Mathematikaufgaben zum Lotto 6 aus 45

Maria Koth, Universität Wien

1. Die Spielregeln für das Lotto 6 aus 45

Beim Lotto 6 aus 45 geht es um die Voraussage von sechs Zahlen, die in einer bestimmten Lotto-Runde aus der Zahlenreihe 1 bis 45 gezogen werden. Die Spieler kreuzen in einem Feld eines Spielscheins, das die Zahlen 1 bis 45 enthält, sechs Zahlen an. Die Anzahl der Übereinstimmungen zwischen den vom Spieler angekreuzten Zahlen und den Gewinnzahlen entscheidet dann über den Gewinn.

Die Gewinnzahlen werden folgendermaßen ermittelt: Jeden Sonntag Abend findet (öffentlich und unter Aufsicht eines Notars) eine Lottoziehung statt. In einem durchsichtigen Ziehungsgerät befinden sich 45 mit den Zahlen 1 bis 45 beschriftete Kugeln. Nach einem Mischungsvorgang wird eine dieser Kugeln ausgeworfen. Die übrigen 44 Kugeln werden erneut gemischt, eine zweite Kugel wird ausgeworfen usw., bis sechs Gewinnzahlen und (durch eine siebente Kugel) eine Zusatzzahl bestimmt sind.

Zur Zeit sind für einen Lottotipp 8 S zu bezahlen (von 1986 bis zum Sommer 1991 nur 6S), davon entfallen 1,01 S auf einen Verwaltungskostenbeitrag und 6,99 S auf den eigentlichen Wetteinsatz. Nur 50% des gesamten Wetteinsatzes einer Runde werden als Gewinnsumme ausgeschüttet. Dieser Betrag wird auf fünf Gewinnränge aufgeteilt:

1. Rang	6 richtige Gewinnzahlen	30 %	
2. Rang	5 richtige Gewinnzahlen und Zusatzzahl	10 %	der
3. Rang	5 richtige Gewinnzahlen ohne Zusatzzahl	15 %	Gewinn-
4. Rang	4 richtige Gewinnzahlen	20 %	summe
5. Rang	3 richtige Gewinnzahlen	25 %	

Hat nun ein Spieler, zum Beispiel, genau drei der sechs Gewinnzahlen richtig angekreuzt, so gewinnt er im 5. Rang, hat er genau fünf der sechs Gewinnzahlen und die Zusatzzahl angekreuzt, so gewinnt er im 2. Rang.

Bei der Verteilung der Gewinnsumme wird nach folgenden Regeln vorgegangen:

- Der Gewinn in einem Gewinnrang schließt einen Gewinn mit demselbem Tipp in einem niedrigeren Gewinnrang aus (z.B. „6 Richtige" sind nicht zugleich auch „4 Richtige").
- Liegen mehrere Gewinntipps im gleichen Rang vor, so wird die Gewinnsumme dieses Ranges zu gleichen Teilen auf die gewinnberechtigten Tipps aufgeteilt (Einzelgewinne werden dabei auf ganze Schillingbeträge abgerundet).
- Wird in einem Rang kein Gewinn ermittelt, so wird der zugehörige Gewinnsummenanteil dem gleichen Rang der nächstfolgenden Runde zugeschlagen (Jackpotprinzip).

Auf einem normalen Lottoschein können bis zu 12 Lottotipps abgegeben werden. Der Spieler kann darüberhinaus wählen, ob seine Tipps nur einer bzw. an bis zu zehn unmittelbar auf die Abgabe aufeinanderfolgenden Lotto-Runden teilnehmen sollen.

Daneben gibt es auch noch die sogenannten Lotto-Systemscheine, auf denen 48 Variationssysteme angeboten werden. Bei den Systemen 0/07, 0/08, 0/09,...., 0/12 kreuzt der Spieler 7, 8, 9, ... bzw. 12 „Wahlzahlen" an. Das entspricht der Abgabe aller möglichen Tippreihen, die aus Sechserkombinationen dieser Wahlzahlen gebildet werden können. Entscheidet sich der Spieler, zum Beispiel, für das System 0/12, so kreuzt er 12 der Zahlen 1 bis 45 als Wahlzahlen an und hat damit insgesamt $\binom{12}{6} = 924$ Tippreihen ausgewählt. Für dieses Systemspiel sind daher $924*8 = 7392$ S zu bezahlen.

Bei den Systemen 1/07, 1/08, ..., 1/11, 2/07, 2/08,...,2/13, 3/05, 3/06,....,3/18, 4/04, 4/05, ...,4/18 sowie 5/40 hat der Spieler Bankzahlen und Wahlzahlen anzugeben.Hier bedeutet, zum Beispiel, 3/08, dass man 3 Bankzahlen und 8 Wahlzahlen ankreuzt. In diesem Fall hat man alle jene Tippreihen gewählt, die einerseits die 3 Bankzahlen und daneben alle möglichen Dreierkombinationen aus den 8 Wahlzahlen enthalten. Insgesamt sind das $\binom{8}{3} = 56$ Tippreihen, daher sind für dieses Systemspiel $56*8 = 448$ S zu bezahlen.

Bei den Systemspielen werden also die Tippreihen aus wenigen vom Spieler ausgewählten Zahlen kombiniert. Das Ausfüllen eines Systemscheins bringt eine wesentliche Schreibersparnis gegenüber dem Ankreuzen der entsprechenden Anzahl von Tippreihen auf normalen Lottoscheinen, und bietet dem Spieler einen Anreiz, viele Tipps abzugeben. Auch bei den Systemscheinen kann der Spieler wählen, ob seine Tipps nur an einer oder an bis zu zehn aufeinanderfolgenden Spielrunden teilnehmen soll.

Mit den Lottoscheinen bzw. den Lottosystemscheinen kann außerdem an einem weiteren Glücksspiel, dem „Joker" teilgenommen werden, das unabhängig vom Lotto 6 aus 45 ist. Dazu muss das vorgesehene „Ja"-Feld auf dem Spielschein angekreuzt und ein zusätzlicher Einsatz von 14 S geleistet werden.

2. Daten zum österreichischen Lotto 6 aus 45

Der Kundendienst der österreichischen Lotterien stellt auf Anfrage Jahresübersichten mit den in den einzelnen Runden gezogenen Gewinnzahlen und den dabei aufgetretenen Gewinnquoten zur Verfügung. In den folgenden Statistiken wird auf die insgesamt 538 Lotto-Runden der Jahre 1986 bis 1996 Bezug genommen. Da die Zusatzzahl nur für den 2. Gewinnrang relevant ist, wird diese nicht berücksichtigt.

a) Häufigkeit des Auftretens der Zahlen 1 bis 45 unter den sechs Gewinnzahlen der 538 Lotto-Runden von 1986 bis 1996:

1	6	11	16	21	26	31	36	41
71	63	66	75	70	96	72	79	64
2	7	12	17	22	27	32	37	42
68	88	70	74	77	81	63	68	78
3	8	13	18	23	28	33	38	43
68	69	68	64	72	74	78	66	81
4	9	14	19	24	29	34	39	44
78	65	59	64	66	75	60	79	70
5	10	15	20	25	30	35	40	45
84	70	67	68	73	83	71	71	62

b) Häufigkeitsverteilung für die kleinste Zahl unter den sechs Gewinnzahlen der 538 Lotto-Runden von 1986 bis 1996:

kleinste Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Häufigkeit	71	56	56	55	51	36	45	31	21	20
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	10	16	17	8	10	7	8	4	3	1
	21	22	23 bis 26		27	28 bis 31		32	33 bis 45	
	7	2	0		2	0		1*)	0	

*) Ziehung am 17.5.87: Gewinnzahlen 32, 33, 35, 41, 43, 45 (Zusatzzahl 39), 6 Sechser

c) Häufigkeitsverteilung für die größte Zahl unter den sechs Gewinnzahlen der 538 Lotto-Runden von 1986 bis 1996:

größte Zahl	1 bis 18		19	20	21	22	23	24	25	26
Häufigkeit	0		1*)	0	2	2	3	1	0	1
	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
	7	6	11	12	7	10	16	10	19	17
	37	38	39	40	41	42	43	44	45	
	20	20	42	46	40	54	65	65	62	

*) Ziehung am 5.5.91: Gewinnzahlen 5, 11, 15, 16, 17, 19 (Zusatzzahl 41), 2 Sechser

d) Häufigkeitsverteilung für die Spannweite der sechs Gewinnzahlen der 538 Lotto-Runden von 1986 bis 1996:

Spannweite	5 bis 11		12	13	14	15	16	17	18	19
Häufigkeit	0		1	1	2	3	1	5	5	4
	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	4	8	14	7	9	14	18	13	19	26
	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	18	19	27	31	36	25	42	28	30	28
	40	41	42	43	44					
	30	33	19	10	8					

e) Häufigkeitsverteilung für die Anzahl gerader Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen der 538 Lottorunden von 1986 bis 1996:

Jahr	Anzahl Ziehungen	davon mit 0	1	2	3	4	5	6 geraden Zahlen
1986	17	0	2	6	3	3	3	0
1987	52	0	5	16	20	7	4	0
1988	52	0	6	9	19	10	7	1
1989	52	1	5	12	13	16	2	3
1990	52	1	5	10	20	14	2	0
1991	52	0	6	11	15	14	5	1
1992	53	1	3	14	17	17	1	0
1993	52	0	6	13	16	7	10	0
1994	52	1	10	16	13	10	2	0
1995	52	1	5	14	14	16	2	0
1996	52	1	2	19	19	7	3	1
gesamt:	538	6	55	140	169	121	41	6

f) Häufigkeitsverteilungen für die Anzahl von Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen, die sich aus der vorhergehenden Lottorunde wiederholen:

Jahr	Anzahl Ziehungen	davon mit 0	1	2	3	4	5	6 Wiederholungen
1986	16 von 17	6	8	2	0	0	0	0
1987	52	21	16	12	3	0	0	0
1988	52	23	19	9	1	0	0	0
1989	52	20	20	10	2	0	0	0
1990	52	25	22	4	1	0	0	0
1991	52	31	16	4	1	0	0	0
1992	53	20	20	9	3	1	0	0
1993	52	18	21	13	0	0	0	0
1994	52	18	25	8	1	0	0	0
1995	52	22	19	9	2	0	0	0
1996	52	18	22	11	0	1	0	0
gesamt:	537	222	208	91	14	2	0	0

g) Häufigkeiten für Mehrlinge unter den 538 Lottorunden von 1986 bis 1996:

Jahr	Anzahl Ziehungen	davon mit Mehrlingen	davon 1Z	2Z	3Z	1D	ZD	V
1986	17	8	5	1	0	2	0	0
1987	52	26	20	1	1	4	0	0
1988	52	29	19	6	0	4	0	0
1989	52	26	22	2	0	1	1	0
1990	52	28	21	5	0	1	0	1
1991	52	36	27	5	0	4	0	0
1992	53	31	21	7	0	3	0	0
1993	52	28	23	4	0	1	0	0
1994	52	27	24	1	0	1	0	1
1995	52	31	25	4	0	2	0	0
1996	52	23	20	2	0	1	0	0
gesamt:	538	293	227	38	1	24	1	2

(1Z = 1 echter Zwilling, 2Z = 2 echte Zwillinge, 3Z = 3 echte Zwillinge, 1D = 1 echter Drilling, ZD = echter Zwilling und echter Drilling, V = echter Vierling)

Daneben sind noch die Mehrlingsfälle zwei Drillinge, echter Vierling und echter Zwilling, Fünfling und Sechsling möglich (siehe Abschnitt 8). Diese sind beim österreichischen Lotto bisher noch nicht aufgetreten. Die Gewinnzahlen bei den bisher vorgekommenen „seltenen" Mehrlingen 3Z, ZD und V waren:

3Z: Ziehung am 18.10.87, Gewinnzahlen: 21, 22, 29, 30, 34, 35 (7 Sechser)
ZD: Ziehung am 12.12.89, Gewinnzahlen: 2, 36, 37, 38, 41, 42 (2 Sechser)
V: Ziehung am 4.11.90, Gewinnnzahlen: 9, 10, 11, 12, 17, 44 (Jackpot)
Ziehung am 6.3.94, Gewinnzahlen: 5, 29, 30, 31, 32, 37 (1 Sechser)

h) Bis Ende 1996 ist es zweimal vorgekommen, dass eine Zahl in fünf aufeinanderfolgenden Spielrunden unter den Gewinnzahlen war, und zwar

4 am 19.4., 26.4., 3.5., 10.5. und 17.5 1992
26 am 27.12.1992, 3.1., 10.1., 17.1. und 24.1.1993

Fünfmal ist eine bestimmte Zahl in vier aufeinanderfolgenden Runden als Gewinnzahl gezogen worden, und zwar:

7 am 12.12., 19.12., 26.12.1993 und 2.1.1994
10 am 9.8., 16.8., 23.8. und 30.8.1987
16 am 14.5., 21.5., 28.5. und 4.6.1989
30 am 30.5., 6.6., 13.6. und 20.6.1993
35 am 26.4., 3.5., 10.5. und 17.5.1987

43-mal ist eine Zahl in drei aufeinanderfolgenden Runden als Gewinnzahl gezogen worden.

Umgekehrt kommt es mitunter vor, dass eine bestimmte Zahl viele Wochen lang nicht unter den Gewinnzahlen ist. Der Erwartungswert für die Wartezeit auf eine Zahl beträgt 7,5 Wochen (siehe Abschnitt 5c). Die größte bisher aufgetretene Wartezeit hat 69 Wochen betragen: Die Zahl 34 war am 3.7.1994 und das nächste Mal erst nach 69 Spielrunden am 29.10.1995 unter den Gewinnzahlen. Die 15 größten Wartezeiten bis Ende 1996 waren:

Gewinnzahl	34	2	35	6	6	45	32	2	14	35	15	10	11	14	37
Wartezeit	69	58	56	53	47	45	45	44	44	43	43	42	41	41	40

i) Anzahl der Sechser und der Jackpots in den ersten 538 Lottorunden von 1986 bis 1996:

Jahr	Anzahl Ziehungen	Anzahl Jackpots	Anzahl Sechser
1986	17	3	33
1987	52	14	90
1988	52	15	92
1989	52	14	142
1990	52	13	92
1991	52	13	97
1992	53	17	90
1993	52	15	107
1994	52	11	117
1995	52	12	100
1996	52	10	100
gesamt:	538	137	1060

Im Mittel hat es also zwei Sechser pro Lottorunde gegeben, die größte bisher in einer Lottorunde aufgetretene Anzahl von Sechsern hat 23 betragen. In 61 der 538 Lottorunden hat es mindestens fünf Sechser gegeben (25 dieser Runden waren unmittelbar nach einem Jackpot).

Im Mittel ist auf vier Lottorunden eine Jackpotrunde für den Lottosechser gekommen, dh. durchschnittlich einmal pro Monat. Unter den 137 Jackpotrunden waren 20 Doppeljackpots und sogar 3 Dreifachjackpots.

Jackpots für den zweiten Gewinnrang, den Fünfer mit Zusatzzahl, sind bisher zweimal aufgetreten (am 14.6.87 mit den Gewinnzahlen 1, 15, 30, 37, 40, 43 und Zusatzzahl 18, sowie am 30.12.90 mit den Gewinnzahlen 3, 4, 13, 32, 35, 44 und Zusatzzahl 31). In beiden Fällen war gleichzeitig auch ein Jackpot für den Sechser.

Obwohl die Wahrscheinlichkeit für einen Fünfer mit Zusatzzahl größer als die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser ist, hat es in 14 der ersten 538 Spielrunden gleich viele, und in 5 Spielrunden sogar weniger Sechser als Fünfer mit Zusatzzahl gegeben.

j) Gewinnquoten beim Lotto 6 aus 45 bis Ende 1996:

Die größten bzw. kleinsten bisher mit einem Lottosechser gewonnenen Beträge waren:

	Datum	Gewinn	Gewinnzahlen
1	25.8.96	60.213.905 S	8, 15, 24, 35, 42, 44
2	11.2.90	59.360.531 S	11, 22, 23, 25, 32, 39
3	26.7.92	58.589.782 S	9, 12, 16, 18, 22, 45
4	20.3.94	57.664.471 S	5, 23, 27, 31, 37, 42
5	29.12.96	56.775.576 S	1, 9, 23, 24, 26, 35
6	20.10.91	56.482.859 S	3, 6, 18, 32, 37, 40
7	19.6.94	53.982.113 S	5, 7, 21, 23, 25, 26
8	3.12.95	51.901.699 S	13, 15, 24, 25, 28, 44
9	15.3.92.	50.973.427 S	1, 4, 8, 27, 32, 37
10	28.8.88	47.714.491 S	3, 22, 23, 28, 35, 45

Die durchschnittliche Gewinnquote für einen Solosechser beträgt zur Zeit 14,5 bis 15 Millionen Schilling. Spitzengewinne, wie in der obigen Tabelle, kommen durch Jackpots zustande bzw. treten in Runden auf, in denen die Lottogesellschaft aus Werbezwecken die ausgeschüttete Gewinnsumme erhöht (Das ist jedes Jahr einige Male der Fall).

	Datum	Gewinn	Gewinnzahlen
1	21.5.89	23 Sechser zu 510.218 S	2, 14, 16, 26, 28, 40
2	12.3.89	14 Sechser zu 845.207 S	4, 13, 26, 33, 35, 41
3	28.5.89	10 Sechser zu 1.102.981 S	2, 4, 6, 12, 16, 28
4	12.5.91	9 Sechser zu 1.287.232 S	14, 15, 27, 28, 40, 42
5	11.3.90	8 Sechser zu 1.533.077 S	3, 11, 23, 27, 30, 33
6	11.8.91	8 Sechse zu 1.569.302 S	5, 8, 9, 28, 34, 40
7	5.6.94	9 Sechser zu 1.669.452 S	3, 5, 9, 21, 29, 39
8	22.3.92	10 Sechser zu 1.724.694 S	6, 13, 24, 28, 31, 42
9	17.7.88	6 Sechser zu 1.788.118 S	5, 10, 14, 20, 29, 34
10	7.12.86	6 Sechser zu 1.836.110 S	7, 17, 19, 29, 38, 41

Nur bei zwei Lottorunden war die Gewinnquote für den Lottosechser also kleiner als eine Million Schilling. Auffällig ist, dass die bisher kleinste Sechsergewinnquote von 510.218 S in einer Spielrunde mit lauter geraden Gewinnzahlen aufgetreten ist. Sechs gerade Gewinnzahlen hat es in 538 Spielrunden nur sechsmal gegeben, und zwei dieser Spielrunden findet man unter den zehn Runden mit den niedrigsten Sechserquoten. Umgekehrt ist auch eine der insgesamt sechs Spielrunden mit lauter ungeraden Gewinnzahlen in der Liste der niedrigsten Sechserquoten vertreten.

Auf den ersten Blick erscheint es verwunderlich, warum gerade bei den Gewinnzahlen 2, 14, 16, 26, 28, 40 die außergewöhnlich große Zahl von 23 Lottosechsern aufgetreten ist. Trägt man aber diese Zahlen in ein Lottotippfeld ein, so stellt man fest, dass sie ein regelmäßiges Muster bilden (Die Zahlen 2, 14 und 26 stehen in der zweiten Spalte, und zwar in der ersten, dritten und fünften Zeile. Die Zahlen 16, 28 und 40 stehen in der vierten Spalte, und zwar in der dritten, fünften und siebenten Zeile.). Vermutlich ist das der Grund dafür, dass diese Zahlenkombination von 23 Spielern angekreuzt worden ist.

Die bisher aufgetretenen Gewinnquoten für den Fünfer mit Zusatzzahl haben sich zwischen 59.641 S (am 17.5.1987) und 4.678.208 S (am 12.7.1992) bewegt. Bis Ende 1996 hat es insgesamt 260 Lottogewinner gegeben, die mit einem Fünfer mit Zusatzzahl mehr als eine Million Schilling gewonnen haben.

Die Quotenerwartung für den Fünfer ohne Zusatzzahl beträgt 18.728 S (siehe Abschnitt 11), die bisherigen Gewinnquoten haben zwischen 2.640 S (am 2.5.1993) und 39.885 S (am 31.10.1993) geschwankt.

3. Die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Lotto 6 aus 45

a) Angenommen, jemand gibt bei einer Runde des Lottos 6 aus 45 einen Tipp ab. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 6, 5, 4, 3, 2, 1 bzw. 0 der sechs Gewinnzahlen richtig hat?

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten können mit Hilfe des folgenden Urnenmodells bestimmt werden: In einer Urne befinden sich 45 Kugeln, die von 1 bis 45 nummeriert sind. Davon sind sechs Kugeln rot, und zwar jene Kugeln, deren Nummern die Tippreihe des Spielers bilden. Die übrigen 39 Kugeln sind schwarz. Aus dieser Urne werden sechs Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

„6 Richtige" hat der Spieler genau dann, wenn bei sechsmaligem Ziehen ohne Zurücklegen sechs rote Kugeln gezogen werden. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit wird durch den folgenden Pfad beschrieben:

$$\xrightarrow[\frac{6}{45}]{} R \xrightarrow[\frac{5}{44}]{} R \xrightarrow[\frac{4}{43}]{} R \xrightarrow[\frac{3}{42}]{} R \xrightarrow[\frac{2}{41}]{} R \xrightarrow[\frac{1}{40}]{} R$$

Durch Multiplikation der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten erhält man:

$$\text{P(6 Richtige)} = \frac{6}{45}\cdot\frac{5}{44}\cdot\frac{4}{43}\cdot\frac{3}{42}\cdot\frac{2}{41}\cdot\frac{1}{40} = \frac{1}{8145060} \approx 0{,}00000012$$

„4 Richtige" hat der Spieler genau dann, wenn bei sechsmaligem Ziehen ohne Zurücklegen vier rote und zwei schwarze Kugeln gezogen werden. Die Zugfolge RRRRSS (dh. zuerst vier rote und dann zwei schwarze Kugeln) wird durch den folgenden Pfad beschrieben:

$$\xrightarrow[\frac{6}{45}]{} R \xrightarrow[\frac{5}{44}]{} R \xrightarrow[\frac{4}{43}]{} R \xrightarrow[\frac{3}{42}]{} R \xrightarrow[\frac{39}{41}]{} S \xrightarrow[\frac{38}{40}]{} S$$

Es ist leicht einzusehen, dass jede Zugfolge mit vier roten und zwei schwarzen Kugeln mit der gleich großen Wahrscheinlichkeit

$$\frac{6}{45}\cdot\frac{5}{44}\cdot\frac{4}{43}\cdot\frac{3}{42}\cdot\frac{39}{41}\cdot\frac{38}{40}$$

auftritt. Da es $\binom{6}{4}$ verschiedene Zugfolgen mit vier roten unter den sechs gezogenen Kugeln gibt, erhält man

$$\text{P(4 Richtige)} = \binom{6}{4}\cdot\frac{6}{45}\cdot\frac{5}{44}\cdot\frac{4}{43}\cdot\frac{3}{42}\cdot\frac{39}{41}\cdot\frac{38}{40} = \frac{11115}{8145060} \approx 0{,}00136$$

Analog dazu überlegt man die übrige Fälle:

$$\text{P(5 Richtige)} = \binom{6}{5}\cdot\frac{6}{45}\cdot\frac{5}{44}\cdot\frac{4}{43}\cdot\frac{3}{42}\cdot\frac{2}{41}\cdot\frac{39}{40} = \frac{234}{8145060} \approx 0{,}000029$$

$$\text{P(3 Richtige)} = \binom{6}{3}\cdot\frac{6}{45}\cdot\frac{5}{44}\cdot\frac{4}{43}\cdot\frac{39}{42}\cdot\frac{38}{41}\cdot\frac{37}{40} = \frac{182780}{8145060} \approx 0{,}02244$$

$$\text{P(2 Richtige)} = \binom{6}{2}\cdot\frac{6}{45}\cdot\frac{5}{44}\cdot\frac{39}{43}\cdot\frac{38}{42}\cdot\frac{37}{41}\cdot\frac{36}{40} = \frac{1233765}{8145060} \approx 0{,}15147$$

$$\text{P(1 Richtige)} = \binom{6}{1}\cdot\frac{6}{45}\cdot\frac{39}{44}\cdot\frac{38}{43}\cdot\frac{37}{42}\cdot\frac{36}{41}\cdot\frac{35}{40} = \frac{3454542}{8145060} \approx 0{,}424127$$

$$\text{P(0 Richtige)} = \frac{39}{45}\cdot\frac{38}{44}\cdot\frac{37}{43}\cdot\frac{36}{42}\cdot\frac{35}{41}\cdot\frac{34}{40} = \frac{3262623}{8145060} \approx 0{,}400565$$

Steht die hypergeometrische Verteilung zur Verfügung, so können die gesuchten Wahrscheinlichkeiten auch mit Hilfe dieser Verteilung berechnet werden:

Man betrachtet wieder die Urne mit den von 1 bis 45 nummerierten Kugeln, von denen 6 Kugeln rot und die übrigen 39 Kugeln schwarz sind. Insgesamt gibt es $\binom{45}{6}$ Möglichkeiten, aus dieser Urne sechs Kugeln ohne Zurücklegen zu ziehen. „k Richtige" ($0 \le k \le 6$) hat der Spieler dann, wenn dabei k rote Kugeln und 6-k schwarze gezogen werden. Es gibt $\binom{6}{k}$ Möglichkeiten, k von 6 roten Kugeln auszuwählen, und $\binom{39}{6-k}$ Möglichkeiten, die restlichen 6-k Kugeln aus den 39 schwarzen Kugeln auszuwählen. Insgesamt gibt es daher $\binom{6}{k}\cdot\binom{39}{6-k}$ Möglichkeiten, k rote und 6-k schwarze Kugeln zu ziehen. Daraus folgt, dass:

$$\text{P(k Richtige)} = \frac{\binom{6}{k}\cdot\binom{39}{6-k}}{\binom{45}{6}}$$

b) Angenommen, jemand gibt bei einer Runde des Lottos 6 aus 45 einen Tipp ab. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er
b1) 5 Richtige mit Zusatzzahl,
b2) 5 Richtige ohne Zusatzzahl hat?

Bei jeder Lottoziehung wird nach den sechs Gewinnzahlen noch eine siebente Zahl, die sogenannte Zusatzzahl, gezogen. Diese ist nur für jene Tippreihen von Bedeutung, die genau fünf Übereinstimmungen mit den sechs Gewinnzahlen aufweisen. Bei genau „5 Richtigen" ist der Gewinn höher, wenn die sechste vom Spieler angekreuzte Zahl mit der Zusatzzahl übereinstimmt.

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Fälle „5 Richtige mit Zusatzzahl" bzw. „5 Richtige ohne Zusatzzahl" kann ebenfalls mit Hilfe des vorhin betrachteten Urnenexperiments ermittelt werden:

Hat der Spieler nach Ziehen der sechs Gewinnzahlen genau fünf Richtige, so sind aus der betrachteten Urne fünf rote und eine schwarze Kugel gezogen worden. Somit liegen noch eine rote und 38 schwarze Kugeln in der Urne.

Aus dieser Urne wird nun ein siebentes Mal gezogen: Die Wahrscheinlichkeit, dabei die eine rote Kugel zu erwischen, beträgt 1/39, die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, 38/39. Daraus folgt:

$$\text{P(5 Richtige mit Zusatzzahl)} = \underbrace{\frac{234}{8145060}}_{P(5 Richtige)} \cdot \frac{1}{39} = \frac{6}{8145060} \approx 0{,}0000007366$$

$$\text{P(5 Richtige ohne Zusatzzahl)} = \underbrace{\frac{234}{8145060}}_{P(5 Richtige)} \cdot \frac{38}{39} = \frac{228}{8145060} \approx 0{,}0000279924$$

4. Weitere Aufgabenstellungen zur Gewinnwahrscheinlichkeit

a) Angenommen, jemand gibt bei jeder Lottorunde einen Tipp ab. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er innerhalb eines Jahres (dh. 52 Spielrunden) mindestens einmal sechs Richtige bzw. mindestens einmal einen Gewinn (dh. mindestens drei Richtige) hat?

Bei jeder Lottorunde hat der Spieler mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{8145060}$ einen Sechser und mit Wahrscheinlichkeit 1-p keinen Sechser. Da die einzelnen Spielrunden voneinander unabhängig sind, ist die Zufallsvariable X, die die Anzahl der Sechser unter 52 Spielrunden angibt, 52-p-binomialverteilt. Gesucht ist $P(X \geq 1)$.

$$P(X\geq 1) = 1 - P(X=0) = 1-(1-\frac{1}{8145060})^{52} \approx 0{,}0000064.$$

Die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines Jahres mindestens einmal sechs Richtige zu haben, beträgt also nur $\approx 0{,}0000064$.

Mindestens drei Richtige hat der Spieler, wenn er entweder 6 oder 5 oder 4 oder 3 der sechs Gewinnzahlen richtig hat. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Lottorunde mit einem Tipp mindestens drei Richtige zu haben, beträgt daher p = P(6 Richtige) + P(5 Richtige) + P(4 Richtige) + P(3 Richtige) $=\frac{194130}{8145060}$. Analog zur obigen Berechnung erhält man die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines Jahres mindestens einmal drei Richtige zu haben:

$$P(X\geq 1) = 1 - P(X=0) = 1-(1-\frac{194130}{8145060})^{52} \approx 0{,}715.$$

b) In welchem Fall hat man die größte Aussicht mit 1000 Lottotipps mindestens einmal sechs Richtige zu treffen:
b1) wenn man bei 1000 Spielrunden je einen Tipp abgibt,
b2) wenn man bei 100 Spielrunden je 10 verschiedene Tipps abgibt,
b3) wenn man bei 10 Spielrunden je 100 verschiedene Tipps abgibt,
b4) wenn man bei einer Spielrunde 1000 verschiedene Tipps abgibt?

Wieder ist zu berücksichtigen, dass die einzelnen Spielrunden voneinander unabhängig sind.

Gibt man bei jeder Spielrunde einen Tipp ab, so ist die Anzahl X der in 1000 Spielrunden gewonnenen Sechser n-p-binomialverteilt mit n = 1000 und $p = \frac{1}{8145060}$.

Gibt man bei einer Spielrunde 10 verschiedene Tipps ab, so ist die Wahrscheinlichkeit, sechs Richtige zu haben, genau zehnmal so groß wie bei Abgabe eines einzigen Tipps. In diesem Fall hat man mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{10}{8145060}$ einen Sechser und mit Wahrscheinlichkeit 1-p keinen Sechser. Gibt man nun bei 100 Spielrunden jedes Mal 10 verschiedene Tipps ab, so ist die Anzahl X der in diesen 100 Spielrunden gewonnenen Sechser n-p-binomialverteilt mit n = 100 und $p = \frac{10}{8145060}$.

Analog dazu ist die Anzahl X der Sechser im dritten Fall binomialverteilt mit n = 10 und p = $\frac{100}{8145060}$, und im vierten Fall beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{1000}{8145060}$.

Als Ergebnis erhält man daher:

	n	p	$P(X\geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-p)^n$
b1)	1000	$\frac{1}{8145060}$	$1-(1-\frac{1}{8145060})^{1000} \approx 0{,}00012276629$
b2)	100	$\frac{10}{8145060}$	$1-(1-\frac{10}{8145060})^{100} \approx 0{,}00012276634$

b3)	10	$\frac{100}{8145060}$	$1-(1-\frac{100}{8145060})^{10} \approx 0{,}00012276702$
b4)	1	$\frac{1000}{8145060}$	$\frac{1000}{8145060} \approx 0{,}0001227738$

Die Wahrscheinlichkeit, mit 1000 Lottotipps mindestens einmal „6 Richtige“ zu erzielen, ist also dann am größten, wenn bei einer einzigen Lottorunde 1000 verschiedene Tipps abgegeben werden.

Man beachte:
*) Obwohl die Wahrscheinlichkeiten für „mindestens einmal 6 Richtige“ in den vier betrachteten Fällen verschieden groß sind, ist der Erwartungswert für die Anzahl von Tipps mit 6 Richtigen in allen vier Fällen gleich groß, nämlich $\mu = np = \frac{1000}{8145060}$.
*) Im Fall b4) können „6 Richtige“ höchstens einmal auftreten, bei b1), b2) bzw. b3) dagegen sind „6 Richtige“ theoretisch bis zu zehnmal, hundertmal bzw. tausendmal möglich.

c) Angenommen, jemand gibt bei jeder Lottorunde einen Tipp ab. Wie viele Spielrunden wären erforderlich, damit er mit 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal mit sechs Richtigen bzw. mindestens einmal mit einem Gewinn rechnen kann?

Die Zufallsvariable X, die die Anzahl der Sechser unter n Spielrunden angibt, ist n-p-binomialverteilt mit $p = \frac{1}{8145060}$ und unbekanntem n.

Gesucht ist ein möglichst kleines n, für das $P(X\geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-p)^n \geq 0{,}95$ ist.

Nun ist $1 - (1-p)^n \geq 0{,}95 \Leftrightarrow (1-p)^n \leq 0{,}05 \Leftrightarrow n.\log(1-p) \leq \log(0{,}05) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\log(0{,}05)}{\log(1-p)} = \frac{\log(0{,}05)}{\log(1-\frac{1}{8145060})} \approx 24\,400\,417{,}6.$$

Um mit 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal mit 6 Richtigen rechnen zu können, wären also 24 400418 Spielrunden erforderlich. Bei 52 Spielrunden pro Jahr sind das ca. 469 239 Jahre.

Analog dazu erhält man für $p = \frac{194130}{8145060}$:

$$n \geq \frac{\log(0{,}05)}{\log(1-p)} = \frac{\log(0{,}05)}{\log(1-\frac{194130}{8145060})} \approx 124{,}2.$$

Gibt man bei jeder Lottorunde einen Tipp ab, so kann man mit 95%iger Wahrscheinlichkeit damit rechnen, innerhalb von 125 Spielrunden mindestens einmal zu gewinnen.

d) Angenommen, ein Lottospieler hat nach der Ziehung der ersten drei Gewinnzahlen bereits 3 Richtige. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mit diesem Tipp 6 Richtige, 5 Richtige mit Zusatzzahl, 5 Richtige ohne Zusatzzahl, 4 Richtige bzw. 3 Richtige haben wird?

Die Ziehung der letzten drei Gewinnzahlen kann man als ein Lotto „3 aus 42“ auffassen:

Wir betrachten wieder die Urne aus Aufgabe 3a). Nach Ziehen von drei roten Kugeln befinden sich noch 42 Kugeln in der Urne, und zwar 39 schwarze und 3 rote (diese entsprechen den restlichen drei vom Spieler angekreuzten Gewinnzahlen). Aus dieser Urne wird nun dreimal ohne Zurücklegen gezogen, und anschließend durch eine vierte Ziehung die Zusatzzahl ermittelt.

Spieler hat insgesamt	Anzahl der Richtigen bei „3 aus 42“	Wahrscheinlichkeit
6 Richtige	3	$\frac{1}{\binom{42}{3}} = \frac{1}{11480} \approx 0{,}0000871$
5 Richtige mit Zusatzzahl	2 und Zusatzzahl	$\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{39}{1}}{\binom{42}{3}} \cdot \frac{1}{39} = \frac{3}{11480} \approx 0{,}00026132$
5 Richtige ohne Zusatzzahl	2 ohne Zusatzzahl	$\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{39}{1}}{\binom{42}{3}} \cdot \frac{38}{39} = \frac{114}{11480} \approx 0{,}0099303$
4 Richtige	1	$\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{39}{2}}{\binom{42}{3}} = \frac{2223}{11480} \approx 0{,}1936411$
3 Richtige	0	$\frac{\binom{3}{0}\cdot\binom{39}{3}}{\binom{42}{3}} = \frac{9139}{11480} \approx 0{,}7960801$

5. Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zahl gezogen wird

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zahl (zum Beispiel die Zahl 19) bei einer Lottorunde als erste, als zweite, ... , als sechste Gewinnzahl gezogen wird?

Das Ereignis „die Zahl k wird als i-te Gewinnzahl gezogen“ bedeutet, dass die Zahl k als erste, zweite bis (i-1)-te Gewinnzahl **nicht** gezogen **und** als i-te Zahl gezogen wird. Die zugehörige

Wahrscheinlichkeit kann mit Hilfe eines Baumdiagramms veranschaulicht und mit Hilfe der Multiplikationsregel berechnet werden:

$$P(\text{k wird als 1. Zahl gezogen}) = \frac{1}{45}$$

$$P(\text{k wird als 2. Zahl gezogen}) = \frac{44}{45} \cdot \frac{1}{44} = \frac{1}{45}$$

$$P(\text{k wird als 3. Zahl gezogen}) = \frac{44}{45} \cdot \frac{43}{44} \cdot \frac{1}{43} = \frac{1}{45}$$

....

$$P(\text{k wird als 6. Zahl gezogen}) = \frac{44}{45} \cdot \frac{43}{44} \cdot \frac{42}{43} \cdot \frac{41}{42} \cdot \frac{40}{41} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{45}$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zahl (zum Beispiel die Zahl 19) bei einer Lottorunde unter den sechs Gewinnzahlen ist?

Die Zahl k ist Gewinnzahl, wenn sie entweder als erste Zahl oder als zweite Zahl, ..., oder als sechste Zahl gezogen wird. Jedes dieser Ereignisse hat die Wahrscheinlichkeit 1/45. Da die sechs Ereignisse einander ausschließen, folgt aus dem Additionssatz, dass

$$P(\text{k ist Gewinnzahl}) = \frac{1}{45} + \frac{1}{45} + \frac{1}{45} + \frac{1}{45} + \frac{1}{45} + \frac{1}{45} = \frac{6}{45}$$

Man könnte die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch mit Hilfe der hypergeometrischen Verteilung bestimmen: Dazu betrachtet man eine Urne mit einer roten Kugel (nämlich jener, die der Zahl k entspricht) und 44 schwarzen Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei sechsmaligem Ziehen ohne Zurücklegen die eine rote Kugel und fünf schwarze Kugeln gezogen werden, ist gegeben durch:

$$P(\text{k ist Gewinnzahl}) = \frac{\binom{1}{1}\binom{44}{5}}{\binom{45}{6}} = \frac{6}{45}$$

c) Wie viele Lottorunden vergehen im Mittel, bis eine vorgegebene Zahl als Gewinnzahl gezogen wird?

Die Zufallsvariable X, die (von einem festen Zeitpunkt weg) die Anzahl der Spielrunden bis zur Ziehung der vorgegebenen Zahl angibt, ist geometrisch verteilt mit dem Parameter $p = 6/45$. Der Erwartungswert von X ist $1/p = 45/6 = 7{,}5$. Der Abstand zwischen zwei Ziehungen dieser Zahl beträgt also über lange Zeit gesehen im Mittel 7,5 Wochen.

Ist die geometrische Verteilung im Unterricht nicht behandelt worden, so kann der gesuchte Erwartungswert auch folgendermaßen berechnet werden:

Es besteht die Möglichkeit, dass die Zahl das nächste Mal nach 1, 2, 3, ..., i, ... Wochen gezogen wird. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind in der zweiten Zeile der folgenden Tabelle angegeben.

i	1	2	3	4	....	i	....
P(X=i)	$\frac{6}{45}$	$\frac{39}{45}\cdot\frac{6}{45}$	$\left(\frac{39}{45}\right)^2\cdot\frac{6}{45}$	$\left(\frac{39}{45}\right)^3\cdot\frac{6}{45}$	....	$\left(\frac{39}{45}\right)^{i-1}\cdot\frac{6}{45}$	....

Der Erwartungswert ist nun gegeben durch:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(X=i) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \left(\frac{39}{45}\right)^{i-1} \cdot \frac{6}{45} = \frac{6}{45} \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{39}{45} + 3 \cdot \left(\frac{39}{45}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{39}{45}\right)^3 + \ldots\right] =$$

$$= \frac{6}{45} \cdot \left[1 + \frac{39}{45} + \left(\frac{39}{45}\right)^2 + \ldots\right] \cdot \left[1 + \frac{39}{45} + \left(\frac{39}{45}\right)^2 + \ldots\right] =$$

$$= \frac{6}{45} \cdot \frac{1}{1 - \frac{39}{45}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{39}{45}} = \frac{45}{6}$$

6. Wiederholtes Auftreten einer Gewinnzahl

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine, keine, genau eine, genau zwei, ..., genau sechs der bei einer Spielrunde gezogenen Gewinnzahlen auch bei der folgenden Spielrunde unter den Gewinnzahlen sind?

Man kann die Fragestellung auch folgendermaßen formulieren: Angenommen, man gibt als Tipp die sechs Gewinnzahlen der letzten Spielrunde ab. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Richtige, keine Richtige, genau eine Richtige,... zu haben? Hier wird also einfach nach den in Aufgabe 3a) berechneten Gewinnwahrscheinlichkeiten gefragt.

b) Bei den ersten 540 Spielrunden des österreichischen Lottos 6 aus 45 ist es 317-mal vorgekommen, dass mindestens eine der sechs Gewinnzahlen der letzten Spielrunde auch bei der darauffolgenden Spielrunde gezogen worden ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine so starke oder noch stärkere Abweichung vom erwarteten Wert?

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Spielrunde mindestens eine der sechs Gewinnzahlen der letzten Runde unter den Gewinnzahlen ist, beträgt:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{39}{45} \cdot \frac{38}{44} \cdot \frac{37}{43} \cdot \frac{36}{42} \cdot \frac{35}{41} \cdot \frac{34}{40} = \frac{4882437}{8145060} \approx 0{,}6.$$

Da die einzelnen Spielrunden voneinander unabhängig sind, ist die Zufallsvariable X, die angibt, wie oft in 540 Spielrunden mindestens eine der Gewinnzahlen der letzten Runde noch einmal gezogen wird, 540-0,6-binomialverteilt.

Ihr Erwartungswert ist $\mu = np = 540.0,6 = 324$.

Tatsächlich aufgetreten ist $X = 317$. Eine so starke oder noch stärkere Abweichung vom erwarteten Wert bedeutet $(X \leq 317) \vee (X \geq 331)$.

Gesucht ist also $P(X \leq 317) + P(X \geq 331)$.

Da $\sigma^2 = 540.0,6.0,4 = 129,6 > 9$ ist, darf die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung mit $\mu = 324$ und $\sigma = \sqrt{129,6} \approx 11,384$ angenähert werden. Wendet man die Stetigkeitskorrektur an, so ist $P(X \leq 317,5) + P(X \geq 330,3) = 2.\ P(X \leq 317,5)$ zu berechnen.

Setzt man $317,5 = \mu + z.\sigma$, so erhält man $z \approx -0,57$. Daher ist
$2.\ P(X \leq 317,5) \approx 2.\Phi(-0,57) \approx 2.(1- \Phi(0,57)) \approx 2.(1-0,71566) \approx 0,56868$.

Die Wahrscheinlichkeit für eine so starke oder noch stärkere Abweichung vom erwarteten Wert beträgt also ca. 56,9%.

c) Im April und Mai 1992 war die Zahl 4 und im Dezember 1992 und Jänner 1993 die Zahl 26 in fünf aufeinanderfolgenden Lottorunden unter den sechs Gewinnzahlen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl 4
c1) bei den nächsten fünf Spielrunden jedes Mal unter den Gewinnzahlen ist,
c2) bei den nächsten zehn Spielrunden genau fünfmal unter den Gewinnzahlen ist?

Bei jeder Spielrunde wird die Zahl 4 mit Wahrscheinlichkeit 6/45 gezogen und mit Wahrscheinlichkeit 39/45 nicht gezogen. Da die einzelnen Spielrunden voneinander unabhängig sind, ist die Zufallsvariable X, die angibt, wie oft die Zahl 4 in den nächsten fünf Spielrunden unter den Gewinnzahlen ist, 5-6/45-binomialverteilt. Daraus folgt, dass die Zahl 4 mit Wahrscheinlichkeit

$$\left(\frac{6}{45}\right)^5 \approx 0,00004$$

bei den nächsten fünf Spielrunden jedes Mal unter den Gewinnzahlen ist.

Analog dazu ist die Zufallsvariable, die angibt, wie oft die Zahl 4 in den nächsten zehn Spielrunden unter den Gewinnzahlen ist, 10-6/45-binomialverteilt. Die in c2) gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt daher

$$\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{6}{45}\right)^5 \cdot \left(\frac{39}{45}\right)^5 \approx 0,0052.$$

7. Größte und kleinste bzw. gerade und ungerade Gewinnzahlen

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl k als kleinste (als größte) der sechs Gewinnzahlen beim Lotto 6 aus 45 gezogen wird?

Sei k die kleinste gezogene Zahl. Weil insgesamt sechs Zahlen gezogen werden, ist dann $1 \leq k \leq 40$. Die übrigen fünf Gewinnzahlen müssen aus den 45-k Zahlen k+1, k+2, k+3, ...,45 kombiniert werden. Dafür gibt es $\binom{45-k}{5}$ Möglichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass k als kleinste Gewinnzahl gezogen wird, ist daher

$$P(\text{k ist kleinste Gewinnzahl}) = \frac{\binom{45-k}{5}}{\binom{45}{6}} \qquad (\text{wobei } 1 \leq k \leq 40)$$

Genauso überlegt man die Wahrscheinlichkeit, dass k ($6 \leq k \leq 45$) als größte der sechs Gewinnzahlen gezogen wird:

$$P(\text{k ist größte Gewinnzahl}) = \frac{\binom{k-1}{5}}{\binom{45}{6}} \qquad (\text{wobei } 6 \leq k \leq 45)$$

Ist 1 die kleinste der sechs Gewinnzahlen, so können die übrigen fünf Gewinnzahlen aus 44 Zahlen gewählt werden. Dasselbe gilt für den Fall, dass 45 als größte der sechs Gewinnzahlen gezogen wird. Es gibt also gleich viele Tippreihen mit kleinster Zahl 1 wie Tippreihen mit größter Zahl 45. Analog dazu gibt es gleich viele Tippreihen mit kleinster Zahl 2, 3, 4, ... wie Tippreihen mit größter Zahl 44, 43, 42,....

kleinste Gewinnzahl	Anzahl der Tippreihen	Wahrscheinlichkeit	größte Gewinnzahl
1	1086008	0,13333	45
2	962598	0,11818	44
3	850668	0,10444	43
4	749398	0,09201	42
5	658008	0,08079	41
6	575757	0,07069	40
7	501942	0,06163	39
8	435897	0,05352	38
9	376992	0,04628	37
10	324632	0,03986	36
11	278256	0,03412	35
12	237336	0,02914	34
13	201376	0,02472	33

14	169911	0,02086	32
15	142506	0,01750	31
16	118755	0,01458	30
17	98280	0,01207	29
18	80730	0,00992	28
19	65780	0,00808	27
20	53130	0,00652	26
21	42504	0,00522	25
22	33649	0,00413	24
23	26334	0,00323	23
24	20349	0,00250	22
25	15504	0,00190	21
26	11628	0,00143	20
27	8568	0,00105	19
28	6188	0,000760	18
29	4368	0,000536	17
30	3003	0,000369	16
31	2002	0,000246	15
32	1287	0,000158	14
33	792	0,0000972	13
34	462	0,0000567	12
35	252	0,0000309	11
36	126	0,0000155	10
37	56	0,0000069	9
38	21	0,0000026	8
39	6	0,00000074	7
40	1	0,00000012	6

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich als Spannweite der sechs Gewinnzahlen beim Lotto 6 aus 45 die Zahl k ergibt?

Die Spannweite, dh. die Differenz von größter und kleinster Gewinnzahl, kann nur die Werte 5 bis 44 annehmen.
Hat die Spannweite den Wert k, so liegen genau k-1 Zahlen zwischen der kleinsten und der größten Gewinnzahl. Für die Auswahl der vier restlichen Gewinnzahlen gibt es daher genau $\binom{k-1}{4}$ Möglichkeiten. Als kleinste bzw. größte Gewinnzahl können die 45-k Zahlenpaare (1/k+1), (2/k+2), (3/k+3),....,(45-k/45) auftreten. Daraus folgt:

$$\text{P(Spannweite = k)} = \frac{(45-k)\cdot\binom{k-1}{4}}{\binom{45}{6}} \qquad \text{(wobei } 5 \le k \le 44\text{)}$$

c) Wie groß ist beim Lotto 6 aus 45 die Wahrscheinlichkeit, dass keine, genau eine, genau zwei, ..., genau sechs gerade Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen sind?

Als Gewinnzahlen kommen 22 gerade und 23 ungerade Zahlen in Frage. Die Anzahl der geraden Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen ist hypergeometrisch verteilt. Es ist

$$P(\text{k Gewinnzahlen sind gerade}) = \frac{\binom{22}{k} \cdot \binom{23}{6-k}}{\binom{45}{6}}$$

Anzahl k der geraden Gewinnzahlen	$\binom{22}{k} \cdot \binom{23}{6-k}$	P(X = k)
0	100 947	0,01239
1	740 278	0,09089
2	2 045 505	0,25113
3	2 727 340	0,33485
4	1 850 695	0,22722
5	605 682	0,07436
6	74 613	0,00916

Ohne explizite Verwendung der hypergeometrischen Verteilung könnte man diese Wahrscheinlichkeiten auch mit Hilfe eines Baumdiagramms und der elementaren Wahrscheinlichkeitsregeln bestimmen: Man geht von einer Urne aus, in der 22 rote und 23 schwarze Kugeln liegen, und zieht daraus sechsmal ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei, zum Beispiel, zwei rote und vier schwarze Kugeln gezogen werden (dh. zwei gerade und vier ungerade Zahlen), ist gegeben durch:

$$\underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{Anzahl der Pfade}} \cdot \underbrace{\frac{22}{45} \cdot \frac{21}{44}}_{\text{zweir rote}} \cdot \underbrace{\frac{23}{43} \cdot \frac{22}{42} \cdot \frac{21}{41} \cdot \frac{20}{40}}_{\text{vier schwarze}} \approx 0{,}25.$$

8. Mehrlinge unter den Gewinnzahlen

a) Seit Einführung des österreichischen Lottos ist es zweimal vorgekommen, dass vier der sechs Gewinnzahlen benachbarte Zahlen waren (9, 10, 11, 12, 17, 44 am 4.11.1990 und 5, 29, 30, 31, 32, 37 am 6.3.1994). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den sechs Gewinnzahlen einer Lottorunde
- genau vier Zahlen,
- genau fünf Zahlen,
- genau sechs Zahlen
direkt aufeinanderfolgen?
Wie viele Spielrunden vergehen im Mittel, bis vier (bzw. fünf oder sechs) aufeinanderfolgende Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen sind?

Insgesamt gibt es 42 Vierlinge, nämlich {1,2,3,4}, {2,3,4,5},.......,{42,43,44,45}. Für den ersten und den letzten dieser Vierlinge gilt: Damit kein Fünfling oder Sechsling entsteht, müssen die beiden restlichen Gewinnzahlen aus den 40 Zahlen {6,7,8,...,45} bzw. {1,2,3,...,40} ausgewählt werden. Dafür gibt es jeweils $\binom{40}{2} = 780$ Möglichkeiten.

Bei den übrigen 40 Vierlingen müssen die beiden restlichen Gewinnzahlen aus jeweils 39 Zahlen ausgewählt werden. Hier gibt es jeweils $\binom{39}{2} = 741$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also 2*780 + 40*741 = 31200 verschiedene Tipps mit genau vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Zahlen. (Darunter fallen alle Tipps, die einen echten Vierling und sonst keine benachbarten Zahlen enthalten, und auch alle Tipps, die aus einem echten Vierling und einem Zwilling bestehen (siehe Abschnitt 8c)). Daraus folgt, dass

$$P(\text{genau vier aufeinanderfolgende Gewinnzahlen}) = \frac{31200}{8145060} \approx 0{,}00383.$$

Genauso überlegt man, dass es $2 \cdot \binom{39}{1} + 39 \cdot \binom{38}{1} = 2 * 39 + 39 * 38 = 1560$ mögliche Tipps mit einem Fünfling und 40 Tipps mit einem Sechsling gibt.

$$P(\text{Fünfling}) = \frac{1560}{8145060} \approx 0{,}00019153$$

$$P(\text{Sechsling}) = \frac{40}{8145060} \approx 0{,}0000049.$$

Die Zufallsvariable, die die Wartezeit (in Spielrunden) bis zur Ziehung von vier aufeinanderfolgenden Gewinnzahlen angibt, ist geometrisch verteilt mit dem Parameter $p = 0{,}00383$ (siehe dazu auch Abschnitt 5c). Der Abstand zwischen dem Auftreten von vier direkt benachbarten Gewinnzahlen wird über lange Zeit gesehen im Mittel also etwa $1/p \approx 261$ Spielrunden ($\cong$ 5 Jahre) betragen. Analog dazu ist der Erwartungswert für die Wartezeit auf Fünflinge 5.221 Spielrunden ($\cong$ 100 Jahre), auf Sechslinge sogar 203.626,5 Spielrunden ($\cong$ 3916 Jahre).

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den sechs Gewinnzahlen einer Lotterunde mindestens zwei benachbarte Zahlen sind?

Seien $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ die sechs Gewinnzahlen einer Runde in aufsteigender Reihenfolge, d.h. $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 \leq 45$.

Gibt es keine benachbarten Zahlen unter diesen Gewinnzahlen, so ist $x_i < x_{i+1} - 1$ für $1 \leq i \leq 6$. In diesem Fall ist also $1 \leq x_1 < x_2 - 1 < x_3 - 2 < x_4 - 3 < x_5 - 4 < x_6 - 5 \leq 40$, und die Menge $\{x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, x_4 - 3, x_5 - 4, x_6 - 5\}$ ist eine 6-elementige Teilmenge aus den Zahlen 1 bis 40.

Umgekehrt ist für jede Menge $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ mit $1 \leq y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 < y_6 \leq 40$ die Menge $\{y_1, y_2 + 1, y_3 + 2, y_4 + 3, y_5 + 4, y_6 + 5\}$ eine sechselementige Teilmenge der Zahlen 1 bis 45, in der keine zwei Zahlen benachbart sind.

Daraus folgt, dass es genau gleich viele Lottotipps ohne benachbarte Zahlen gibt wie sechselementige Teilmengen aus den Zahlen 1 bis 40, nämlich $\binom{40}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den sechs Gewinnzahlen einer Lottorunde keine benachbarten Zahlen sind, beträgt daher:

$$\text{P(keine benachbarten Zahlen)} = \frac{\binom{40}{6}}{\binom{45}{6}} = \frac{3838380}{8145060} \approx 0{,}47125.$$

Mindestens zwei benachbarte Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen treten auf mit Wahrscheinlichkeit:

$$\text{P(mind. zwei benachbarte Zahlen)} = 1 - \frac{\binom{40}{6}}{\binom{45}{6}} = \frac{4306680}{8145060} \approx 0{,}52875.$$

c) Für benachbarte Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen gibt es die folgenden Möglichkeiten (dabei wird jeweils angenommen, dass es außer dem angeführten Mehrling keine weiteren benachbarten Zahlen gibt):
c1) ein Zwilling,
c2) zwei Zwillinge,
c3) drei Zwillinge,
c4) ein Drilling,
c5) zwei Drillinge,
c6) ein Zwilling und ein Drilling,
c7) ein Vierling,
c8) ein Vierling und ein Zwilling,
c9) ein Fünfling,
c10) ein Sechsling.
Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der einzelnen Fälle?

Hier kann man wiederum die in b) vorgestellte Abbildung

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \rightarrow \{x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, x_4 - 3, x_5 - 4, x_6 - 5\}$$

betrachten. Jedem Lottoergebnis mit einem Zwilling an der ersten und zweiten Stelle (dh. $x_2 = x_1 + 1$) und keinen weiteren benachbarten Zahlen, entspricht eine fünfelementige Teilmenge aus den Zahlen 1 bis 40 und umgekehrt. Es gibt daher genau $\binom{40}{5}$ verschiedene derartige Tipps.

Analoges gilt für den Fall, dass der Zwilling an der 2. und 3. Stelle, an der 3. und 4. Stelle, an der 4. und 5. Stelle bzw. an der 5. und 6. Stelle der aufsteigend geordneten Gewinnzahlen auftritt. Insgesamt gibt es daher $5.\binom{40}{5}$ verschiedene Tipps, die genau einen Zwilling und sonst keine benachbarten Zahlen aufweisen.

$$P(1 \text{ echter Zwilling}) = \frac{5 \cdot \binom{40}{5}}{\binom{45}{6}} = \frac{3290040}{8145060} \approx 0{,}40393.$$

Die Lottoergebnisse mit einem Zwilling an der ersten und zweiten Stelle sowie einem weiteren Zwilling an der dritten und vierten Stelle und sonst keinen benachbarten Zahlen werden durch die Abbildung

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \rightarrow \{x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, x_4 - 3, x_5 - 4, x_6 - 5\}$$

bijektiv auf die vierelementigen Teilmengen aus den Zahlen 1 bis 40 abgebildet. es gibt daher genau $\binom{40}{4}$ solche Tipps. Nun ist noch zu berücksichtigen, dass die beiden Zwillinge (Z) und die beiden einzelnen Gewinnzahlen (E) auch in anderer Reihenfolge auftreten können. Insgesamt gibt es $\binom{4}{2}$ verschiedene Anordnungen, nämlich: ZZEE, ZEZE, EZZE, ZEEZ, EZEZ, EEZZ. Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den sechs Gewinnzahlen einer Runde genau zwei Zwillinge und sonst keine benachbarten Zahlen sind, beträgt daher:

$$P(2 \text{ echte Zwillinge}) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{40}{4}}{\binom{45}{6}} = \frac{548340}{8145060} \approx 0{,}067322$$

Analog dazu überlegt man die übrigen Fälle. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

Ereignis	Wahrscheinlichkeit
ein Zwilling	$\frac{5 \cdot \binom{40}{5}}{8145060} = \frac{3290040}{8145060} \approx 0{,}4039307$
zwei Zwillinge	$\frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{40}{4}}{8145060} = \frac{548340}{8145060} \approx 0{,}067322$
drei Zwillinge	$\frac{\binom{40}{3}}{8145060} = \frac{9880}{8145060} \approx 0{,}0012130$
ein Drilling	$\frac{4 \cdot \binom{40}{4}}{8145060} = \frac{365560}{8145060} \approx 0{,}0448812$
zwei Drillinge	$\frac{\binom{40}{2}}{8145060} = \frac{780}{8145060} \approx 0{,}0000958$

ein Drilling und ein Zwilling	$\frac{6\cdot\binom{40}{3}}{8145060}=\frac{59280}{8145060}\approx 0{,}0072780$
ein Vierling	$\frac{3\cdot\binom{40}{3}}{8145060}=\frac{29640}{8145060}\approx 0{,}0036390$
ein Vierling und ein Zwilling	$\frac{2\cdot\binom{40}{2}}{8145060}=\frac{1560}{8145060}\approx 0{,}0001915$
ein Fünfling	$\frac{2\cdot\binom{40}{2}}{8145060}=\frac{1560}{8145060}\approx 0{,}0001915$
ein Sechsling	$\frac{40}{8145060}\approx 0{,}0000049$
mindestens zwei benachbarte Zahlen	$1-\frac{\binom{40}{6}}{8145060}=\frac{4306680}{8145060}\approx 0{,}52875$

9. Systemspiele beim Lotto 6 aus 45

a) Angenommen, ein Lottospieler gibt einen Systemtipp 0/12 mit 12 Wahlzahlen ab.
a1) Wie viele Tippreihen umfasst dieses Systemspiel?
a2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Spieler 6 Richtige, 5 Richtige mit Zusatzzahl, 5 Richtige ohne Zusatzzahl, 4 Richtige, 3 Richtige hat?
a3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Spieler nicht gewinnt?
a4) Angenommen, der Spieler hat vier der Gewinnzahlen getroffen. Wie viele Tipps mit 4 Richtigen und wie viele mit 3 Richtigen hat er dann?

ad a1)
Der Spieler kreuzt in diesem Fall zwölf Wahlzahlen an und hat sich damit für alle möglichen Tippreihen entschieden, die aus Sechserkombinationen dieser Wahlzahlen gebildet werden können. Dieses Systemspiel umfasst daher insgesamt $\binom{12}{6}=924$ Tippreihen.

ad a2)
„k Richtige“ ($0\le k\le 6$) hat der Spieler genau dann, wenn k der sechs Gewinnzahlen aus den zwölf vom Spieler angekreuzten Wahlzahlen, und die restlichen 6-k Gewinnzahlen aus den 33 übrigen Zahlen gezogen werden. Daraus folgt:

$$P(\text{k Richtige})=\frac{\binom{12}{k}\cdot\binom{33}{6-k}}{\binom{45}{6}}$$

Insbesondere erhält man

$$P(6\text{ Richtige}) = \frac{924}{8145060} \approx 0{,}00011344$$

$$P(5\text{ Richtige}) = \frac{26136}{8145060} \approx 0{,}0032088$$

$$P(4\text{ Richtige}) = \frac{261360}{8145060} \approx 0{,}032088$$

$$P(3\text{ Richtige}) = \frac{1200320}{8145060} \approx 0{,}147368$$

„5 Richtige mit Zusatzzahl" hat der Spieler dann, wenn er „5 Richtige" hat und wenn außerdem die Zusatzzahl ein der restlichen sieben von ihm angekreuzten Wahlzahlen ist:

$$P(5\text{ Richtige mit Zusatzzahl}) = P(5\text{ Richtige})\cdot\frac{7}{39} \approx 0{,}0005759$$

$$P(5\text{ Richtige ohne Zusatzzahl}) = P(5\text{ Richtige})\cdot\frac{32}{39} \approx 0{,}0026329$$

ad a3)
Der Spieler gewinnt nichts, wenn er weniger als drei der Gewinnzahlen getroffen hat. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$1 - [P(6\text{ Richtige}) + P(5\text{ Richtige}) + P(4\text{ Richtige}) + P(3\text{ Richtige})] = \frac{6656320}{8145060} \approx 0{,}81722$$

ad a4)
Angenommen, der Spieler hat vier der sechs Gewinnzahlen getroffen. „4 Richtige" enthalten in diesem Fall alle jene Tippreihen, die aus diesen vier Zahlen bestehen, und daneben noch zwei der restlichen acht Wahlzahlen enthalten. Der Spieler hat daher $\binom{8}{2} = 28$ Tipps mit „4 Richtigen". „3 Richtige" enthalten alle jene Tipps, die drei der vier getroffenen Gewinnzahlen und drei der restlichen acht Wahlzahlen enthalten; das sind insgesamt $\binom{4}{3}\cdot\binom{8}{3} = 4*56 = 224$ Tipps.

b) Ein Lottospieler gibt einen Systemtipp 2/10 mit zwei Bankzahlen und 10 Wahlzahlen ab.
b1) Wie viele Tippreihen umfasst dieses Systemspiel?
b2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Spieler 6 Richtige, 5 Richtige mit Zusatzzahl, 5 Richtige ohne Zusatzzahl, 4 Richtige, 3 Richtige hat?
b3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Spieler nicht gewinnt?
b4) Angenommen, der Spieler hat
zwei Bankzahlen und zwei Wahlzahlen,
eine Bankzahl und drei Wahlzahlen,

keine Bankzahl und vier Wahlzahlen richtig.
Wie viele Tipps mit 4 Richtigen und wie viele mit 3 Richtigen hat er dann jeweils?

ad b1)
In diesem Fall kreuzt der Spieler zwei Bankzahlen und zehn Wahlzahlen an. Er hat damit alle jene Tipps gesetzt, die einerseits die beiden Bankzahlen und andrerseits alle möglichen Viererkombinationen aus den zehn Wahlzahlen enthalten. Insagesamt sind das $\binom{10}{4} = 210$ Tipps.

ad b2)
„6 Richtige" hat der Spieler genau dann, wenn seine beiden Bankzahlen und vier seiner zehn Wahlzahlen als Gewinnzahlen gezogen werden.

$$P(6\text{ Richtige}) = \frac{\binom{10}{4}}{\binom{45}{6}} = \frac{210}{8145060} \approx 0{,}00002578$$

„5 Richtige" hat der Spieler dann, wenn
- entweder seine beiden Bankzahlen, drei seiner zehn Wahlzahlen und eine der übrigen 33 Zahlen
- oder eine seiner beiden Bankzahlen, vier seiner zehn Wahlzahlen und eine der übrigen 33 Zahlen

als Gewinnzahlen gezogen werden.

$$P(5\text{ Richtige}) = \frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{10}{3}\cdot\binom{33}{1}+\binom{2}{1}\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{33}{1}}{\binom{45}{6}} = \frac{17820}{8145060} \approx 0{,}0021878$$

„5 Richtige mit Zusatzzahl" hat der Spieler dann, wenn er „5 Richtige" hat und wenn außerdem die Zusatzzahl eine der restlichen sieben von ihm angekreuzten Zahlen ist:

$$P(5\text{ Richtige mit Zusatzzahl}) = P(5\text{ Richtige})\cdot\frac{7}{39} \approx 0{,}0003927$$

$$P(5\text{ Richtige ohne Zusatzzahl}) = P(5\text{ Richtige})\cdot\frac{32}{39} \approx 0{,}001795$$

Analog dazu überlegt man:

$$P(4\text{ Richtige}) = \frac{\binom{2}{2}\binom{10}{2}\binom{33}{2}+\binom{2}{1}\binom{10}{3}\binom{33}{2}+\binom{2}{0}\binom{10}{4}\binom{33}{2}}{\binom{45}{6}} = \frac{261360}{8145060} \approx 0{,}032088$$

$$P(3\text{ Richtige}) = \frac{\binom{2}{2}\binom{10}{1}\binom{33}{3}+\binom{2}{1}\binom{10}{2}\binom{33}{3}+\binom{2}{0}\binom{10}{3}\binom{33}{3}}{\binom{45}{6}} = \frac{1200320}{8145060} \approx 0{,}147368$$

ad b3)
Der Spieler gewinnt nichts, wenn er weniger als drei der Gewinnzahlen getroffen hat. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$1 - [P(6\text{ Richtige}) + P(5\text{ Richtige}) + P(4\text{ Richtige}) + P(3\text{ Richtige})] = \frac{6665350}{8145060} \approx 0{,}81833$$

ad b4)
Angenommen, der Spieler hat beide Bankzahlen und zwei Wahlzahlen richtig. „4 Richtige" enthalten in diesem Fall alle jene Tippreihen, die neben den beiden richtigen Wahlzahlen noch zwei der restlichen acht Wahlzahlen enthalten, das sind $\binom{8}{2} = 28$ Tippreihen. „3 Richtige" enthalten jene Tipps, die eine der beiden richtigen Wahlzahlen und drei der restlichen acht Wahlzahlen enthalten, das sind $\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{3} = 112$ Tipps.

Angenommen, der Spieler hat eine Bankzahl und drei Wahlzahlen richtig. „4 Richtige" enthalten in diesem Fall alle jene Tippreihen, die neben den drei richtigen Wahlzahlen noch eine der restlichen sieben Wahlzahlen enthalten, das sind 7 Tipps. „3 Richtige" enthalten jene Tipps, die zwei der drei richtigen Wahlzahlen und zwei der restlichen sieben Wahlzahlen enthalten, das sind $\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{2} = 63$ Tipps.

Angenommen, der Spieler hat keine der beiden Bankzahlen, aber vier der zehn Wahlzahlen richtig. In diesem Fall hat er nur einen Vierer. „3 Richtige" enthalten jene Tipps, die drei der vier richtigen und eine der sechs falschen Wahlzahlen enthalten, das sind $\binom{4}{3}\cdot\binom{6}{1} = 24$ Tipps.

Für alle Systemspiele gilt: Umfasst das System n Tippreihen, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser genau so groß wie bei Abgabe von n beliebigen, voneinader verschiedenen Tipps. Systemspielen erhöht also die Chance auf einen Sechser nicht.

Bei den unteren Gewinnrängen ist es sogar so, dass man mit n zufällig ausgewählten verschiedenen Tipps im Allgemeinen sogar öfter gewinnen wird als mit dem Systemspiel. So ist die Wahrscheinlichkeit für „mindestens 3 Richtige" bei dem 924 Tipps umfassenden Systemspiel 0/12 nur ca. 7,7-mal so groß wie bei Abgabe eines einzigen Tipps. Man muss aber berücksichtigen, dass man beim Systemspiel im Fall eines Gewinns gleich eine größere Anzahl gewinnbringender Tipps hat. Die niedrigere Gewinnwahrscheinlichkeit wird also durch eine höhere Auszahlung im Falle eines Gewinnes wieder ausgeglichen.

10. Das Lotto 6 aus 49 in Deutschland

Alle in dieser Arbeit vorgestellten Aufgaben könnten modifiziert werden, indem man ein Lottosystem eines andere Landes zugrunde legt, zum Beispiel: Lotto 6 aus 49 (Deutschland, Spanien), Lotto 6 aus 42 (Schweiz), Lotto 6 aus 41 (Niederlande), Lotto 6 aus 40 (Belgien).

Aus dem Kabelfernsehen ist vielen Österreichern das deutsche Lotto 6 aus 49 bekannt. In Deutschland werden bereits seit Oktober 1955 wöchentlich Ziehungen zum Lotto 6 aus 49 durchgeführt. Seit einigen Jahren gibt es sogar insgesamt drei Ziehungen pro Woche, und zwar zwei Ziehungen am Mittwoch und eine Ziehung am Samstag.

Jeder für eine Mittwoch-Lottorunde abgegebene Tipp kostet 1 DM und nimmt an zwei voneinander unabhängigen Ziehungen teil. Wie in Österreich wird auch in Deutschland nur die Hälfte des Wetteinsatzes einer Spielrunde als Gewinnsumme ausgeschüttet. Diese Gewinnsumme wird nun beim Mittwochlotto zunächst einmal zu gleichen Teilen auf Ziehung A und Ziehung B aufgeteilt. Die prozentuale Verteilung der Gewinnsumme auf die einzelnen Gewinnklassen sieht insgesamt folgendermaßen aus:

Gewinnklasse	Ziehung A	Ziehung B
I (6 Gewinnzahlen)	7,50%	7,50%
II (5 mit Zusatzzahl)	3,75%	3,75%
III (5 ohne Zusatzzahl)	11,25%	11,25%
IV (4 Gewinnzahlen)	11,25%	11,25%
V (3 Gewinnzahlen)	16,25%	16,25%
Summen	50%	50%

Ein für eine Samstag-Lottorunde abgegebener Tipp kostet 1,25 DM, und nimmt nur an einer Ziehung teil. Im Unterschied zum österreichischen Lotto 6 aus 45 und zum deutschen Mittwoch-Lotto gibt es beim Samstag-Lotto aber sieben Gewinnklassen: Hier ist die Zusatzzahl nicht nur für Tipps mit fünf richtigen Gewinnzahlen relevant, sondern auch bei drei Richtigen werden die Gewinnklassen „3 Richtige mit Zusatzzahl" und „3 Richtige ohne Zusatzzahl" unterschieden. Außerdem wird bei der Samstag-Runde zusätzlich zu den sechs Gewinnzahlen und der Zusatzzahl noch eine der Zahlen 0, 1, 2, ..., 9 als „Superzahl" ausgelost, und es gibt die Gewinnklassen „6 Richtige mit Superzahl" und „6 Richtige ohne Superzahl". „6 Richtige mit Superzahl" hat ein Spieler dann, wenn er alle sechs Gewinnzahlen richtig hat, und zusätzlich noch die letzte Ziffer seiner Lottoscheinnummer mit der in dieser Runde gezogenen Superzahl übereinstimmt. Die Gewinnsumme der Samstag-Runde wird folgendermaßen auf die einzelnen Gewinnklassen verteilt:

Gewinnklasse	Anteil der Gewinnsumme
I (6 mit Superzahl)	4%
II (6 ohne Superzahl)	12%
III (5 mit Zusatzzahl)	6%
IV (5 ohne Zusatzzahl)	20%
V (4 Gewinnzahlen)	20%
VI (3 mit Zusatzzahl)	14%
VII (3 ohne Zusatzzahl)	24%
Summe	100%

Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Ziehung des Lottos 6 aus 49 mit einem Tipp k Richtige ($0 \leq k \leq 6$) zu haben, kann analog zu Abschnitt 3 berechnet werden. Hier ist

$$P(6\ \text{Richtige}) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

Als Ergebnis erhält man:

$$P(6\ \text{Richtige}) = \frac{1}{13983816} \approx 0{,}0000000715$$

$$P(6\ \text{Richtige mit Superzahl}) = P(6\ \text{Richtige}) \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{139838160} \approx 0{,}00000000715$$

$$P(6\ \text{Richtige ohne Superzahl}) = P(6\ \text{Richtige}) \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{139838160} \approx 0{,}00000006436$$

$$P(5\ \text{Richtige}) = \frac{258}{13983816} \approx 0{,}0000184$$

$$P(5\ \text{Richtige mit Zusatzzahl}) = P(5\ \text{Richtige}) \cdot \frac{1}{43} = \frac{6}{13983816} \approx 0{,}000000429$$

$$P(5\ \text{Richtige ohne Zusatzzahl}) = P(5\ \text{Richtige}) \cdot \frac{42}{43} = \frac{252}{13983816} \approx 0{,}0000180$$

$$P(4\ \text{Richtige}) = \frac{13545}{13983816} \approx 0{,}000969$$

$$P(3\ \text{Richtige}) = \frac{246820}{13983816} \approx 0{,}0177$$

$$P(3\ \text{Richtige mit Zusatzzahl}) = P(3\ \text{Richtige}) \cdot \frac{3}{43} = \frac{17220}{13983816} \approx 0{,}0012314$$

$$P(3\ \text{Richtige mit Zusatzzahl}) = P(3\ \text{Richtige}) \cdot \frac{40}{43} = \frac{229600}{13983816} \approx 0{,}01642$$

11. Die Gewinnquoten beim Lotto 6 aus 45

Bei der Klassenlotterie, beim Roulette und bei vielen anderen Glücksspielen stehen die Auszahlungsquoten von vornherein fest. Beim Lotto dagegen werden die Gewinnsummenanteile der einzelnen Gewinnränge gleichmäßig auf die vorhandenen Gewinner aufgeteilt. Hier hängen die

Auszahlungsquoten also von der jeweiligen Anzahl der Gewinner und damit gewissermaßen vom Zufall ab.

Mit Hilfe des folgenden Modells kann man die Quotenerwartungen beim Lotto bestimmen: Angenommen, jeder der möglichen 8 145 060 verschiedenen Tipps wird genau einmal abgegeben. Dann beträgt die gesamte Gewinnsumme 8 145 060 * 6,99 * 0,5 = 28 466 984,7 S. Dieser Betrag wird nun nach dem vorgegebenen Schlüssel auf die einzelnen Gewinnränge verteilt (siehe Abschnitt 1). Die Anzahl der Gewinner in den einzelnen Gewinnrängen ist im Zusammenhang mit den Gewinnwahrscheinlichkeiten in Abschnitt 2 berechnet worden. Dividiert man den Gewinnsummenanteil eines Ranges durch die Anzahl der Gewinner, so erhält man die Quotenerwartung dieses Ranges:

Gewinnrang		Gewinnsummen-anteil	Anzahl Gewinner	Quoten-erwartung
6 Richtige	30 %	8 540 095,41	1	8 540 095,41
5 mit Zusatzzahl	10 %	2 846 698,47	6	474 449,75
5 ohne Zusatzzahl	15 %	4 270 047,71	228	18 728,28
4 Richtige	20 %	5 693 396,94	11115	512,23
3 Richtige	25 %	7 116 746,18	182780	38,94
	100 %	28 466 984,70		

Würden alle Lottospieler ihre Tippreihen mit Zufallsprinzip auswählen, so könnte man nach dem Gesetz der großen Zahlen davon ausgehen, dass die Höhe der Gewinne in den unteren Rängen (Dreier, Vierer, Fünfer) nur wenig von diesen Quotenerwartungen abweichen.

Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse von 30 Lottorunden der Jahre 1992 und 1993, und zwar von jenen 15 Lottorunden mit den niedrigsten Quoten für den Dreier und jenen 15 Runden mit den höchsten.

Runde	Gewinnzahlen						Gewinnquote für den Dreier	Vierer	Fünfer	Anzahl Sechser
32/92	4	7	21	26	27	29	26	285	8694	7
17/93	7	10	13	26	28	**36**	27	234	2460	2
44/93	11	15	21	27	29	30	29	350	12667	0
46/92	7	12	15	22	26	30	30	293	10183	2
7/92	7	17	19	21	25	29	30	332	11276	6
37/92	4	9	20	26	27	30	30	336	11329	3
6/93	6	12	22	28	30	**33**	30	366	12812	5
17/92	4	5	14	23	26	27	30	372	15734	2
8/93	3	4	10	17	20	**34**	31	369	11967	4
21/92	2	8	17	27	29	**36**	31	383	12552	0
35/92	3	4	11	27	**32**	**39**	31	410	15894	3
18/93	6	9	15	16	27	**37**	32	384	13250	3
20/92	4	5	22	26	**33**	**36**	33	358	14674	1
37/93	2	6	8	14	22	29	33	400	13122	2
42/93	6	10	16	27	29	**35**	33	413	14198	6

36/92	18 **37** **39** **40** **43** **45**	61	788	20859	0
48/93	2 17 **41** **42** **44** **45**	59	718	39084	0
41/92	1 12 13 **36** **43** **44**	57	869	38520	0
43/92	10 23 25 **31** **36** **45**	50	773	33251	0
43/93	6 25 **33** **38** **42** **43**	50	771	39885	0
10/92	12 24 25 29 **40** **45**	49	811	35576	0
22/93	9 30 **36** **40** **43** **45**	48	740	31587	0
48/92	1 5 23 24 **40** **42**	48	719	30744	1
36/93	4 5 6 15 **38** **44**	47	780	36065	1
35/93	3 29 30 **37** **38** **41**	47	728	28870	0
15/93	5 11 25 **31** **36** **38**	47	700	30232	0
9/92	1 7 11 **35** **38** **41**	46	724	34523	0
16/93	5 21 **34** **40** **41** **43**	46	717	34567	1
11/93	6 19 25 **39** **40** **42**	46	692	28253	2
29/93	9 11 13 25 **37** **44**	46	667	23833	1

An diesen Ergebnissen fällt auf:

*) Niedrigen Gewinnquoten für den Dreier entsprechen stets auch niedrige Gewinnquoten für den Vierer und den Fünfer und im Allgemeinen auch überdurchschnittlich viele Sechser. Sind, umgekehrt, die Gewinnquoten für den Dreier deutlich höher als die entsprechende Quotenerwartung, so gilt dasselbe auch für den Vierer und den Fünfer, und es gibt sehr wenige Sechser. Man kann vermuten, dass in den Lottorunden mit niedrigen Gewinnquoten Tippreihen gezogen worden sind, die von den Spielern bevorzugt gesetzt worden sind, und dass hohen Gewinnquoten unbeliebte Tippreihen entsprechen.

*) Auffallend an den „beliebten" Tippreihen ist, dass die Zahlen des oberen Drittels (31 bis 45) stark unterrepräsentiert sind, und dass Vierzigerzahlen (40 bis 45) überhaupt nicht vorkommen. Nur zehn der insgesamt neunzig Gewinnzahlen dieser 15 Runden sind größer gleich 31. Zwei der 15 Tippreihen enthalten genau zwei Zahlen des oberen Drittels, alle übrigen nur eine oder gar keine.

*) Umgekehrt sind in den 15 „unbeliebten" Tippreihen die Zahlen des oberen Drittels und hier insbesondere die Vierzigerzahlen extrem stark vertreten: 47 der neunzig Gewinnzahlen dieser Runden sind größer gleich 31, 28 der neunzig Gewinnzahlen sogar größer gleich 40. In 14 der 15 Runden kommt mindestens eine Vierzigerzahl vor. Drei der 15 Tippreihen enthalten zwei Zahlen des oberen Drittels, alle übrigen sogar mindestens drei.

12. Spielstrategien beim Lotto?

Strategien zur Erhöhung der Gewinnwahrscheinlichkeit kann es beim Lotto nicht geben: Bei jeder einzelnen Lottoziehung liegt dieselbe Ausgangssituation vor. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tipp zu gewinnen, ist unabhängig davon, wie oft bzw. wann die angekreuzten Zahlen in der Vergangenheit gezogen worden sind. So hat, zum Beispiel, die Gewinnreihe der letzten Lottorunde die gleiche Chance, am nächsten Sonntag wieder gezogen zu werden wie jede andere Tippreihe auch. Wenn jemand beim Lotto gewinnt, so hat er das ausschließlich dem Zufall zu verdanken, und es gibt keine Möglichkeit, diesen zu überlisten.

Andrerseits besteht aber beim Lotto sehr wohl die Möglichkeit, die Gewinnquote zu beeinflussen. Bei jeder Lottorunde hängt die Gewinnsumme von der Anzahl der abgegebenen Tipps ab, und die Gewinnsummenanteile der einzelnen Gewinnränge werden gleichmäßig auf die jeweiligen Gewinner aufgeteilt. Aus diesem Grund erscheint es sinnvoll,

1. nicht in jeder Lottorunde zu setzen, sondern seinen Spieleinsatz auf wenige Runden zu konzentrieren, und zwar auf solche, in denen besonders hohe Gewinnsummen für den Sechser ausgeschüttet werden (Spielrunden nach einem Jackpot).

2. Tippreihen zu wählen, bei denen anzunehmen ist, dass sie von anderen Lottospielern eher nicht gesetzt werden, um im Fall eines Gewinns mit möglichst wenigen Mitspielern teilen zu müssen.

Durch diese „Strategie" wird zwar die Gewinnwahrscheinlichkeit nicht erhöht, man kann aber im Fall eines Gewinns mit einer überdurchschnittlich hohen Gewinnquote rechnen.

Um seine Tippreihen strategisch günstig auswählen zu können, müsste man über das Tippverhalten der anderen Lottospieler informiert sein. Leider gibt es keine Statistiken über das Spielverhalten beim österreichische Lotto 6 aus 45. Es gibt aber eine diesbezügliche Untersuchung zum deutschen Lotto 6 aus 49, deren Resultate auch für Österreich relevant sein dürften. In [4] werden die Ergebnisse einer Untersuchung vorgestellt, in der alle 6 803090 Tippreihen, die im deutschen Bundesland Baden-Württemberg bei einer bestimmten Lottorunde im Jahr 1993 gesetzt worden sind, statistisch ausgewertet wurden.

Die wichtigsten Ergebnisse dabei sind:

***) Einige der Zahlen 1 bis 49 werden von den Spielern bevorzugt angekreuzt, andere dagegen nur unterdurchschnittlich oft gewählt:**

Bei gleichmäßiger Auswahl aller 49 Zahlen hätte jede 833.031-mal auftreten müssen. Die beliebteste Zahl 19 wurde 1.106.215-mal angekreuzt, die unbeliebteste Zahl 36 dagegen nur 614.538-mal. Die beliebtesten Zahlen (in der Reihenfolge ihres Beliebtheitsgrades) waren 19, 9, 7, 17, 10, 11, 18, 25, 3, 32, 12, 24, 33, 5, 31, 4, 26, 6. Die unbeliebten Zahlen waren 36, 43, 35, 29, 44, 42, 47, 22, 15, 14, 49, 48, 45, 46, 28, 34, 1, 20, 8, 37, 21.

Kreuzt man diese Zahlen in einem deutschen Lotto-Tippfeld an, so fällt auf, dass die unbeliebten Zahlen im Wesentlichen die Zahlen auf dem linken, rechten und unteren Rand des Tippfelds sind. Den beliebten Zahlen entsprechen im Wesentlichen die drei mittleren Zahlen der ersten fünf Zeilen:

1	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
8	**9**	**10**	**11**	**12**	13	14
15	16	**17**	**18**	**19**	20	21
22	23	**24**	**25**	**26**	27	28
29	30	**31**	**32**	**33**	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

beliebte Zahlen

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	**14**
15	16	17	18	19	**20**	**21**
22	23	24	25	26	27	**28**
29	30	31	32	33	**34**	**35**
36	**37**	38	39	40	41	**42**
43	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**

unbeliebte Zahlen

***) Tippreihen mit entweder gar keinen oder mit sechs „Geburtstagszahlen" werden überdurchschnittlich oft gesetzt, Tippreihen mit genau einer oder genau zwei Geburtstagszahlen dagegen liegen stark unter der erwarteten Häufigkeit.**

Es wird vermutet, dass viele Menschen Geburtstagszahlen tippen: Der Geburtsmonat liegt immer zwischen 1 und 12, der Tag zwischen 1 und 31. In der in Baden-Württemberg durchgeführten Untersuchung war die Zahl 19 mit großem Abstand die am häufigsten getippte Zahl. Als mögliche Erklärung wird angegeben, dass 19 als Geburtsjahreszahl in allen Geburtsdaten vorkommt. So kann, zum Beispiel, das Geburtsjahr 1926 in die Lottozahlen 19 und 26 zerlegt werden.

***) Tippreihen mit Mehrlingen werden nur unterdurchschnittlich oft getippt:**

Die Wahrscheinlichkeit für benachbarte Zahlen unter den Gewinnzahlen beträgt beim deutschen Lotto 49,5%. Unter den 6.803090 ausgewerteten Tippreihen waren aber nur 2.655.982 (dh. 39%) Tipps mit Mehrlingen.

***) Sehr beliebt unter den Lottospielern sind „Mustertipps", dh. Tipps, bei denen die angekreuzten Zahlen ein regelmäßiges Muster auf dem Tippfeld ergeben.**

Die folgende Tabelle fasst jene 26 Tippreihen zusammen, die in der untersuchten Lottorunde allein in Baden-Württemberg mehr als 1000-mal gesetzt worden sind. Die meisten dieser Tippreihen sind Mustertipps. Der 4004-mal abgegebene Tipp 7, 13, 19, 25, 31, 37 entsprichte der Diagonalreihe von rechts oben nach links unten. Selbst die Sechslinge 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 44, 45, 46, 47, 48, 49 (denen naive Lottospieler wenig Gewinnchancen zutrauen) sind 3249-mal bzw. 1489-mal gesetzt worden!

7	13	19	25	31	37	4004
7	14	21	28	35	42	3817
5	27	34	35	37	49	3698
1	2	3	4	5	6	3249
4	11	18	25	32	39	2821
13	19	25	31	37	43	2335
6	12	18	24	30	36	2288
9	17	25	33	41	49	2227
1	9	17	25	33	41	2116
8	16	24	32	40	48	2097
8	14	21	25	36	39	2083
6	25	27	30	34	39	1896

9	17	20	21	26	41	1868
2	10	18	26	34	42	1551
5	10	15	20	25	30	1527
44	45	46	47	48	49	1489
12	24	32	36	40	42	1459
1	10	20	30	40	49	1387
43	44	45	46	47	48	1341
1	7	22	28	43	49	1317
3	10	17	24	31	38	1292
10	18	24	30	33	44	1269
1	8	15	22	29	36	1212
11	18	25	32	39	46	1202

13. Aufgabensammlung für den Unterricht

A1 Für einen Lottotipp sind 8 S zu bezahlen, davon entfallen 1,01 S auf einen Verwaltungskostenanteil und 6,99 S auf den eigentlichen Wetteinsatz. Nur 50% des gesamten-Wetteinsatzes einer Runde werden als Gewinnsumme ausgeschüttet. Dieser Betrag wird auf fünf Gewinnränge aufgeteilt, und zwar 30% auf den Sechser, 10% auf den Fünfer mit Zusatzzahl, 15% auf den Fünfer, 20% auf den Vierer und 25% auf den Dreier.
Bei der Lottoziehung am 1.12.1996 hat es einen Sechser zu 14.545.865 S gegeben. Wie viele Tipps sind in dieser Runde abgegeben worden? Wieviel Schilling haben die Lottospieler insgesamt eingezahlt? Wie hoch ist die gesamte Gewinnsumme dieser Runde, wie hoch der Verwaltungskostenbeitrag?

A2 Die Lottoziehung am 12.1.1997 hat folgendes Ergebnis gebracht:
1 Sechser zu 14 713 144 S,
8 Fünfer mit Zusatzzahl zu 613 047 S,
336 Fünfer ohne Zusatzzahl zu 21 894 S,
21 407 Vierer zu 458 S,
356 502 Dreier zu 34 S.
a) Wie viele Tipps sind in dieser Runde abgegeben worden? Wieviel Schilling haben die Lottospieler insgesamt eingezahlt? Wie hoch ist der gesamte Wetteinsatz, wie hoch der Verwaltungskostenbeitrag?
b) Nach Aufteilen der Gewinnsumme auf die einzelnen Gewinnränge wird der Gewinnsummenanteil eines Ranges zu gleichen Teilen auf alle gewinnberechtigten Tipps dieses Ranges aufgeteilt. Dabei werden die einzelnen Gewinne auf ganze Schillingbeträge abgerundet. Welcher Betrag ist in dieser Spielrunde insgesamt der Abrundung zum Opfer gefallen?

A3 Jackpots sind ein starker Anreiz zum Lottospielen. In den ersten 538 Ziehungen des österreichischen Lottos von 1986 bis 1996 hat es insgesamt 137 Jackpots für den Lotosechser gegeben, davon 20 Doppeljackpots und 3 Dreifachjackpots. Der letzte Dreifachjackpot war im Jahr 1992, dabei sind auf den Sechser die folgenden Gewinnsummenanteile entfallen:

23.2.1992	JP	14.834.617
1.3.1992	DJP	34.650.884
8.3.1992	3JP	61.262.081
15.3.1992	2 6er zu	50.973.427

Wie viele Tipps sind in den einzelnen Runden abgegeben worden? Um wieviel Prozent hat die Zahl der Tipps von Runde zu Runde jeweils zugenommen?

A4 Für die Lottoziehung am 10.11. 1996 sind insgesamt 14 230 289 Tipps abgegeben worden. Die Ziehung brachte folgendes Ergebnis: 1 Sechser, 4 Fünfer mit Zusatzzahl, 274 Fünfer ohne Zusatzzahl, 14 322 Vierer, 265 971 Dreier.
Wie hoch war in dieser Spielrunde der Gewinn bei einem Sechser, Fünfer mit Zusatzzahl, usw. ? Welcher Betrag ist in dieser Spielrunde insgesamt der Abrundung zum Opfer gefallen?

A5 Der bisher größte Gewinn beim Lotto 6 aus 45 hat 60.213.905 S betragen (Solosechser am 25.8.1996 mit den Gewinnzahlen 8, 15, 24, 35, 42, 44).
a) Welche Masse hat ein Berg von a1) 10 S-Münzen, a2) 1 S-Münzen, a3) einfachen Golddukaten, der diesem Betrag entspricht?
b) Angenommen, diese Münzen werden entlang des Fahrbahnrandes einer Autobahn aneinandergereiht. Wie lang wäre eine aus lauter b1) 10 S-Münzen, b2) 1 S-Münzen, b3) einfachen Golddukaten bestehende Münzreihe?
c) Angenommen, der glückliche Gewinner legt den gesamten Lottogewinn zu 5% p.a. bzw. zu 6% p.a. an und teilt seine Jahreszinsen auf zwölf gleich große Monatsraten auf. Welches monatliche Einkommen kann er aus seinem Gewinn beziehen?

A6 Angenommen, jemand gibt bei einer Runde des Lottos 6 aus 45 einen Tipp ab.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 der sechs Gewinnzahlen richtig hat?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann er mit einem Gewinn, d.h. mit mindestens drei Richtigen rechnen?
c) Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der Richtigen, die mit einer Tippreihe erzielt werden?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
  d1) 5 Richtige mit Zusatzzahl,
  d2) 5 Richtige ohne Zusatzzahl hat?

A7 Angenommen, jemand gibt bei jeder Lottorunde einen Tipp ab.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es innerhalb eines Jahres (d.h. 52 Spielrunden) bzw. innerhalb von zehn Jahren mindestens einmal a) genau 6 Richtige, b) mindestens 4 Richtige, c) mindestens drei Richtige hat?

A8 Angenommen, jemand gibt bei jeder Lottorunde einen Tipp ab.
Wie viele Spielrunden wären erforderlich, damit er mit 99%iger (bzw. mit 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal a) mit 6 Richtigen, b) mit mindestens 4 Richtigen, c) mit mindestens 3 Richtigen rechnen kann?
Gib die entsprechenden Zeitspannen auch in Jahren an (1 Jahr $\approx$ 52 Spielrunden).

A9 Angenommen ein Spieler gibt bei jeder Spielrunde 12 (bzw. 24) verschiedene Tipps ab.
a) Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er innerhalb eines Jahres (bzw. innerhalb von 10 Jahren) mindestens einmal 6 Richtige hat?
b) Wie viele Spielrunden wären erforderlich, damit er mit 99%iger (bzw. mit 95%iger) Wahrscheinlichkeit mindestens einmal mit 6 Richtigen rechnen kann?

A10 In welchem Fall hat man die größte Aussicht, mit 1000 Lottotipps mindestens einmal sechs Richtige zu treffen:
a) wenn man bei 1000 Spielrunden je einen Tipp abgibt?
b) wenn man bei 100 Spielrunden je 10 verschiedene Tipps abgibt?
c) wenn man bei 10 Spielrunden je 100 verschiedene Tipps abgibt?
d) wenn man bei einer Spielrunde tausend verschiedene Tipps abgibt?

A11 Angenommen ein Lottospieler gibt bei jeder Spielrunde n verschiedene Tipps ab. Wie groß müsste n sein, damit er mit 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal mit sechs Richtigen innerhalb eines Jahres rechnen kann? Schätze zuerst!

A12 Ein Lottospieler hat nach der Ziehung der ersten drei Gewinnzahlen bereits drei Richtige. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er in dieser Runde a) 6 Richtige, b) 5 Richtige mit Zusatzzahl, c) 5 Richtige ohne Zusatzzahl, d) 4 Richtige, e) 3 Richtige haben wird?

A13 Wie groß ist in den folgenden Fällen die Wahrscheinlichkeit, dass Franz bzw. Anna mit einem Sechser, mit einem Fünfer mit Zusatzzahl, mit einem Fünfer ohne Zusatzzahl, mit einem Vierer, bzw. mit einem Dreier rechnen kann:
a) Anna und Franz sehen sich die Lottoziehung im Fernsehen an. Die ersten vier Gewinnzahlen lauten 26, 8, 13, 35. Anna hat den Tipp 8, 12, 13, 26, 35, 44 abgegeben, Franz hat auf 6, 8, 13, 29, 35, 45 gesetzt.
b) Jeden Montag werden die sechs Lottozahlen der Sonntagsziehung in den Tageszeitungen in aufsteigender reihenfolge veröffentlicht. Anna hat den Tipp 6, 7, 8, 24, 28, 35 abgegeben, Franz hat auf 7, 8, 24, 29, 42, 45 gesetzt. Auf einem abgerissenen Zeitungsabschnitt lesen sie die vier kleinsten Gewinnzahlen 7, 8, 24, 29; die letzten beiden Gewinnzahlen sind ihnen nicht bekannt.

A14 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zahl (zum Beispiel die Zahl 7) bei einer Lottorunde als erste, als zweite, ..., als sechste Gewinnzahl gezogen wird?

A15 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zahl (zum Beispiel die Zahl 8) bei einer Lottorunde unter den sechs Gewinnzahlen ist?

A16 Bei den ersten 540 Spielrunden des österreichischen Lottos 6 aus 45 waren die einzelnen Zahlen mit folgender Häufigkeit unter den sechs Gewinnzahlen:
1/ 71, 2/ 68, 3/ 69, 4/ 79, 5/ 85, 6/ 64, 7/ 88, 8/ 71, 9/ 66, 10/ 70, 11/ 66, 12/70, 13/ 68, 14/ 59, 15/ 67, 16/ 75, 17/ 74, 18/ 64, 19/ 64, 20/ 68, 21/ 71, 22/ 77, 23/ 72, 24/ 66, 25/ 74, 26/ 97, 27/81, 28/ 74, 29/ 75, 30/ 83, 31/ 72, 32/ 63, 33/ 78, 34/ 60, 35/ 73, 36/ 79, 37/ 68, 38/ 66, 39/ 79, 40/ 71, 41/ 64, 42/ 78, 43/ 81, 44/ 70, 45/ 62.
a) Wie oft ist eine bestimmte Zahl k ($1 \leq k \leq 45$) in 540 Lottorunden im Mittel als Gewinnzahl zu erwarten?
b) Für wie viele der Zahlen 1 bis 45 liegt die beobachtete Häufigkeit im 3σ-Bereich, für wie viele im 2σ-Bereich um diesen Erwartungswert?
c) Am häufigsten waren die Zahlen 26, 7 und 5, am wenigsten oft die Zahlen 14, 34 und 45 unter den Gewinnzahlen. Bestimme jeweils die Wahrscheinlichkeit für eine so starke oder noch stärkere Abweichung vom erwarteten Wert!

A17 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine, keine, genau eine, genau zwei, ..., genau sechs der bei einer Spielrunde gezogenen Gewinnzahlen auch bei der folgenden Spielrunde unter den Gewinnzahlen sind?

A18 Bei den ersten 540 Spielrunden des österreichischen Lottos 6 aus 45 ist es 317-mal vorgekommen, dass mindestens eine der sechs Gewinnzahlen der letzten Spielrunde auch bei der darauffolgenden Spielrunde als Gewinnzahl gezogen worden ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine so starke oder noch stärkere Abweichung vom erwarteten Wert?

A19 Im April/Mai 1992 war die Zahl 4 und im Dezember 92/Jänner 93 die Zahl 26 in fünf aufeinanderfolgenden Lottorunden unter den sechs Gewinnzahlen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl 4
a) bei den nächsten fünf Spielrunden jedes Mal unter den Gewinnzahlen ist,

b) bei den nächsten zehn Spielrunden genau fünfmal unter den Gewinnzahlen ist?

A20 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass a) die Zahl 6, b) die Zahl 20, c) die Zahl k ($1 \leq k \leq 40$) als kleinste der sechs Gewinnzahlen gezogen wird? Für welches k ist diese Wahrscheinlichkeit am größten, für welches am kleinsten?

A21 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass a) die Zahl 20, b) die Zahl 40, c) die Zahl k ($6 \leq k \leq 45$) als größte der sechs Gewinnzahlen gezogen wird? Für welches k ist diese Wahrscheinlichkeit am größten, für welches am kleinsten?

A22 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Spannweite der sechs Gewinnzahlen einer Runde a) 15, b) 30, c) k ($5 \leq k \leq 44$) beträgt? Für welches k ($5 \leq k \leq 44$) ist diese Wahrscheinlichkeit am größten, für welches am kleinsten?

A23 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den sechs Gewinnzahlen einer Lottorunde 0, 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 gerade Zahlen sind? Wie viele gerade Zahlen sind unter den sechs Gewinnzahlen im Mittel zu erwarten?

A24 Bis Ende 1996 haben insgesamt 538 Runden zum österreichischen Lotto 6 aus 45 stattgefunden. Gerade Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen sind dabei mit folgender Häufigkeit aufgetreten:

Gerade Gewinnzahlen	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl Ziehungen	6	55	140	169	121	41	6

a) Wie viele Ziehungen mit k geraden Gewinnzahlen sind unter 538 Ziehungen für $0 \leq k \leq 6$ im Mitttel zu erwarten?
b) Liegen die beobachteten Häufigkeiten im σ-Bereich (bzw. 2σ-Bereich) um den erwarteten Wert?

A25 a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den sechs Gewinnzahlen einer Lotturunde 0, 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 Zahlen aus dem oberen Drittel 31 bis 45 sind? Wie viele Zahlen aus dem oberen Drittel sind unter den sechs Gewinnzahlen im Mittel zu erwarten?
b) In den insgesamt 209 Lottoziehungen der Jahre 1992 bis 1995 sind die Zahlen 31 bis 45 mit folgender Häufigkeit unter den sechs Gewinnzahlen aufgetreten:

Gewinnzahlen 31 bis 45	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl Ziehungen	23	54	61	56	13	2	0

Wie viele Ziehungen mit k Gewinnzahlen aus dem oberen Drittel sind unter 209 Ziehungen für $0 \leq k \leq 6$ im Mittel zu erwarten? Liegen die beobachteten Häufigkeiten im σ-Bereich (bzw. 2σ-Bereich) um den erwarteten Wert?

A26 Da beim Lotto die Gewinnsummenanteile der einzelnen Gewinnränge gleichmäßig auf alle vorhandenen Gewinner aufgeteilt werden, sind die Gewinnquoten für einen Dreier, Vierer, Fünfer etc. bei den einzelnen Runden verschieden groß. Niedrige Gewinnquoten lassen darauf schließen, dass die gezogenen Gewinnzahlen überdurchschnittlich oft angekreuzt worden sind, hohe Gewinnquoten entsprechen unbeliebten Tippreihen.

a) In den 30 Lottorunden der Jahre 1992 bis 1995, die die höchsten Gewinnquoten für die unteren Ränge ergeben haben, sind die Zahlen des oberen Drittels mit folgender Häufigkeit unter den sechs Gewinnzahlen aufgetreten:

Gewinnzahlen 31 bis 45	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl Ziehungen	0	0	5	18	6	1	0

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Lottoziehung mindestens drei der sechs Gewinnzahlen aus dem oberen Drittel stammen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das bei 30 Lottoziehungen mindestens 25-mal der Fall ist?

b) In den 30 Lottorunden der Jahre 1992 bis 1995, die die niedrigsten Gewinnquoten für die unteren Gewinnränge aufgewiesen haben, sind die Zahlen des oberen Drittels mit folgenden Häufigkeiten aufgetreten:

Gewinnzahlen 31 bis 45	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl Ziehungen	13	13	4	0	0	0	0

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 30 Lottoziehungen stets höchstens zwei der sechs Gewinnzahlen aus dem oberen Drittel stammen?

A27 Seit Einführung des österreichischen Lottos 6 aus 45 ist es zweimal vorgekommen, dass vier der sechs Gewinnzahlen benachbarte Zahlen waren (9, 10, 11, 12, 17, 44 am 4.11.1990 und 5, 29, 30, 31, 32, 37 am 6.3.1994). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dafür, dass unter den sechs Gewinnzahlen einer Lottorunde a) genau vier Zahlen, b) genau fünf Zahlen, c) genau sechs Zahlen direkt aufeinanderfolgen?

A28 a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den sechs Gewinnzahlen einer Lottorunde Mehrlinge (dh mindestens zwei benachbarte Zahlen) sind?

b) Bei den ersten 538 Ziehungen des österreichischen Lottos sind Mehrlinge 293-mal aufgetreten. Wie oft sind Mehrlinge in 538 Ziehungen im Mittel zu erwarten? Bestimme einen symmetrischen Bereich um diesen Erwartungswert, in dem die Anzahl der Mehrlingsziehungen mit 95%iger Wahrscheinlichkeit liegt!

c) Bei den ersten 538 Lottoziehungen war 137-mal ein Jackpot für den Lottosechser, in 90 dieser Jackpotrunden waren Mehrlinge unter den Gewinnzahlen. Wie oft sind Mehrlinge in 137 Ziehungen im Mittel zu erwarten? Bestimme auch hier einen symmetrischen Bereich um den Erwartungswert, in dem die Anzahl der Mehrlingsziehungen mit 95%iger Wahrscheinlichkeit liegt!

A29 Für benachbarte Zahlen unter den sechs Gewinnzahlen gibt es die folgenden Möglichkeiten (dabei wird angenommen, dass es außer dem angeführten Mehrling keine weiteren benachbarten Zahlen gibt):

a) ein Zwilling, b) zwei Zwillinge, c) drei Zwillinge, d) ein Drilling, e) zwei Drillinge, f) ein Zwilling und ein Drilling, g) ein Vierling, h) ein Vierling und ein Zwilling, i) ein Fünfling, j) ein Sechsling.

Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der einzelnen Fälle?

A30 Beim österrichischen Lotto 6 aus 45 gibt es auch Lotto-Systemscheine, auf denen insgesamt 48 Variationssysteme angeboten werden. Bei den Systemspielen 0/07, 0/08, 0/09,....,0/12 kreuzt der Spieler 7, 8, 9, ... bzw. 12 der Zahlen 1 bis 45 als „Wahlzahlen"

an. Das entspricht der Abgabe aller möglichen Tippreihen, die aus Sechserkombinationen dieser Wahlzahlen gebildet werden können.
Daneben gibt es auch die Systemspiele 1/07, 1/08, ..., 1/11, 2/07, 2/08,....., 2/13, 3/05, 3/06, ...,3/18, 4/04, 4/05, 4/18, sowie 5/40 mit „Bank- und Wahlzahlen". Hier bedeutet, zum Beispiel, 3/08, dass der Spieler 3 Bankzahlen und 8 Wahlzahlen ankreuzt. In diesem Fall hat er alle Tippreihen gesetzt, die einerseits die 3 Bankzahlen und daneben alle möglichen Dreierkombinationen aus den 8 Wahlzahlen enthalten.
Angenommen, ein Spieler gibt einen Systemtipp 0/10 mit 10 Wahlzahlen ab.
a) Wie viele Tippreihen umfasst dieses Systemspiel?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige, für 5 Richtige mit Zusatzzahl, für 5 Richtige ohne Zusatzzahl, für 4 Richtige, für 3 Richtige?
c) Angenommen, der Spieler hat 4 der Gewinnzahlen richtig angekreuzt. Wie viele Vierer und wie viele Dreier hat er dann?

A31 Die Fragen von Aufgabe 30 sind für die Systemspiele 0/8 bzw. 2/08 zu beantworten.

A32 Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man bei einer Ziehung des Lottos
a) 6 aus 49 (Deutschland, Spanien)
b) 6 aus 42 (Schweiz)
c) 6 aus 41 (Niederlande)
d) 6 aus 40 (Belgien)
bei einer abgegebenen Tippreihe mit 6 Richtigen rechnen? Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn (dh. für mindestens 3 Richtige)?

A33 In Deutschland werden jeden Mittwoch zwei und jeden Samstag eine Ziehung zum Lotto 6 aus 49 durchgeführt.
Jeder für die Mittwochrunde abgegebene Tipp kostet 1 DM und nimmt an zwei voneinander unabhängigen Lottoziehungen A und B teil (Die Gewinnsumme der Mittwochrunde wird zu gleichen Teilen auf die beiden Ziehungen aufgeteilt). Bei jeder dieser Ziehungen gibt es die fünf Gewinnklassen 6 Richtige, 5 Richtige mit Zusatzzahl, 5 Richtige ohne Zusatzzahl, 4 Richtige und 3 Richtige.
Beim Samstag-Lotto findet nur eine Ziehung statt, der Preis für einen Tipp beträgt 1,25 DM. Bei der Samstagziehung gibt es insgesamt sieben Gewinnklassen: Hier werden auch bei 3 Richtigen die Klassen „3 Richtige mit Zusatzzahl" und „3 Richtige ohne Zusatzzahl" unterschieden. Außerdem wird bei der Samstagrunde zusätzlich zu den sechs Gewinnzahlen und der Zusatzzahl noch eine der Zahlen 0, 1, 2, ...,9 als „Superzahl" ausgelost, und es gibt die Gewinnklassen „6 Richtige mit Superzahl" und „6 Richtige ohne Superzahl". 6 Richtige mit Superzahl hat ein Spieler dann, wenn er alle sechs Gewinnzahlen richtig angekreuzt hat und zusätzlich noch die letzte Ziffer seiner Lottoscheinnummer mit der in dieser Runde gezogenen Superzahl übereinstimmt.
Angenommen, jemand gibt bei einer Samstagrunde des deutschen Lottos einen Tipp ab.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 der sechs gewinnzahlen richtig hat?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
6 Richtige mit Superzahl,
6 Richtige ohne Superzahl,
5 Richtige mit Zusatzzahl,
5 Richtige ohne Zusatzzahl,
3 Richtige mit Zusatzzahl,
3 Richtige ohne Zusatzzahl hat?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann er mit einem Gewinn, dh mit mindestens drei Richtige rechnen?

A34 Angenommen, jemand gibt bei einer Mittwochrunde des deutschen Lottos einen Tipp ab. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann er (in mindestens einer der beiden Ziehungen) mit 6 Richtigen, mit genau 3 Richtigen, mit mindestens 3 Richtigen rechnen?

A35 a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den sechs Gewinnzahlen einer Ziehung des deutschen Lottos 6 aus 49 Mehrlinge (dh. mindestens zwei benachbarte Zahlen) sind?
b) Im Rahmen einer Untersuchung des Spielverhaltens von Lottoteilnehmern wurden alle 6 803 090 Lottotipps ausgewertet, die im Bundesland Baden-Württemberg zu einer bestimmten Lottoziehung abgegeben worden sind. Dabei hat man 2 655 982 Tipps mit Mehrlingen gefunden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine so starke oder noch stärkere Abweichung vom erwarteten Wert?

Literatur:

[1] Athen, H.: Lotto-Probleme im Stochastikunterricht. Praxis der Mathematik 22 (1980), Seite 229-237.
[2] Athen, H.: Weitere Lotto-Probleme für den SII-Kursunterricht. Praxis der Mathematik 24 (1982), Seite 72-83.
[3] Barth/Haller : Stochastk, Leistungskurs. Ehrenwirth Verlag, München (1991).
[4] Bosch, K.: Lotto und andere Zufälle. Vieweg Verlag, Wiesbaden (1994).
[5] Gundel, H.: Das Aufgabenfeld Lotto. Deutsches Institut für Fernstudien, Tübingen (1987).
[6] Rischka, P.: Spielglück beim Glücksspiel. PerlenReihe, Band 670, Wien (1994).
[7] Schreiner, B.: Benachbartes beim Lotto. Praxis der Mathematik 30 (1988), Seite 404-406.
[8] Strick, H.K.: Wartezeit-Verteilungen bei Lotto-Ziehungen. Praxis der Mathematik 23 (1981), Seite 102-105.