der obigen Formel mit q multipliziert, ergibt:

$$qs_N = aq + aq^2 + \dots + aq^{N-1} + aq^N.$$

Im Vergleich zu s_N fehlt hier auf der rechten Seite der Summand a , hingegen ist der Summand aq^N neu dazugekommen. Dies bedeutet:

$$\begin{aligned} qs_N &= s_N - a + aq^N & | -s_N \\ s_N(q-1) &= a(q^N-1) & | : (q-1) \\ s_N &= a \cdot \frac{q^N-1}{q-1}. \end{aligned}$$

Den zuletzt genannten Bruch kann man mit -1 erweitern (was im Falle $q < 1$ günstig ist, weil dadurch der Nenner positiv wird):

$$s_N = a \cdot \frac{1-q^N}{1-q}.$$

Eine aus N Summanden bestehende geometrische Summe besitzt die Summenformeln

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{N-1} = a \cdot \frac{q^N-1}{q-1} = a \cdot \frac{1-q^N}{1-q},$$

wobei im Falle $q > 1$ die erstgenannte und im Falle $q < 1$ die zweitgenannte Formel zu bevorzugen sind.

Nun gilt es zu verstehen, wie man von diesem Ergebnis zur geometrischen *Reihe* mit *unendlich* vielen Summanden zurückgelangt:

Die Konvergenz und Divergenz der Potenzen einer positiven Zahl

Wir betrachten zu diesem Zweck eine Abfolge konkreter Beispiele:

Es sind natürliche Hochzahlen n zu bestimmen, für die $b^n < \varepsilon$ zutrifft, wenn die positive Basis $b < 1$ und die Zahl ε folgendermaßen gegeben sind:

a) $b = 0,8$,	$\varepsilon = 0,04$	b) $b = 0,9$,	$\varepsilon = 0,007$
c) $b = 0,999$,	$\varepsilon = 0,0001$	d) $b = 0,9999$,	$\varepsilon = 0,00001$.

Lösung: Statt die Ungleichung $b^n < \varepsilon$ betrachten wir zunächst die Gleichung

$$b^x = \varepsilon,$$

welche mit Hilfe des Logarithmus sofort gelöst werden kann:

$$b^x = \varepsilon \quad | \ln$$

$$x \cdot \ln b = \ln \varepsilon \quad | : \ln b$$

$$x = \frac{\ln \varepsilon}{\ln b}.$$

Nun beachten wir, dass wegen $b < 1$ aus $y > x$ die Ungleichung $b^y < b^x$ folgt. Darum trifft für alle natürlichen Zahlen n mit

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln b}$$

sicher die geforderte Ungleichung

$$b^n < \varepsilon$$

zu.

Speziell ergibt sich für die einzelnen Zahlenwerte

a) $n > \ln(0,04)/\ln(0,8) = 24,74399$, d.h. $n \geq 25$.

(Tatsächlich ist noch $0,8^{24} = 0,00472$ aber bereits $0,8^{25} = 0,00378$.)

b) $n > \ln(0,007)/\ln(0,9) = 47,09397$, d.h. $n \geq 48$.

(Tatsächlich ist noch $0,9^{47} = 0,000707$ aber bereits $0,9^{48} = 0,000636$.)

c) $n > \ln(0,0001)/\ln(0,999) = 9205,73443$, d.h. $n \geq 9206$.

(Tatsächlich ist noch $0,999^{9205} = 0,000100073507$ aber bereits $0,999^{9206} = 0,0000999734336$.)

d) $n > \ln(0,00001)/\ln(0,9999) = 115123,5$, d.h. $n \geq 115124$.

(Tatsächlich ist noch $0,9999^{115123} = 0,000010000498128$ aber bereits $0,9999^{115124} = 0,00000999949808$.)

Die allgemeine Rechnung des Beispiels ist offensichtlich für jede positive Basis $b < 1$ und jede positive Zahl ε anwendbar. Wir fassen die darin erhaltene Erkenntnis in der folgenden *Konvergenzaussage* zusammen:

Es sei $b < 1$ eine beliebige positive Zahl. Dann kann man zu jeder positiven Zahl ε — wie klein sie auch sein möge — eine natürliche Zahl n_0 so bestimmen, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ die Ungleichung $b^n < \varepsilon$ stimmt.

Ein weiteres Beispiel als Kontrast:

Es sind natürliche Hochzahlen n zu bestimmen, für die

$$a^n > \Omega$$

zutritt, wenn die Basis $a > 1$ und die Zahl Ω folgendermaßen gegeben sind:

- | | | | | | |
|----|-------------|------------------|----|--------------|---------------------|
| a) | $a = 2,$ | $\Omega = 10000$ | b) | $a = 1,1,$ | $\Omega = 700$ |
| c) | $a = 1,05,$ | $\Omega = 10000$ | d) | $a = 1,001,$ | $\Omega = 10^{10}.$ |

Lösung: Statt die Ungleichung $a^n > \Omega$ betrachten wir zunächst die Gleichung

$$a^x = \Omega,$$

welche mit Hilfe des Logarithmus sofort gelöst werden kann:

$$a^x = \Omega \quad | \ln$$

$$x \cdot \ln a = \ln \Omega \quad | : \ln a$$

$$x = \frac{\ln \Omega}{\ln a}.$$

Nun beachten wir, dass wegen $a > 1$ aus $y > x$ die Ungleichung $a^y > a^x$ folgt. Darum trifft für alle natürlichen Zahlen n mit

$$n > \frac{\ln \Omega}{\ln a}$$

sicher die geforderte Ungleichung

$$a^n > \Omega$$

zu.

Speziell ergibt sich für die einzelnen Zahlenwerte

a) $n > \ln(10000)/\ln(2) = 13,28771,$ d.h. $n \geq 14.$
(Tatsächlich ist noch $2^{13} = 8192$ aber bereits $2^{14} = 16384.$)

b) $n > \ln(700)/\ln(1,1) = 68,73432,$ d.h. $n \geq 69.$
(Tatsächlich ist noch $1,1^{68} = 652,68344$ aber bereits $1,1^{69} = 717,95178.$)

c) $n > \ln(10000)/\ln(1,05) = 188,77453,$ d.h. $n \geq 189.$
(Tatsächlich ist noch $1,05^{188} = 9629,156$ aber bereits $1,05^{189} = 10110,614.$)

d) $n > \ln(10^{10})/\ln(1,001) = 23037,36194,$ d.h. $n \geq 23038.$
(Tatsächlich ist noch $1,001^{23037} = 9,99638 \cdot 10^9$ aber bereits $1,001^{23038} = 1,000638 \cdot 10^{10}.$)

Die allgemeine Rechnung des Beispiels ist offensichtlich für jede Basis $a > 1$ und jede positive Zahl Ω anwendbar. Wir fassen die darin erhaltene Erkenntnis in den folgenden *Divergenzaussage* zusammen:

Es sei $a > 1$ eine beliebige Zahl. Dann kann man zu jeder positiven Zahl Ω — wie groß sie auch sein möge — eine natürliche Zahl n_0 so bestimmen, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ die Ungleichung $a^n > \Omega$ stimmt.

Geometrische Folgen und reelle Größen

Für positive $b < 1$ und $a > 1$ sind die Folgen der Potenzen

$$b, b^2, b^3, b^4, \dots \quad \text{und} \quad a, a^2, a^3, a^4, \dots$$

spezielle geometrische Folgen. Die oben formulierten Konvergenz- und Divergenzaussagen bringen wir nun mit dem System \mathbb{R} der reellen Größen in Beziehung:

In der Schule genügt die Definition reeller Zahlen als Größen, die man mit beliebiger Genauigkeit durch Dezimalzahlen erfassen kann.

Betrachten wir zunächst die geometrische Folge der Potenzen von 0,9:

$$0,9, 0,9^2 = 0,81, 0,9^3 = 0,729, 0,9^4 = 0,6561, \dots$$
$$\dots, 0,9^{43} = 0,0107753, 0,9^{44} = 0,0096977, \dots$$
$$\dots, 0,9^{87} = 0,0001045, 0,9^{88} = 0,0000940, \dots$$

Wenn man zum Beispiel eine Genauigkeit von einer genauen Nachkommastelle vereinbart, ist es im Rahmen dieser vereinbarten Genauigkeit legitim, die Potenzen $0,9^{43}$ oder $0,9^{44}$, aber auch die Potenzen $0,9^{87}$ oder $0,9^{88}$ mit Null *gleich* zu setzen — denn auf *eine* Nachkommastelle genau betrachtet besteht zwischen diesen Zahlen und Null kein Unterschied.

Wenn man präziser rechnen möchte und zum Beispiel eine Genauigkeit von drei genauen Nachkommastellen verlangt, besteht immer noch zwischen den Potenzen $0,9^{87}$ oder $0,9^{88}$ und Null *kein Unterschied* — auf drei genaue Stellen gerundet, ergeben diese Zahlen Null.

Selbst wenn jemand höchst präzise rechnen möchte und eine Genauigkeit von dreißig genauen Nachkommastellen verlangt (etwas, das in der Praxis *nie* vorkommt, uns aber als Forderung nicht stört), immer noch können wir eine Hochzahl n_0 benennen, so dass für alle Hochzahlen $n \geq n_0$ die Potenzen $0,9^n$ in dieser vereinbarten Genauigkeit mit Null *übereinstimmen*. (Man setzt in der Konvergenzaussage zum Beispiel $\epsilon = 10^{-31}$ fest. Die entsprechende Zahl $n_0 = 678$ ist dabei gar nicht sonderlich groß.)

Allgemein sagen wir daher, dass bei einer positiven Zahl $b < 1$ die geometrische Folge der Potenzen

$$b, b^2, b^3, b^4, \dots$$

die reelle Größe 0 als Grenzwert festlegt, und schreiben dafür

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b^n, \quad (0 < b < 1).$$

Das Zeichen „lim“ steht als Abkürzung des lateinischen Wortes *limes* für Grenzwall, und das darunter angeschriebene „ $n \rightarrow \infty$ “ (gelesen als „ n strebt nach unendlich“) symbolisiert das gerade zuvor Erkannte: Gleichgültig, auf wie viele (*endlich* viele) genaue Nachkommastellen man sich in der Forderung nach Präzision einigt, *immer* wird es gelingen, eine natürliche Zahl n_0 so zu bestimmen, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ die Potenzen b^n in dieser vereinbarten Genauigkeit mit 0 *übereinstimmen*.

Die geometrische Folge der Potenzen

$$a^1, a^2, a^3, a^4, \dots$$

divergiert hingegen für $a > 1$ nach unendlich. Es ist nicht verboten, diese Tatsache durch

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n, \quad (a > 1),$$

zu symbolisieren, wenn man sich dabei stets bewusst ist, dass ∞ *nichts* mit einem Element aus \mathbb{R} zu tun hat — im Gegenteil: zu jedem reellen Ω kann man eine natürliche Zahl n_0 so finden, dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $a^n > \Omega$ stimmt — bildhaft gesprochen: keine reelle Zahl kann diese Folge in Schranken halten, sie überschreitet alle Grenzen (die ursprüngliche Bedeutung des lateinischen Wortes *divergere*.)

Betrachtet man eine Zahl q mit $|q| = b < 1$, folgt aus $-b^n \leq q^n \leq b^n$ dass, sobald man die Potenz b^n (im Rahmen der vereinbarten Genauigkeit) mit Null gleichsetzen kann, man zugleich auch q^n mit Null gleichsetzen darf. Die Multiplikation von q^n mit einem Faktor a ändert an dieser Tatsache prinzipiell nichts (man muss nötigenfalls höchstens höhere Potenzen betrachten, weil die Multiplikation mit einem betragsmäßig großen a eine Kommaverschiebung bewirkt). Somit erhalten wir für geometrische Folgen einen Konvergenzatz:

Die geometrische Folge

a, aq, aq^2, aq^3, \dots

legt im Falle eines q mit $|q| < 1$ die reelle Zahl 0 als Grenzwert fest, (sie konvergiert gegen 0),

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} aq^n, \quad (|q| < 1).$$

Dies bedeutet, dass wir bei einer beliebig präzise vereinbarten Genauigkeit stets eine natürliche Zahl n_0 so benennen können, dass für alle Hochzahlen $n \geq n_0$ die Ausdrücke aq^n (im Rahmen dieser Genauigkeit) mit Null übereinstimmen.

Auch dies wird am deutlichsten anhand eines konkreten Beispiels:

Es ist eine natürliche Zahl n_0 zu bestimmen, ab der man alle Glieder der geometrischen Folge
 1000, 800, 640, 512, ...
 mit Null gleichsetzen darf, wenn man eine Genauigkeit von a) sieben, b) siebzehn, c) siebenzig
 genauen Nachkommastellen vereinbart.

Lösung: Die vorliegende geometrische Folge lautet
 1000, $1000 \cdot 0,8$, $1000 \cdot 0,8^2$, $1000 \cdot 0,8^3$, ...

Wenn wir aus
 $1000 \cdot 0,8^x = 10^{-k}$

für a) $k = 8$, b) $k = 18$, c) $k = 71$ den Wert x bestimmen, haben wir mit einer natürlichen Zahl $n_0 \geq x$ die Aufgabe sicher gelöst. Wir lösen die Gleichung gleich für beliebige k , indem wir beide Seiten logarithmieren:

$$\begin{aligned} \ln 1000 + x \cdot \ln 0,8 &= -k \cdot \ln 10 \quad | -\ln 1000, : \ln 0,8 \\ x &= \frac{-k \cdot \ln 10 - \ln 1000}{\ln 0,8}. \end{aligned}$$

Speziell erhält man hieraus die Werte

a) für $k = 8$: $x = 113,51$, daher kann man $n_0 = 114$ setzen.
 (Tatsächlich ist $1000 \cdot 0,8^{114} = 8,96 \cdot 10^{-9} = 0$, wenn man mit sieben genauen Nachkommastellen rechnet.)

b) für $k = 18$: $x = 216,70$, daher kann man $n_0 = 217$ setzen.
 (Tatsächlich ist $1000 \cdot 0,8^{217} = 9,34 \cdot 10^{-19} = 0$, wenn man mit siebzehn genauen Nachkommastellen rechnet.)

c) für $k = 71$: $x = 763,59$, daher kann man $n_0 = 764$ setzen.
 (Tatsächlich ist $1000 \cdot 0,8^{764} = 9,14 \cdot 10^{-72} = 0$, wenn man mit siebenzig genauen Nachkommastellen rechnet.)

Die Summen geometrischer Reihen

Nun kehren wir zur geometrischen Reihe

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

zurück.

Wir beschränken uns auf den Fall, dass q die Bedingung $|q| < 1$ erfüllt.

Parallel zur Reihe mit ihren unendlich vielen Summanden betrachten wir die Summe

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{N-1} = a \cdot \frac{1 - q^N}{1 - q},$$

in der nur endlich viele (nämlich N) Summanden addiert werden. Befinden wir uns im System \mathbb{R} , haben wir uns auf eine bestimmte Genauigkeit in der Angabe der reellen Größen zu einigen: Egal auf wie viele genaue Nachkommastellen man präzise rechnen möchte — immer wird man eine natürliche Zahl N_0 so finden können, dass für alle Hochzahlen $N \geq N_0$ nicht nur die Potenzen q^N (im Rahmen dieser Genauigkeit) und 0, sondern zugleich auch die Brüche

$$a \cdot \frac{1-q^N}{1-q} \quad \text{und} \quad a \cdot \frac{1-0}{1-q} = a \cdot \frac{1}{1-q}$$

miteinander übereinstimmen.

Es sei $|q| < 1$. Gleichgültig, auf wie viele (endlich viele) genaue Nachkommastellen man sich in der Forderung nach Präzision einigt, immer wird es gelingen, eine natürliche Zahl N_0 so zu bestimmen, dass alle geometrischen Summen

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{N-1}$$

mit mindestens N_0 Summanden (d.h. mit $N \geq N_0$) in dieser vereinbarten Genauigkeit mit dem Bruch

$$a \cdot \frac{1}{1-q}$$

übereinstimmen.

Diese Konvergenzaussage erlaubt, der geometrischen Reihe

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

im Falle $|q| < 1$ den Bruch

$$a \cdot \frac{1}{1-q}$$

als Summe zuzuordnen. Wir schreiben daher

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots = a \cdot \frac{1}{1-q}, \quad (|q| < 1).$$

Mit dieser Formel verbinden wir jedoch *nicht* die Vorstellung, wir hätten wirklich alle unendlich vielen Summanden der Reihe addiert. Vielmehr bedeutet diese Formel, dass man mit *beliebiger* Genauigkeit zu dieser Summe gelangt, wenn man endlich viele (aber entsprechend der geforderten Genauigkeit *hinreichend* viele) Summanden der Reihe addiert.

Zenon und die Analysis

Die Mathematik des Systems \mathbb{R} der reellen Größen heißt *Analysis*. Sie ordnet den geometrischen Reihen sinnvoll Summen zu. Sie formuliert überdies eine Bedingung — nämlich $|q| < 1$ — für die Berechnung der Summen geometrischer Reihen.

Die geometrische Reihe $0,9 + 9 + 90 + 900 + \dots$ verletzt zum Beispiel diese Bedingung. Darum erklärt die Analysis, warum Achill die Schildkröte überholt, obwohl sie anfangs einen Vorsprung besaß, während die Schildkröte Achill nie überholen wird, wenn dieser ihr voran ist — selbst wenn man Zenons Gedanken folgt.

Ist Zenon damit widerlegt?

Nur dann, wenn auch er die Analysis als gültige Mathematik anerkennt. Legt er sich jedoch darauf fest, *nur* mit rationalen Zahlen zu rechnen — ein Ziel, das fast alle Mathematiker des antiken Griechenland verfolgten — bleibt er von den Konvergenzaussagen der vorigen Abschnitte unbeeindruckt. (Denn rationale Zahlen liegen im Unterschied zu reellen Größen stets mit *endgültiger* Präzision vor; Rechnungen, bei denen eine bestimmte Zahl von genauen Nachkommastellen vereinbart ist, sind dem System \mathbb{Q} der rationalen Zahlen wesensfremd.)

Darum gelingt es zwar *nicht*, Zenon zu widerlegen. Aber wir können aus den obigen Überlegungen den folgenden Schluss ziehen: Auch Zenon erreicht mit seiner Geschichte *nicht* sein Ziel, die Unmöglichkeit von Wandel und Bewegung logisch zwingend zu beweisen. Die Analysis stellt eine Theorie dar, in der Zenons Geschichte von Achill und der Schildkröte ihre beunruhigende Pointe verliert.

Konvergente Folgen

Die aus der geometrischen Reihe

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

gebildeten geometrischen Summen

$$\begin{aligned} s_1 &= a, \\ s_2 &= a + aq, \\ s_3 &= a + aq + aq^2, \\ &\dots, \\ s_N &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{N-1}, \\ s_{N+1} &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{N-1} + aq^N, \\ &\dots \end{aligned}$$

bilden den Schlüssel zur Definition der Summe s der obigen Reihe: Einigt man sich auf eine Anzahl genauer Nachkommastellen, stimmen ab einer darauf abgestimmten natürlichen Zahl N_0 die Summen s_N für alle $N \geq N_0$ mit s überein.

Diese Definition kann man für Folgen ganz allgemein fassen:

Eine Folge von Zahlen
 $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$
heißt *konvergent*, wenn sie eine reelle Zahl s als *Grenzwert* festlegt, (sie gegen s *konvergiert*),
$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Dies bedeutet, dass wir bei einer *beliebig* präzise vereinbarten Genauigkeit stets eine natürliche Zahl n_0 so benennen können, dass für alle $n \geq n_0$ die Zahlen s_n (im Rahmen dieser Genauigkeit) mit s übereinstimmen.

Eines der bekanntesten Beispiele lautet:

Es ist herzuleiten, dass die beiden Folgen
 $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots, \frac{2n-1}{n}, \dots, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$
und
 $3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \dots, \frac{2n+1}{n}, \dots, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$
gegen den Grenzwert 2 konvergieren.
Speziell ist ein Folgeglied anzugeben, ab dem bei einer Festlegung von sieben genauen Nachkommastellen alle weiteren Folgeglieder sicher mit 2,0000000 übereinstimmen.

Lösung: Wir berechnen bei beiden Folgen den Unterschied zwischen dem allgemeinen Folgeglied und dem behaupteten Grenzwert:

$$\frac{2n-1}{n} - 2 = -\frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \frac{2n+1}{n} - 2 = \frac{1}{n}.$$

Der *Betrag* dieser Unterschiede lautet in beiden Fällen $1/n$.

Wir betrachten nun für ein *beliebiges positives* ε die *Ungleichung*

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Weil die ihr entsprechende *Gleichung*

$$\frac{1}{x} = \varepsilon$$

die Lösung

$$x = \frac{1}{\varepsilon}$$

besitzt, und weil aus $x < y$ sicher $1/y < 1/x$ folgt, ist bei einer natürlichen Zahl $n_0 > x$ das Folgende gesichert: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt $1/n < \varepsilon$. Insbesondere sind für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ die Folgeglieder

$$\frac{2n-1}{n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2n+1}{n}$$

weniger als ε von 2 entfernt.

Beim Rechnen mit reellen Zahlen hat man sich immer auf eine bestimmte Genauigkeit zu einigen: man kann *beliebig* viele, stets aber nur *endlich* viele genaue Nachkommastellen der Ergebnisse fordern. Einigt man sich auf eine Angabe der reellen Zahlen als Dezimalzahlen mit k genauen Nachkommastellen, bedeutet dies, dass $\varepsilon = 10^{-k-1}$ (d.h. $\varepsilon = 0,000\dots001$, wo die Ziffer 1 erst bei der $(k+1)$ -ten Nachkommastelle auftritt) im Rahmen dieser Genauigkeit mit 0 übereinstimmt. Deshalb stimmen auch die Folgeglieder

$$\frac{2n-1}{n} \quad \text{und} \quad \frac{2n+1}{n}$$

ab $n \geq n_0$ im Rahmen dieser Genauigkeit mit 2 überein.

Wenn zum Beispiel $k = 7$ ist (man sich also auf sieben genaue Nachkommastellen festlegt), erhält man für $\varepsilon = 10^{-8}$ die Lösung $x = 10^8$ und folglich $n_0 = 100000001$. Tatsächlich ergeben die Folgeglieder mit dieser Nummer auf sieben genaue Stellen gerundet den Wert

$$\frac{200000001}{100000001} = 1,99999999 = 2,00000000$$

und

$$\frac{200000003}{100000001} = 2,00000001 = 2,00000000 .$$

Konvergente Reihen

Liegt eine Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

mit unendlich vielen Summanden $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ vor, kann man ihr — wie im Spezialfall der geometrischen Reihe — unter bestimmten Voraussetzungen eine *Summe* s zuordnen: Man betrachtet die sogenannten *Partialsommen* der Reihe, das sind die Summen

$$\begin{aligned} s_1 &= a_0, \\ s_2 &= a_0 + a_1, \\ s_3 &= a_0 + a_1 + a_2, \\ &\dots, \\ s_N &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{N-1}, \\ s_{N+1} &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{N-1} + a_N, \\ &\dots, \end{aligned}$$

und untersucht, ob die Folge dieser Partialsommen gegen einen Grenzwert s konvergiert. Wenn dies der Fall ist, heißt dieser Grenzwert die *Summe* der Reihe, und man schreibt

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots = s.$$

Ausführlich bedeutet dies Folgendes: Einigt man sich bei der Angabe reeller Zahlen auf irgendeine Anzahl von genauen Nachkommastellen, gelingt es, eine natürliche Zahl N_0 mit folgender Eigenschaft zu finden: Für *alle* natürlichen Zahlen $N \geq N_0$ stimmen im Rahmen der vereinbarten Genauigkeit die Partialsommen

$$s_N = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{N-1}$$

mit der Summe s der Reihe überein. Betrachtet man neben $N \geq N_0$ noch eine beliebige natürliche Zahl n , muss die um weitere n Summanden vermehrte Partialsomme

$$s_{N+n} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + \dots + a_{N+n-2} + a_{N+n-1}$$

umso mehr im Rahmen der vereinbarten Genauigkeit mit s übereinstimmen. Darum ist der Unterschied der beiden Partialsommen, der sogenannte *Reihenrest*

$$s_{N+n} - s_N = a_N + a_{N+1} + \dots + a_{N+n-1}$$

im Rahmen der vereinbarten Genauigkeit *Null*.

Eine Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

konvergiert bereits dann, wenn man bei einer *beliebig* präzise vereinbarten Genauigkeit stets eine natürliche Zahl N_0 so benennen kann, dass für alle natürlichen Zahlen $N \geq N_0$ und alle natürlichen Zahlen n die Reihenreste

$s_{N+n} - s_N = a_N + a_{N+1} + \dots + a_{N+n-1}$
verschwinden. Die Summe s der Reihe stimmt (im Rahmen der vereinbarten Genauigkeit) mit jeder der Partialsummen s_N ab $N \geq N_0$ überein².

Was aus dieser Konvergenztheorie gefolgert werden kann, zeigt exemplarisch das folgende Beispiel:

Es ist zu begründen, dass die Reihe

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

konvergiert und die Summe 2 besitzt. b) Es ist zu begründen, dass die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

konvergiert. Ihre Summe ist mit einer genauen Nachkommastelle anzugeben.

Lösung: Der Trick, die Konvergenz der Reihe in a) zu beweisen, besteht darin, die Formel

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

bei der Berechnung der Partialsummen zu verwenden:

$$\begin{aligned} s_N &= 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(N-1)N} = \\ &= 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} = 2 - \frac{1}{N} = \frac{2N-1}{N}. \end{aligned}$$

Die Folge der Partialsummen lautet daher:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots, \frac{2N-1}{N}, \dots$$

Aus dem Ergebnis des obigen Beispiels wissen wir, dass diese Folge gegen 2 konvergiert. Daher ist tatsächlich

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = 2.$$

Die Methode, die Konvergenz der Reihe in b) zu beweisen, besteht darin, diese Reihe mit der Reihe in a) zu *vergleichen*: Es gilt nämlich

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}, \quad \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \quad \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}, \dots,$$

das heißt: *alle Summanden der in b) genannten Reihe sind höchstens so groß wie die Summanden der in a) genannten Reihe.*

Wir nennen die Partialsummen der in b) genannten Reihe $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$ und die Partialsummen der in a) genannten Reihe $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$. Aus der oben bewiesenen Konvergenz folgern wir: Einigt man sich bei der Angabe von reellen Größen auf irgendeine Anzahl genauer Nachkommastellen, gelingt es, eine natürliche Zahl N_0 so zu nennen, dass alle Reihenreste

$$s_{N+n} - s_N$$

verschwinden, sobald $N \geq N_0$ gilt. Umso mehr müssen die Reihenreste

$$S_{N+n} - S_N$$

verschwinden, denn die in b) genannten Summanden sind durchwegs höchstens so groß wie ihre Entsprechungen in a). Daher besitzt auch die in b) genannte Reihe eine Summe S .

Wir wissen vom obigen Beispiel, dass bei einer vereinbarten Genauigkeit von einer genauen Nachkommastelle, d.h. bei $\varepsilon = 0,01$ die Zahl $N_0 = 101$ lautet: in der Tat ist

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} + \frac{1}{100 \cdot 101} = 2 - \frac{1}{101} = 1,9901 = 2,0.$$

Um daher S mit einer genauen Nachkommastelle anzugeben, braucht man bloß die ersten 101 Summanden der in b) genannten Reihe zu addieren:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{101^2} = 1,63508 = 1,6,$$

folglich gilt auf eine Nachkommastelle genau berechnet:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = 1,6.$$

(Mit elektronischen Rechnern kann man mühelos Summen von viel mehr als hundert Summanden auswerten. Wenn man S zum Beispiel auf fünf genaue Stellen berechnen möchte, reicht es aus, die ersten 1000001 Summanden dieser Reihe zu addieren. In diesem Fall ergibt sich der Wert

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = 1,64493.)$$

Die in diesem Beispiel genannte Methode des Vergleichs von Reihen ist in vielen Fällen sehr erfolgreich. Wir fassen sie folgendermaßen zusammen:

Wenn eine Reihe

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

gegen eine Summe s konvergiert und eine zweite Reihe

$$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

so gegeben ist, dass durchwegs die Ungleichungen

$$|b_0| \leq a_0, \quad |b_1| \leq a_1, \quad |b_2| \leq a_2, \quad |b_3| \leq a_3, \quad \dots$$

bestehen, dann konvergiert auch die zweite Reihe gegen eine Summe S .

Genauer gilt Folgendes: Einigt man sich bei der Angabe reeller Größen auf irgendeine Anzahl von genauen Nachkommastellen, dann gibt es eine natürliche Zahl N_0 , sodass für alle $N \geq N_0$ die Partialsummen

$$s_N = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1}$$

im Rahmen dieser Genauigkeit bereits mit s übereinstimmen. Umso mehr nennt die Partialsumme

$$S_N = b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_{N-1}$$

(bei beliebigen $N \geq N_0$) die Summe S der zweiten Reihe auf die vereinbarte Zahl von Nachkommastellen genau.

¹ Der hier erhaltene Wert $-0,1$ ist nicht ganz sinnlos: Wenn nämlich Achill und die Schildkröte bereits vor unserem festgelegten Beginn — an dem Achill der Schildkröte 900 Meter voraus ist — unterwegs waren, dann hat 100 Meter vor der Position, welche die Schildkröte zum Zeitpunkt Null einnahm, Achill diese überholt. Eine Summe der durchwegs positiven Zahlen 0,9, 9, 90, 900, 9000, ... kann $-0,1$ jedoch nicht sein.

Auch das Wort „Niemand“ in diesem Satz ist etwas übertrieben: Euler zum Beispiel konnte einer absurden Formel wie $0,9 + 9 + 90 + 900 + \dots = -0,1$ durchaus Sinn abgewinnen — und Euler ist alles andere als ein mathematischer Niemand. Allerdings teilt heute wirklich kaum ein Mathematiker mehr Eulers Sicht der Dinge.

² Dass jede Reihe unter der in diesem Satz genannten Konvergenzbedingung eine Summe besitzt, nennt man die *Vollständigkeit* der Systems R der reellen Größen.

Zur Beschreibung und Analyse unscharfer Daten

Reinhard Viertl

Technische Universität Wien

1 Einleitung

Das Resultat einer Messung einer kontinuierlichen Größe ist keine exakte Zahl, sondern mehr oder weniger unscharf. Diese Unschärfe ist verschieden von Fehlern und kann mittels einer sogenannten unscharfen Zahl (fuzzy number) beschrieben werden. Im Folgenden werden unscharfe Zahlen mathematisch präzisiert und die Verallgemeinerung spezieller Verknüpfungen reeller Zahlen auf den Fall unscharfer Zahlen dargestellt.

2 Unscharfe Zahlen

Eine exakte Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ ist in eindeutiger Weise durch die *Indikatorfunktion* $I_{\{x_0\}}(\cdot)$, also eine reelle Funktion, deren Funktionswerte folgendermaßen definiert sind,

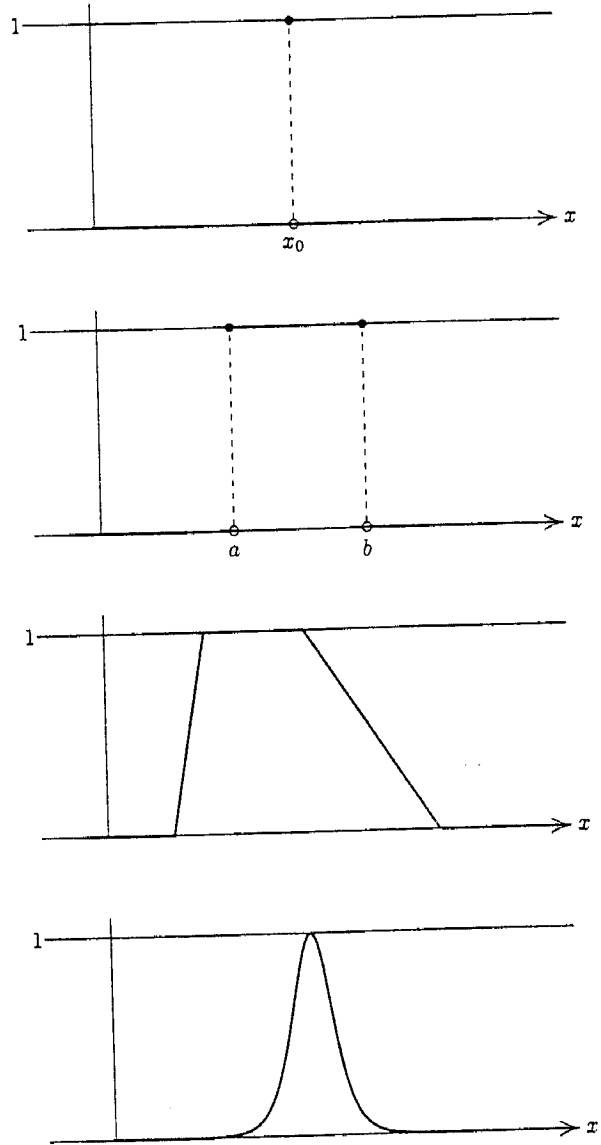
$$I_{\{x_0\}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_0 \\ 0 & \text{für } x \neq x_0, \end{cases}$$

bestimmt. In analoger Weise ist die Indikatorfunktion $I_{[a,b]}(\cdot)$ eines Intervalles $[a, b]$ durch ihre Funktionswerte folgendermaßen bestimmt

$$I_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{für } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Allgemein ist die Indikatorfunktion $I_A(\cdot)$ einer nichtleeren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$

Abbildung 1: Beispiele charakterisierender Funktionen



folgendermaßen durch ihre Funktionswerte definiert

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus A. \end{cases}$$

Es war die Idee von L.A. Zadeh, Mengen, die nicht scharf abgegrenzt sind, durch eine Verallgemeinerung von Indikatorfunktionen zu beschreiben. Dabei sind als Funktionswerte auch Zahlen zwischen 0 und 1 zulässig. Die so entstehenden Funktionen werden *Zugehörigkeitsfunktionen* genannt. Eine Zugehörigkeitsfunktion $\mu(\cdot)$ einer *unscharfen Teilmenge* A^* einer gegebenen Menge M ist eine Funktion

$$\mu: M \rightarrow [0, 1].$$

Unschärfe Zahlen x^* sind spezielle unscharfe Teilmengen der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen, für deren Zugehörigkeitsfunktionen $\xi(\cdot)$ folgendes gefordert wird:

- (1) $\exists x_0 \in \mathbb{R}: \xi(x_0) = 1$
- (2) $\forall \alpha \in (0, 1]$ ist der sogenannte α -Schnitt $C_\alpha(x^*) := \{x \in \mathbb{R}: \xi(x) \geq \alpha\}$ ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall $[a_\alpha, b_\alpha]$.

Solche Zugehörigkeitsfunktionen, welche obige Bedingungen (1) und (2) erfüllen, nennt man *charakterisierende Funktionen*.

Bemerkung: Eine unscharfe Zahl x^* ist durch ihre charakterisierende Funktion bestimmt.

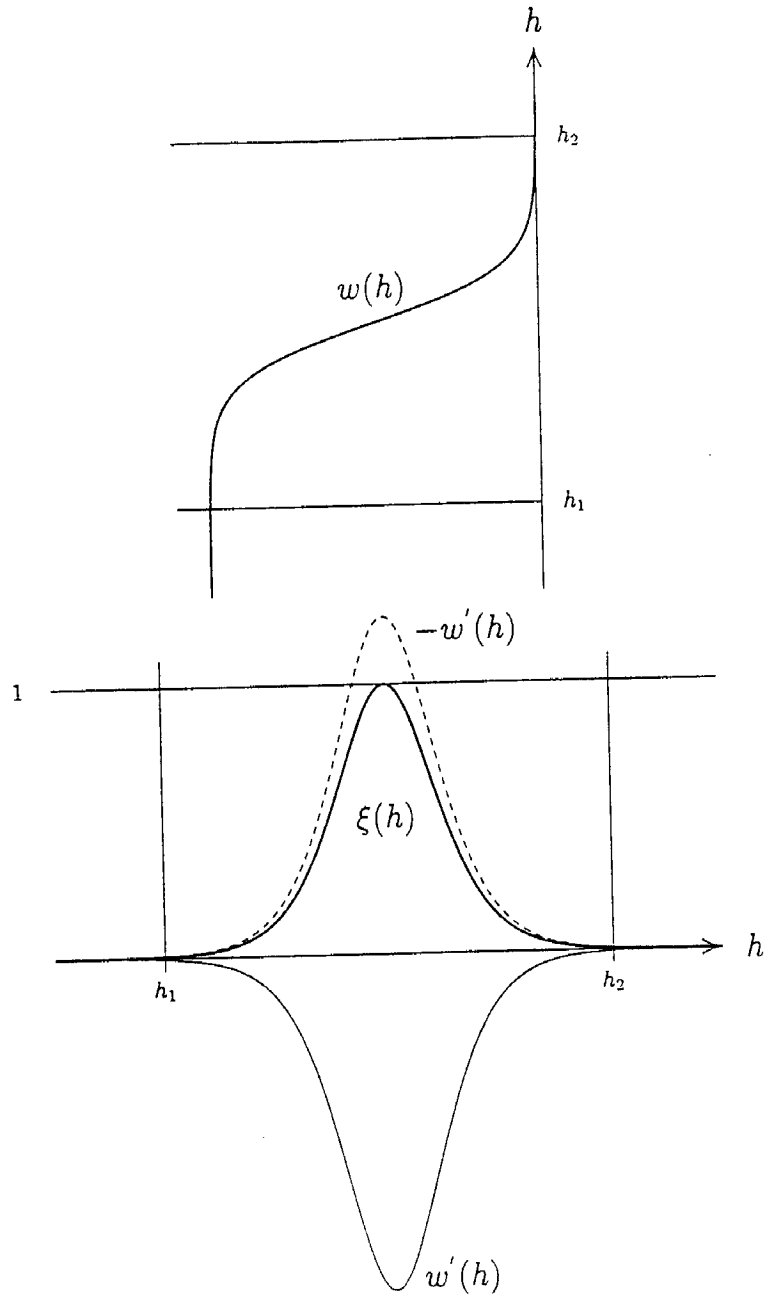
Beispiele von charakterisierenden Funktionen unscharfer Zahlen sind in Abbildung 1 dargestellt.

Ein wesentliches Problem ist die Frage, wie man die charakterisierende Funktion einer unscharfen Messung erhält. Dies ist vom konkreten Meßvorgang abhängig. Ein Beispiel ist die Beobachtung des Wasserstandes eines Flusses zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort. Dazu dient eine Meßlatte, die verschieden naß ist. Man kann hier die Feuchtigkeitsintensität $w(h)$ der Meßlatte heranziehen. (vgl. Abb. 2, oberes Diagramm).

Um die charakterisierende Funktion $\xi(h)$ der unscharfen Höhe h^* des Wasserstandes zu erhalten, differenziert man die Funktion $w(h)$, multipliziert das Resultat $w'(h)$ mit (-1) und dividiert diese Funktion $-w'(h)$ durch ihr Maximum und erhält so die charakterisierende Funktion des unscharfen Wasserstandes, symbolisch geschrieben

$$\xi(h) = \frac{-w'(h)}{\max_{h_1 \leq h \leq h_2} \{-w'(h)\}} \quad \text{für } h \in \mathbb{R}.$$

Abbildung 2: Charakterisierende Funktion eines unscharfen Wasserstandes



Für zweidimensionale Größen, wie z. B. die Lage eines Punktes auf einem Raderschirm, benötigt man das Konzept eines *unscharfen Vektors* \underline{x}^* . Unscharfe Vektoren sind durch zugehörige *vektorcharakterisierende Funktionen* $\xi_{\underline{x}^*}(\cdot, \cdot)$ beschrieben. Dies sind Funktionen von 2 reellen Variablen x und y mit Werten im Intervall $[0, 1]$, die folgende Eigenschaften erfüllen:

$$(v1) \exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2: \xi(x_0, y_0) = 1$$

$$(v2) \forall \alpha \in (0, 1] \text{ ist der sogenannte Schnitt } C_\alpha(\underline{x}^*) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \xi_{\underline{x}^*}(x, y) \geq \alpha\} \text{ eine abgeschlossene, beschränkte und sternförmige Teilmenge des } \mathbb{R}^2.$$

Beispiel: Um die vektorcharakterisierende Funktion $\xi(\cdot, \cdot)$ eines unscharfen Lagevektors aus einem Lichtpunkt zu erhalten, kann man die Helligkeitsintensität $h(x, y)$ heranziehen. Die Funktionswerte $\xi(x, y)$ von $\xi(\cdot, \cdot)$ erhält man durch

$$\xi(x, y) = \frac{h(x, y)}{\max_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} h(x, y)} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Bemerkung: Im Hinblick auf n -dimensionale unscharfe Größen ist folgende Bezeichnungsweise nützlich:

$$\underline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

allgemein

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

3 Unscharfe Funktionen

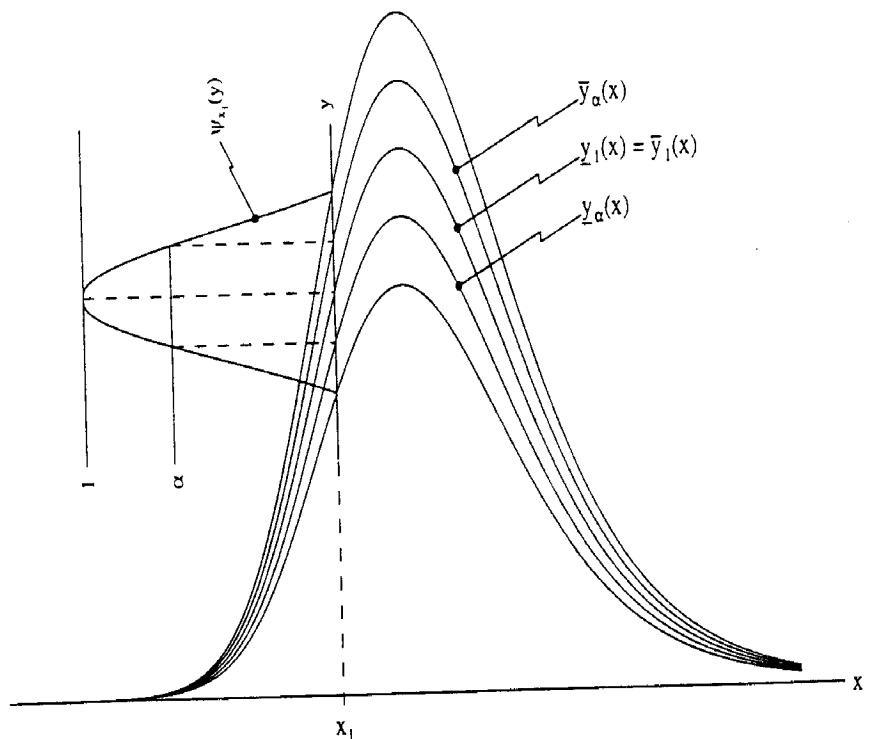
Bei der Beschreibung von Zeitverläufen von Messungen benötigt man das Konzept von Funktionen mit unscharfen Funktionswerten. In Verallgemeinerung von reellen Funktionen $y(x)$ wird jedem $x \in \mathbb{R}$ eine unscharfe Zahl $y^*(x)$ zugeordnet. Eine unscharfe reelle Funktion $y^*(\cdot)$ ist also durch eine Familie unscharfer Funktionswerte $y^*(x)$ mit entsprechenden charakterisierenden Funktionen $\psi_x(\cdot)$ bestimmt:

$$(y^*(x); x \in [a, b])$$

Zur grafischen Darstellung unscharfer Funktionen dienen die sogenannten α -Niveaukurven $\bar{y}_\alpha(\cdot)$ bzw. $\underline{y}_\alpha(\cdot)$, welche die jeweiligen Enden der α -Schnitte

$[y_\alpha(x), \bar{y}_\alpha(x)]$ der unscharfen Funktionswerte $y^*(x)$ verbindet. Für praktische Darstellungen werden einige α -Werte (z. B. 5 solche) herangezogen. Ein Beispiel ist in Abb. 3 dargestellt.

Abbildung 3: α -Niveaukurven einer unscharfen Funktion



Ein wichtiges Beispiel unscharfer Funktionen sind Zeitverläufe von Schadstoffkonzentrationen in verschiedenen Medien.

Will man daraus Gesamtschadstoffmengen ermitteln, hat man das Problem der Integration von unscharfen Funktionen, d. h.

$$\int_{t_1}^{t_2} y^*(t) dt.$$

Methoden dazu existieren und ein Literaturhinweis ist [6]. Dabei werden α -Niveaukurven verwendet, von denen vorausgesetzt wird, daß sie klassische integrierbare Funktionen sind.

4 Funktionen von unscharfen Argumenten

Bei der Analyse unscharfer Daten treten Funktionen von unscharfen Argumenten auf. Daher ist eine Verallgemeinerung klassischer, reeller Funktionen $f(\cdot)$ auf den Fall unscharfer Argumentwerte x^* notwendig.

Im Fall einer reellen Variablen x ist eine Unschärfe von x^* durch eine charakterisierende Funktion $\xi(\cdot)$ gegeben. Der Funktionswert $f(x^*)$ wird auch eine unscharfe Größe y^* , deren charakterisierende Funktion $\psi(\cdot)$ mittels des sogenannten *Fortsetzungsprinzips* von L.A. Zadeh gegeben ist. Dieses definiert die Zugehörigkeitsfunktion $\psi(\cdot)$ folgendermaßen:

$$\psi(y) = \begin{cases} \sup \{ \xi(x) : f(x) = y \} & \text{falls } f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ 0 & \text{falls } f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Die Funktion $\psi(\cdot)$ ist eine Zugehörigkeitsfunktion einer unscharfen Teilmenge von \mathbb{R} . Für allgemeine Funktionen $f(\cdot)$ folgt nicht zwingend, daß $\psi(\cdot)$ auch eine charakterisierende Funktion einer unscharfen Zahl ist. Für stetige Funktionen $f(\cdot)$ gilt folgender

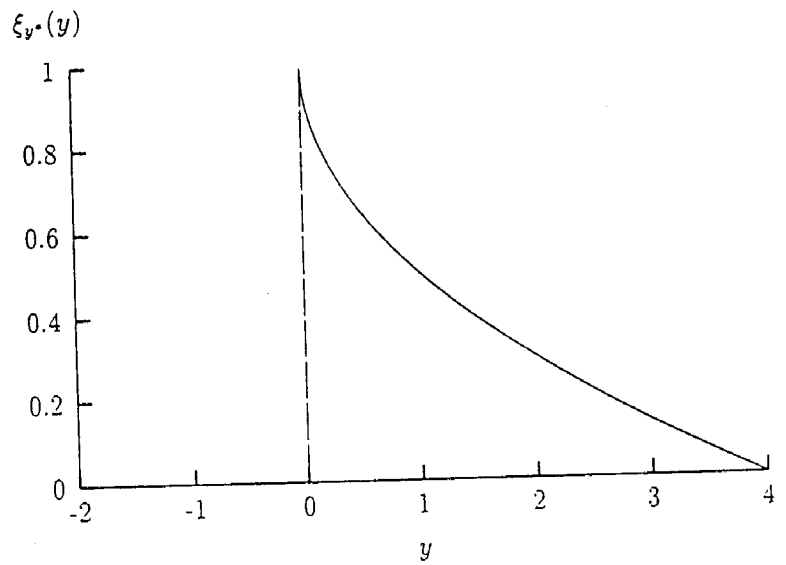
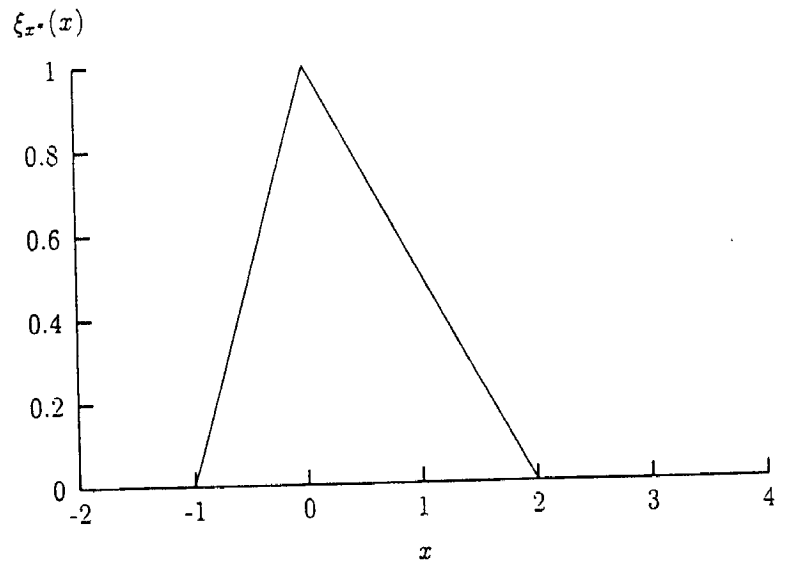
Satz: Ist \underline{x}^* ein unscharfer Vektor mit vektorcharakterisierender Funktion $\xi(\cdot, \dots, \cdot)$ und $f(\cdot, \dots, \cdot)$ eine stetige, klassische reellwertige Funktion, so ist die oben beschriebene Funktion $\psi(\cdot)$ eine charakterisierende Funktion im Sinne von Abschnitt 1 und für die α -Schnitte $C_\alpha(f(\underline{x}^*))$ gilt:

$$C_\alpha(f(\underline{x}^*)) = \left[\min_{\underline{x} \in C_\alpha(\underline{x}^*)} f(\underline{x}), \max_{\underline{x} \in C_\alpha(\underline{x}^*)} f(\underline{x}) \right] \quad \forall \alpha \in (0, 1].$$

Den Beweis findet man in [4].

Beispiel: Die charakterisierende Funktion des Quadrates einer unscharfen Zahl ist in Abbildung 4 dargestellt. Der obere Teil der Abbildung zeigt die charakterisierende Funktion der unscharfen Zahl, der untere Teil die charakterisierende Funktion ihres Quadrates.

Abbildung 4: Quadrat $y = (x^-)^2$ einer unscharfen Zahl x^-



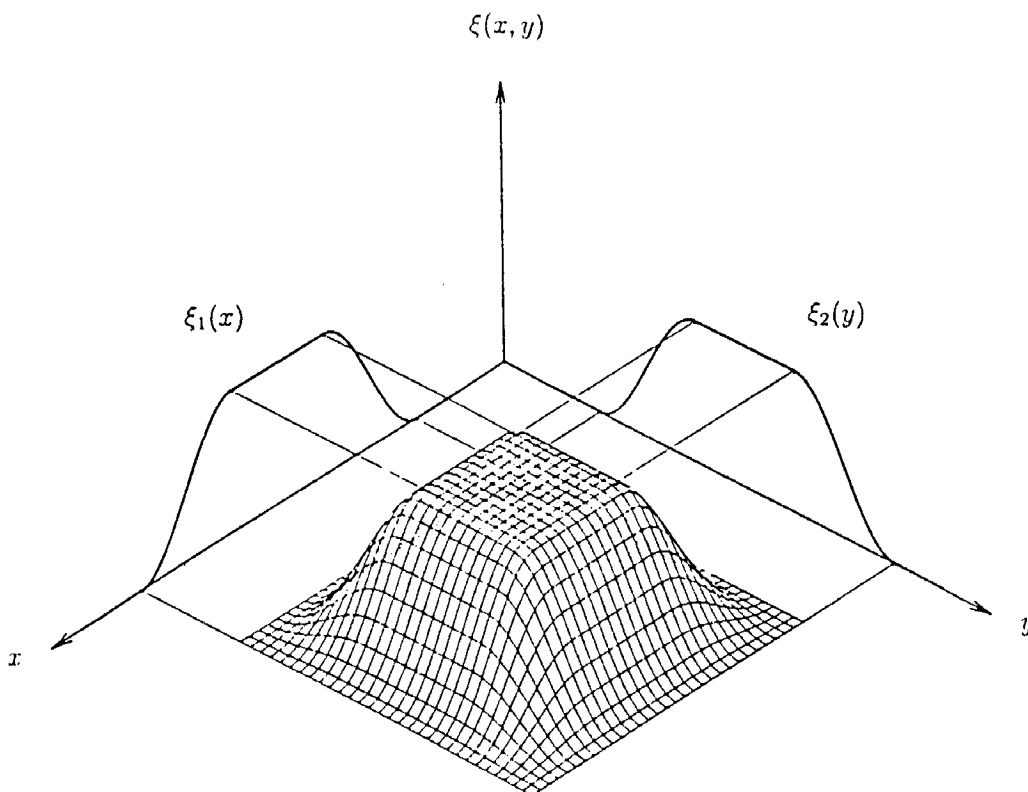
5 Addition unscharfer Zahlen

Um unscharfe Zahlen x^* und y^* zu addieren kann man das Fortsetzungsprinzip heranziehen. Die verallgemeinerte Addition $x^* \oplus y^*$ liefert als Resultat eine unscharfe Zahl $z^* = x^* \oplus y^*$, deren charakterisierende Funktion folgendermaßen gefunden werden kann: Um das Fortsetzungsprinzip anwenden zu können, müssen die unscharfen Zahlen x^* und y^* zuerst zu einem unscharfen Vektor $\underline{x}^* = (x, y)^*$ kombiniert werden. Die vektorcharakterisierende Funktion $\xi(\cdot, \cdot)$ des unscharfen Vektors \underline{x}^* erhält man aus den charakterisierenden Funktionen $\xi_1(\cdot)$ von x^* und $\xi_2(\cdot)$ von y^* durch folgende Kombination:

$$\xi(x, y) = \min \{ \xi_1(x), \xi_2(y) \} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

In Abbildung 5 ist die Kombination zweier unscharfer Zahlen zu einem unscharfen Vektor durch die charakterisierenden Funktionen und die erzeugte vektorcharakterisierende Funktion dargestellt.

Abbildung 5: Kombination zweier unscharfer Zahlen



Mit Hilfe der vektorcharakterisierenden Funktion von \underline{x}^* kann durch die Anwendung des Fortsetzungsprinzips die charakterisierende Funktion $\zeta(\cdot)$ der unscharfen Summe $x^* \oplus y^*$ ermittelt werden:

$$\zeta(z) := \begin{cases} \sup \{ \xi(x, y) : x + y = z \} & \text{falls } \exists(x, y) : x + y = z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung: Es läßt sich zeigen, daß die so entstandene Funktion alle Eigenschaften einer charakterisierenden Funktion hat. Die Erweiterung anderer algebraischer Operationen für den Fall unscharfer Zahlen ist mit Hilfe des unscharfen kombinierten Vektors und des Fortsetzungsprinzips möglich. Eine konkrete Fragestellung zu dieser Aufgabe ist die Ermittlung der Fläche eines Rechteckes, dessen Seitenlängen unscharf sind.

6 Zur statistischen Analyse unscharfer Daten

Auch Beobachtungen von kontinuierlichen stochastischen Größen X , wie beispielsweise Lebensdauern, sind meist unscharf (nicht zu verwechseln mit Fehlern). Daher ist die Adaption statistischer Methoden für den Fall unscharfer Daten notwendig.

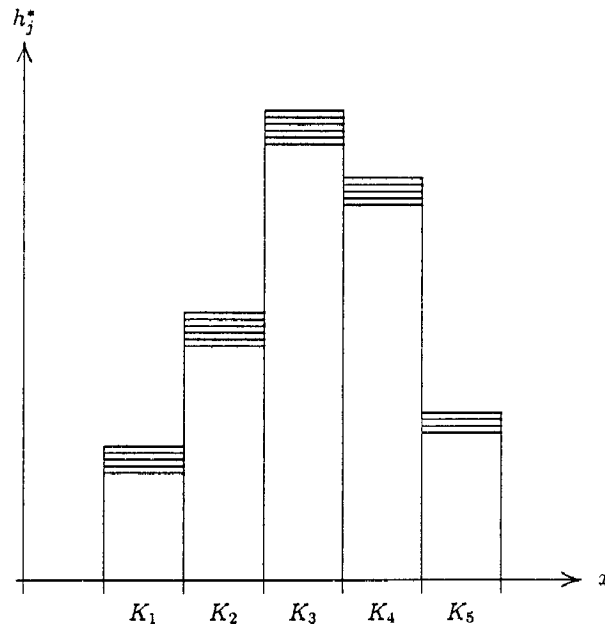
6.1 Beschreibende Statistik

Bereits in der beschreibenden Statistik, z. B. bei Histogrammen, ist die Unschärfe von Daten zu berücksichtigen, sollen nicht unrealistische Resultate entstehen.

Für unscharfe Beobachtungen kann unter Umständen nicht entschieden werden, in welcher Klasse K_j eines zu berechnenden Histogrammes eine solche unscharfe Beobachtung liegt. Aus diesem Grunde wird die Höhe eines Histogrammbalkens eine unscharfe Zahl h_j^* , deren charakterisierende Funktion aus den charakterisierenden Funktionen der Beobachtungen ermittelt wird. Grafisch dargestellt erhält man sogenannte *Fuzzy Histogramme*. Ein Beispiel ist in Abbildung 6 dargestellt.

Die Ränder der schraffierten Bereiche der Histogrammhöhen entsprechen der Anzahl jener Beobachtungen, die sicher in der jeweiligen Klasse K_j liegen bzw. der Anzahl jener Beobachtungen, die nicht sicher außerhalb von K_j liegen. Zur genauen Bestimmung der charakterisierenden Funktion der unscharfen Höhen vgl. die Arbeit [3].

Abbildung 6: *Fuzzy Histogramm*



6.2 Schließende Statistik

Eine der wichtigsten Aufgaben der schließenden Statistik ist die Schätzung von Parametern θ in stochastischen Modellen $X \sim W_\theta, \theta \in \Theta$.

Betrachtet man die Schätzung des Erwartungswertes $\mathbb{E}X$ einer eindimensionalen stochastischen Größe X auf Grundlage einer konkreten Stichprobe x_1, \dots, x_n so ist die im statistischen Sinn beste Schätzung für $\mathbb{E}X$ das sogenannte *Stichprobenmittel*

$$\bar{x}_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Allgemein sind Schätzungen Funktionen $\vartheta(x_1, \dots, x_n)$ von Stichproben.

Im Fall unscharfer Stichproben in Form von unscharfen Zahlen x_1^*, \dots, x_n^* kann man adaptierte unscharfe Schätzwerte folgendermaßen erhalten. Zuerst müssen die unscharfen Zahlen x_1^*, \dots, x_n^* zu einem unscharfen n -dimensionalen Vektor \underline{x}^* kombiniert werden. Die vektorcharakterisierende Funktion $\xi(\cdot, \dots, \cdot)$ von \underline{x}^* erhält man aus den n charakterisierenden Funktionen $\xi_1(\cdot), \dots, \xi_n(\cdot)$ der x_1^*, \dots, x_n^* folgendermaßen:

$$\xi(x_1, \dots, x_n) = \min \{ \xi_1(x_1), \dots, \xi_n(x_n) \} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Diese vektorcharakterisierende Funktion ermöglicht die Konstruktion eines unscharfen Schätzwertes mit Hilfe des Fortsetzungsprinzips. Man erhält die charakterisierende Funktion $\psi(\cdot)$ der unscharfen Schätzung $\vartheta(x_1^*, \dots, x_n^*)$ auf Grundlage der unscharfen Beobachtungen (Daten) x_1^*, \dots, x_n^* folgendermaßen: Unter Verwendung der Vektorschreibweise $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\psi(z) = \begin{cases} \sup \{ \xi(\underline{x}) : \vartheta(\underline{x}) = z \} & \text{falls } \exists \underline{x} : \vartheta(\underline{x}) = z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

An Stelle eines exakten Schätzwertes $\hat{\theta} \in \Theta$ für einen Parameter θ_0 bei theoretisch exakten Daten erhält man bei unscharfen Daten x_1^*, \dots, x_n^* einen *unscharfen Schätzwert* $\hat{\theta}^* = \vartheta(x_1^*, \dots, x_n^*)$, dessen charakterisierende Funktion $\psi(\cdot)$ ist.

Ein Beispiel für unscharfe Daten ist in Abbildung 7 dargestellt. Die charakterisierende Funktion des zugehörigen unscharfen Schätzwertes für den Erwartungswert $\theta = \mathbb{E}X$ ist in Abbildung 8 wiedergegeben.

Abbildung 7: Charakterisierende Funktionen unscharfer Daten

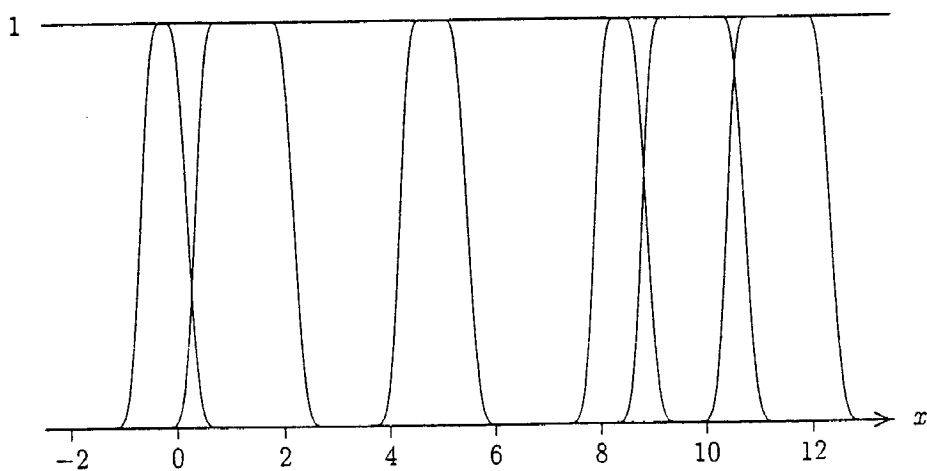
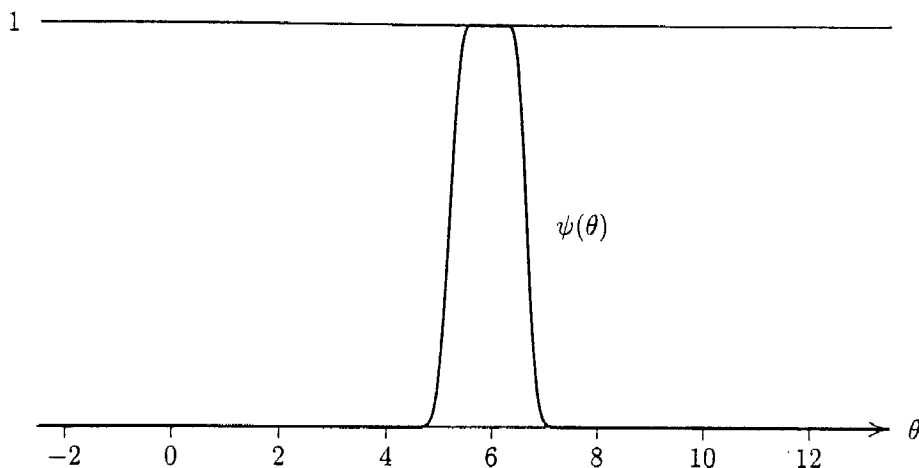


Abbildung 8: Charakterisierende Funktion der unscharfen Schätzung



Bemerkung: Es gibt Verallgemeinerungen verschiedener statistischer Verfahren auf den realistischen Fall unscharfer Daten. Ansätze dazu findet man in dem deutschsprachigen Buch [5] und ausführliche Verfahren in der Monografie [4].

Literatur

- [1] H. Bandemer, S. Gottwald: *Einführung in Fuzzy-Methoden*, 4. Auflage, Akademie Verlag, Berlin, 1993
- [2] H. Bandemer, W. Näther: *Fuzzy Data Analysis*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1992
- [3] R. Viertl, Statistics with Non-Precise Data, *Journal of Computing and Information Technology*, 4 (1996)
- [4] R. Viertl: *Statistical Methods for Non-Precise DATA*, CRC Press, Boca Raton (Florida), 1996

- [5] R. Viertl: *Einführung in die Stochastik mit Elementen der Bayes-Statistik und Ansätzen für die Analyse unscharfer Daten*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Wien, 1997
- [6] R. Viertl, S. Bodjanova: *Calculation of Integrals of Fuzzy Functions*, Forschungsbericht RIS – 1998 – 1, Institut für Statistik, Technische Universität Wien, 1998

Adresse des Autors:

O. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Reinhard Viertl
Institut für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie
Technische Universität Wien
A-1040 Wien