Ein intuitiver Zugang zur bedingten Wahrscheinlichkeit

Manfred Borovcnik, Klagenfurt

1. Stochastisches Denken

Unterrichtliche Bestrebungen

Relevante Anwendungen. Im Unterricht und in der Lehrplandiskussion wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung heute wieder zurückgedrängt. Das hat seine Gründe. In der jüngsten Vergangenheit hat man sich intensiv mit der Eigenart der Begriffe, insbesondere des Wahrscheinlichkeitsbegriffs selbst auseinandergesetzt; allerdings mit bescheidenem Erfolg. Nun möchte man nicht mehr so viel Zeit fruchtlos opfern, noch dazu, wo man sich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung lange nur mit Glücksspielen befaßt. 'Würfelbudenmathematik' wird das auch abschätzig genannt. Man möchte vielmehr ganz direkt zu wirklich relevanten Anwendungen vorstoßen, und die gibt es im Zusammenhang mit Beurteilender Statistik in Hülle und Fülle.

Stochastisches Denken. Immer wieder ist dabei von der Eigenheit stochastischen Denkens die Rede und davon, wie schwierig es ist, dieses zu vermitteln. Auch nach einem Unterricht in elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung fallen viele Personen auf die gängigen und vielfältigen Puzzles herein.

Strategien im Unterricht. Eine Vorgangsweise für den Unterricht besteht darin, den Wahrscheinlichkeitsbegriff und damit die Theorie zu vereinfachen. Mit der Gleichwahrscheinlichkeit und der Regel 'günstige durch mögliche' muß man im Anwendungsfall nur mehr richtig abzählen. Eine andere Strategie besteht darin, mathematische Beziehungen in den Vordergrund zu stellen, eine klare Sprache und scharf umrissene Begriffe zu verwenden. Ein weiterer Ansatz stellt die Frage 'Was ist Wahrscheinlichkeit?' stärker in den Vordergrund. Sowohl der mathematisch-kombinatorische als auch der philosophische Ansatz neigen jedoch dazu, sich zu verzetteln.

Arten zu Denken

Die Problematik in den Ansätzen, Stochastisches Denken im Unterricht aufzubauen, liegt m.E. darin, daß man die Mathematik viel zu sehr in den Vordergrund rückt und das Subjekt und seine Art zu denken dadurch vernachlässigt. Ich möchte 'Stochastisches Denken' auf eine Stufe stellen mit anderen Ansätzen, an Probleme heranzugehen. Damit meine ich insbesondere logisches und kausales Denken.

Logisches Denken. Dabei geht es um eine klare, hierarchische Ordnung von Beziehungen zwischen Begriffen. Das macht es möglich, daß man z.B. einen ganzen Apparat von Theorie durch einige wenige, grundlegende Eigenschaften kennzeichnen kann. Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung sind das die Kolmogoroff-Axiome und der Begriff der Unabhängigkeit, der in einer Definition festgehalten wird. Alle anderen Eigenschaften von Wahrscheinlichkeit kann man dann innerhalb der mathematischen Theorie ableiten. Wenn man sich vom logischen Standpunkt über Wahrscheinlichkeit orientieren will, braucht man nur diese Eigenschaften anzuschauen und sieht daran, worin sich die Wahrscheinlichkeit z.B. von einem gewöhnlichen Flächeninhaltsmaß unterscheidet.

Kausales Denken. Es geht hiebei darum, daß man ganz genau auslotet, wie die Versuchsbedingungen beschaffen sein müssen, damit eine ganz genau bestimmte Folgeerscheinung eintritt. Ein Versuchskomplex hat eine wohldefinierte Folge. Wenn man z.B. einen Stein bestimmter Masse aus einer ganz bestimmten Höhe im Schwerefeld der Erde losläßt, so kann man vorhersagen, welche Geschwindigkeit dieser Stein nach einer festgelegten Zeitspanne haben wird. Wenn man dann mit anderen Gegenständen wie z.B. Porozell oder einem Federkleid experimentiert, so kann man sehen, daß man die Versuchsbedingungen noch nicht vollständig kontrolliert; der Luftwiderstand und Luftbewegungen wie Wind spielen dann eine Rolle. So hat man mehr über die relevanten Versuchsbedingungen erfahren; genau darum geht es bei kausalem Denken.

Stochastisches Denken. Diese Art zu Denken geht z.T. an diesen physikalischen Beziehungen vorbei. Ich möchte das am Beispiel des Münzwerfens erläutern. Betrachtet man Münzwerfen als physikalisches Experiment, so hat man zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Münze auf 'Kopf' landet: Neigungswinkel, Anfangsgeschwindigkeit, Spin etc. Stellen wir dann die Versuchsbedingungen wirklich her, so wird die Münze immer auf 'Kopf' landen. Wir können dann das Ergebnis eines Münzwurfes sicher vorhersagen.

Im Gegensatz dazu begnügt man sich in der Stochastik mit einer bloßen Gewichtung der Möglichkeiten Kopf oder Zahl. Man nimmt auf die Physik nur insofern Bezug, als man voraussetzt, daß die Münze physikalisch symmetrisch ist und daß der Werfer nicht versucht, das Ergebnis in irgendeiner Form zu kontrollieren oder gar zu mogeln. Der einzelne Münzwurf ist genauso wie im physikalischen Experiment nur ein Fall für das allgemeine Gesetz. Anders als beim kausalen Denken geht man aber nicht auf die Voraussage des konkreten Ergebnisses los, sondern man begnügt sich damit, Gewichte für die Möglichkeiten anzugeben; aus diesen sogenannten Wahrscheinlichkeiten kann man dann 'irgendwie' eine Orientierung für das Problem erhalten (welchen Einsatz man zahlen soll o.ä.).

Ich meine, daß man im Unterricht trotz Meta-Betrachtungen und wegen der Überbetonung der Mathematik geradezu auf diese Unterschiede und die Herausarbeitung der zugrunde liegenden Denkart 'vergessen' hat. Der Ansatz, mit Wahrscheinlichkeiten ein Problem anzupacken, ist ein ganz anderer als etwa mit logischem Denken oder mit kausalen Betrachtungen. Das heißt aber nicht, daß nicht doch so manches logisch geordnet ist; z.B. ist die Mathematik der Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst logisch geordnet. Auch kausale Betrachtungen spielen bei Wahrscheinlichkeiten eine Rolle, aber eine andere als die übliche. Die vorhandenen Überschneidungen zwischen den Denkansätzen führen zu Mißverständnissen.

Begriffliches Denken und bedingte Wahrscheinlichkeit

In der Folge möchte ich einige Beispiele vorstellen, die zeigen sollen, daß man so ganz direkt nicht zur Beurteilenden Statistik vordringen kann, ohne in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein bestimmtes Maß an begrifflichem Denken aufzubauen, es sei denn, man verzichtet auf ein tiefergreifendes Verständnis. Die Beispiele haben allesamt mit dem Schlüsselbegriff der bedingten Wahrscheinlichkeit zu tun.

Umkehrung der zeitlichen Reihenfolge. Eine Urne hat vier Kugeln, zwei weiße und zwei schwarze. Zieht man zweimal hintereinander, so kann man sich in der 'Vorwärts'-Richtung leicht orientieren. Die erste Kugel ist, angenommen, 'weiß', kurz W_1. Bedingt darauf ist die neue Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel beim zweiten Zug, abgekürzt W_2, anzugeben. Wird die Urne wieder aufgefüllt, so hat man

$$\mathrm{W}(W_2 \mid W_1) = 1/2;$$

wird die gezogene Kugel nicht wieder zurückgelegt, so hat man

$$\mathrm{W}(W_2 \mid W_1) = 1/3.$$

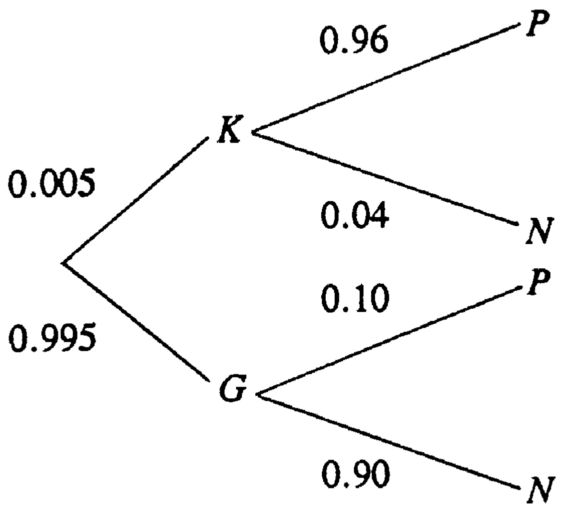
Man kann nun Ereignis und Bedingung von der zeitlichen Reihenfolge loslösen, also z.B. nach der Wahrscheinlichkeit $\mathrm{W}(W_1 \mid W_2)$ fragen; d.h. die Bedingung ist 'weiß beim zweiten Zug', das zu beurteilende Ereignis ist 'weiß beim ersten Zug'. Allein die Umkehrung der zeitlichen Reihenfolge verwirrt viele; wieso sollte man die erste Kugel verstecken, dann die zweite anschauen und dann eine Wahrscheinlichkeitsaussage über etwas machen, was sich schon längst ereignet hat. Die Problematik liegt jedoch tiefer, denn es kommt zu einer Überschneidung mit kausalen Denkweisen. Dies wird auch in der einschlägigen empirischen Forschung berichtet; ich habe ähnliche Erfahrungen aus Interviews mit Studenten.

Im kausalen Sinn ist der erste Zug vom zweiten Zug unabhängig. Wie soll denn die Farbe der später gezogenen Kugel die Farbe der früher gezogenen beeinflussen? Wegen der kausalen Unabhängigkeit nehmen viele Personen an, daß die gefragte Wahrscheinlichkeit wohl nur dadurch beeinflußt werden kann, wie die Urne anfangs belegt war; da waren vier Kugeln, zwei davon weiß, also muß gelten $W(W_1 | W_2)=2/4$. Es ist intuitiv schwer zu akzeptieren, daß bedingte Wahrscheinlichkeiten nichts mit der zeitlichen Reihenfolge zu tun haben. Das Ereignis, das als Bedingung steht, muß nicht zeitlich früher sein als das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit bewertet werden soll.

Mit diesem Beispiel kann man weiters sehr gut zeigen, daß die Heuristik, Wahrscheinlichkeiten durch eine geeignete Urne darzustellen, ihre Grenzen hat. Wenn man über Wahrscheinlichkeiten spricht, so sind Urnen zunächst ein gutes Medium, um überhaupt die Situation zu beschreiben und um den zahlenmäßigen Wert der Wahrscheinlichkeit mitzuteilen. Eine Münze ist etwa ein Mittel um auszudrücken, daß zwischen zwei 'Gegnern' eine faire Entscheidung herbeigeführt werden soll, die keinen benachteiligt. Man muß aber darauf achten, daß Wahrscheinlichkeiten unabhängig von solchen 'Medien', über die man sie darstellen kann, einen Sinn machen. Wenn man in der Vorwärtsrichtung des Beispiels denkt, so hat man bei jedem Zug eine neue Urnenbelegung und damit problemlos die gesuchte Wahrscheinlichkeit; in der Rückwärtsrichtung versagt diese Heuristik, man hat keine Urne für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

Ursachen und Indizien. In diesem Beispiel geht es um die Bewertung von Indizien oder indikativer Information. Das kann vor Gericht sein, wo Indizien klären sollen, ob ein Angeklagter schuldig ist oder nicht, oder bei der Diagnose von Krankheiten, wo der Arzt sich aufgrund von Bluttests oder Röntgenbefunden ein Bild machen muß, ob der Patient eine bestimmte Krankheit hat oder nicht. Ich möchte den Sachverhalt der Diagnose von Krankheiten näher erläutern.

Eine Person kann, im vereinfachten Fall, eine bestimmte Krankheit K haben oder gesund sein, was mit G abgekürzt wird. Es wird ein ganz bestimmter Bluttest durchgeführt, der zu einem positiven (P) oder negativen (N) Resultat führen kann. Das folgende Baumdiagramm gibt einen Überblick über die Situation.



Dieser Bluttest sei unter Kranken stark gehäuft positiv, 0.96 sei die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür; unter Gesunden sei er entsprechend häufig negativ, 0.90 sei die entsprechende bedingte Wahrscheinlichkeit. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten, ausgehend von einem Zustand Z zum Beobachtungsbefund B,

$$\mathrm{W}(B|Z),$$

können kausal gedacht werden, auch wenn die Folge, das ist der Beobachtungsbefund, durch den Zustand nicht eindeutig festgelegt wird; Meßungenauigkeiten, Beobachtungsfehler etc. könnten dafür verantwortlich sein.

Verwendet man den Beobachtungsbefund B zu einer neuen Bewertung, ob die Person krank oder gesund ist, so braucht man dazu die umgekehrte Wahrscheinlichkeit. Aus der Bayes-Formel erhält man:

$$\mathrm{W}(K|P)=0.046, \ \mathrm{W}(G|N)=0.9998.$$

Diese umgekehrten bedingten Wahrscheinlichkeiten kann man nicht kausal sondern nur indikativ auffassen; ein bestimmter Blutbefund hat nicht ursächlich zur Folge, daß die betreffende Person krank oder gesund ist. Man kann diese umgekehrten bedingten Wahrscheinlichkeiten nicht umgehen: Ist diese Wahrscheinlichkeit für K nicht schon sehr groß, so muß der Arzt doch weitere Untersuchungen vornehmen, bevor er eine komplizierte Operation bzw. eine Behandlung mit der Gefahr von Nebenwirkungen vornimmt; umgekehrt, wenn diese Wahrscheinlichkeit für K klein genug wird, so muß er einmal die Untersuchungen abbrechen.

In der Vorwärtsrichtung können die bedingten Wahrscheinlichkeiten kausal interpretiert werden, in der Richtung von Befunden zu Zuständen nur als Hinweis. In empirischen Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsverständnis hat sich gezeigt, daß viele Personen kausal interpretierbare Wahrscheinlichkeiten viel eher akzeptieren und in ihre Überlegungen einbeziehen als indikative, die oft überhaupt nicht beachtet werden. 'Kausale' Wahrscheinlichkeiten werden häufig auch zahlenmäßig überschätzt.

Verschiedene Fehlerarten beim statistischen Testen. Ich möchte das Diagnosebeispiel von vorhin benützen, um die Grundproblematik beim statistischen Testen in vereinfachter Form darzustellen. Als ein statistischer Test aufgefaßt, hat die beschriebene Situation folgende Deutung: Zu Testen ist die Nullhyphothese H_0: 'Person ist gesund' gegen die Alternative H_1: 'Person hat Krankheit K'. Aufgrund von Daten in Form des Blutbefundes hat man zu entscheiden, ob die untersuchte Person als krank oder als gesund anzusehen ist; d.h., ob H_0 abgelehnt oder nicht abgelehnt werden soll. Der Einfachheit halber soll der vorliegende Blutbefund die alleinige Basis dieser Entscheidung sein.

Ist die Person gesund und erhalten wir einen positiven Befund, so lehnen wir die richtige H_0 zu Unrecht ab; das ist ein Fehler 1. Art, die Wahrscheinlichkeit für diesen sogenannten α-Fehler beträgt mit den Daten von oben $\alpha=0.10$. Ist die Person krank und erhalten wir dennoch einen negativen Befund, so wird die falsche H_0 zu Unrecht nicht abgelehnt, das ist ein Fehler 2. Art, die Wahrscheinlichkeit für diesen β-Fehler beträgt $\beta=0.04$. Fehler 1. und 2. Art sind demnach bedingte Wahrscheinlichkeiten. Noch mehr: Die wirklich wichtigen Fragen kann man damit nicht beantworten. Wie wahrscheinlich ist eine falsche Zuordnung? Damit ist gemeint, daß bei Vorliegen eines positiven Befundes die Person dennoch gesund ist, sie also fälschlich als krank eingestuft wird,

$$\mathrm{W}(G|P)=\alpha';$$

fällt der Befund negativ aus und die Person hat dennoch K, was bedeutet, daß die Person trotz Untersuchung als K unerkannt bleibt; die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$\mathrm{W}\ (K|N) = \beta'.$$

Mit den Daten des Beispiels ergibt sich $\alpha' = 0.954$ bzw. $\beta' = 0.0002$. Diese bedingten Wahrscheinlichkeiten einer falschen Zuordnung sind nicht mit dem α- und β-Fehler identisch, wie häufig angenommen wird, weil unzulässig

$$\mathrm{W}\ (A|B) \quad \text{mit} \quad \mathrm{W}\ (B|A)$$

gleichgesetzt wird.

Das Beispiel lehrt: i) Die Fehlerwahrscheinlichkeiten α und β sind bedingte Wahrscheinlichkeiten. ii) Die Wahrscheinlichkeiten für eine falsche Zuordnung α' und β' sind ebenfalls bedingte Wahrscheinlichkeiten, es gilt $\alpha' \neq \alpha$ und $\beta' \neq \beta$. iii) Die mittlere Fehlerrate ϕ des Diagnoseverfahrens ist ein gewichteter Mittelwert aus α und β:

$$\phi = \alpha.\mathrm{W}(G) + \beta.\mathrm{W}(K) = 0.0997.$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten α', β' und die Wahrscheinlichkeit ϕ kann man nur berechnen, wenn man vorweg eine Wahrscheinlichkeit für die Zustände K und G, das sind die Hypothesen in dieser Einkleidung, vernünftigerweise festlegen kann. Dies führt zu einer veränderten Herangehensweise, die derzeit in den Anwendungen stärkere Beachtung findet, die aber viele Probleme aufwirft, weil man nicht immer zuverlässige Information für die Wahrscheinlichkeiten für die Hypothesen auftreiben kann. Ohne bedingte Wahrscheinlichkeiten kann man die geschilderten Probleme gar nicht ansprechen.

2. Chancenverhältnisse

Chancenverhältnis und Wahrscheinlichkeit

Grad des Vertrauens und Wetten. Es gibt verschiedene Deutungen des Wahrscheinlichkeitbegriffs, nämlich als relative Häufigkeit, als Anteil in symmetrischen Situationen oder als Grad des Vertrauens. Je mehr Vertrauen man in eine unsichere Sache E hat, desto eher erwartet man, daß sie zutrifft, daß E wahr ist; desto mehr kann man bei einer Wette darauf riskieren. Das Vertrauen kann auch auf der Erfahrung von relativen Häufigkeiten beruhen, oder auf der Information über Anteile und den Umstand, daß zufällig ausgewählt wird; insofern schließen die verschiedenen Deutungen einander nicht aus. Allerdings soll diese Deutung gerade für jene Fälle dienen, in denen man über keine direkt 'objektivierbare' Information verfügt. Gemessen werden solche Wahrscheinlichkeiten über die Bereitschaft des Individuums, Wetteinsätze zu akzeptieren.

Gewinnquoten. Ist E ein Ereignis in einer ungewissen Situation. Ein Spieler wettet gegen die Bank; er gewinnt, falls E zutrifft, er verliert, falls E nicht zutrifft. Für $W(E)$ nennt man den Quotienten

$$W(E) : W(\bar{E})$$

das Chancenverhältnis (man spricht auch von Chancen oder Odds) von E gegen $\bar{E}$. Für $W(E)=1/6$ hat man ein Chancenverhältnis von $1/6 : 5/6 = 1{:}5$; die Chancen stehen für die Bank fünfmal so gut wie für den Spieler. Chancenverhältnisse werden dazu verwendet, die Gewinnquoten auszuhandeln. Der Spieler sollte in diesem Fall für sein höheres Risiko im selben Verhältnis in Geld entschädigt werden; sein Nettogewinn sollte also fünfmal so hoch sein wie sein Einsatz.

Chancenverhältnis	$1 : 5$
Gewinnquoten	$5 : 1 \mathrel{\hat{=}}$ Kehrwert der Chancen

Messung der Wahrscheinlichkeit. Zwischen Chancenverhältnis und Wahrscheinlichkeit besteht formal ein eindeutig umkehrbarer Zusammenhang, aus den Chancen kann man leicht auch auf die damit verbundene Wahrscheinlichkeit zurückrechnen. Stehen die Chancen für E auf $a{:}b$, so gilt

$$W(E) = \frac{a}{a+b}$$

Dieser Zusammenhang wird auch zur Messung der subjektiven Wahrscheinlichkeit benützt. Akzeptiert eine Person z.B. gerade noch die Gewinnquoten von 5:1, so stehen die Chancen 1:5 und damit beträgt die Wahrscheinlichkeit $1/(1+5) = 1/6$ für das Ereignis E, auf das gewettet wird.

Chancenverhältnis und Wert einer Wette

Preis x Menge. Je mehr man kauft, umso mehr hat man proportional zu zahlen, sieht man von Preisnachlässen ab. Im Wirtschaftsleben gilt vereinfacht

Endpreis = Preis/Einheit x Einheiten

Durch Analogie zum Preis wirtschaftlicher Güter soll der Begriff 'Wert einer Wette' aufgebaut werden. Im wesentlichen soll dadurch der Zusammenhang zwischen Gewinnquoten und dem Chancenverhältnis intuitiv belegt werden.

Gewinn x Einheiten an Sicherheit. Der Wert einer Wette soll wie der Preis einer Ware behandelt werden. In dieser Analogie übernimmt der (Netto)Gewinn des Spielers bzw. der Bank die Rolle des Preises pro Einheit. Eine Einheit bedeutet absolute Sicherheit; dann bekäme man den gesamten Preis und bräuchte das Ergebnis gar nicht abzuwarten. Von dieser Ware Sicherheit hat man jedoch nur einen Bruchteil (vor der Wette). Bei der obigen Wette auf E seien nun Quoten, das sind Preise/Einheit von z.B. 2:1 vereinbart. Da die Chancen für den Spieler auf 1:5 stehen, hat der Spieler an der Ware nur einen Teil, die Bank hingegen 5. Geht er die Wette ein, so beträgt der Wert der Wette für ihn 2 x 1 = 1, für die Bank jedoch 1 x 5 = 5.

Der Wert der Wette ist gleichzeitig das Angebot der Bank, ihn zur Wette zu verlocken; der Wert der Wette für die Bank ist gleichzeitig das Angebot des Spielers an die Bank. In diesem Fall bietet der Spieler 5S gegen 1S der Bank, er sollte die Wette nicht akzeptieren. Der Spieler sollte vielmehr bessere Quoten verlangen, damit das Angebot der Bank seinem Angebot gleicht, damit der Wert der Wette für beide Partner gleich ist. Das geht nur, wenn die Quoten der Kehrwert des Chancenverhältnisses sind.

Versicherungsprämien. Der Abschluß einer Versicherung kann auch als Wette auf ein Schadensereignis gedeutet werden, der Versicherungsnehmer wettet darauf, daß der Schadensfall eintritt. Stehen die Chancen für dieses Ereignis gegen das sich der Versicherungsnehmer schützen will, auf 1:1000, so sollten die Quoten mit 1000:1 festgesetzt werden. Ist die Zahlung im Versicherungsfall der Einfachheit halber mit 100.000 festgelegt, so ist die Prämie, ohne Berücksichtigung von Spesen und Gewinn der Gesellschaft, mit 100S zu bemessen.

Chancenverhältnis und Erwartungswert

Faires Spiel. Bietet ein Glücksspiel keinem der Spielpartner einen Vorteil, so wird es *fair* genannt. Üblicherweise legt man 'keinen Vorteil' durch den Erwartungswert fest. Beschreibt die Zufallsvariable G den Gewinn (netto), so ist das Spiel fair, wenn $E(G)=0$. Ein Chancenverhältnis von 1:5 und Gewinnquoten von 5:1 bedeuten aus der Sicht des Spielers

	E	$\bar{E}$
Nettogewinn G	5	-1
Wahrscheinlichkeit	1/6	5/6

Also ist $E(G) = 5\cdot 1/6+(-1)\cdot 5/6 = 0$. Das zeigt, daß die Berechnung der Einsätze (Quoten) nach dem Kehrwert der Chancen zum selben Resultat führt, wie die Bedingung des fairen Spiels nach dem Erwartungswert.

Chancenverhältnis gibt dem Erwartungswert Sinn. Der Erwartungswert ist ein Richtwert für das, was in einer längeren Spielserie durchschnittlich zu erwarten ist, für ein einzelnes Spiel bleibt seine Deutung obskur. Die Berechnung der Gewinnquoten hingegen ist durch die Analogie zum Wert einer Wette auch für ein einzelnes Spiel sinnvoll. Durch die angesprochene Beziehung zwischen Erwartungswert und Gewinnquoten hat man gleichzeitig eine inhaltliche Begründung und Deutung für den Erwartungswert.

Erwartungswert gibt Chancenverhältnissen Sinn. Es soll nicht argumentiert werden, daß die eine oder die andere Deutung von Wahrscheinlichkeit grundlegender in dem Sinn wäre, daß man auf ihr alle anderen Deutungen aufbauen kann. Diese verkürzende Sichtweise ist bei der Vielschichtigkeit der Begriffe nicht zielführend. Vielmehr sollen die Beziehungen zwischen verschiedenen Deutungen insgesamt ein Geflecht ergeben, auf dem man den damit verbundenen Wahrscheinlichkeitsbegriff besser verstehen kann. Wenn die Analogie mit dem Wert einer Wette nicht überzeugt, kann man sie durch die Beziehung von Chancenverhältnissen zum Erwartungswert abstützen. Damit kommt man vom Erwartungswert, der zunächst nur für Spielserien einen Sinn macht, auf eine Größe, die auch für ein einzelnes Spiel anwendbar ist; man kann also den Erwartungswert auch für die Bestimmung der Einsätze aus einem Spiel heranziehen. Sind mehrere Spielausgänge möglich, wird die Analogie zur Wette sehr umständlich, der Erwartungswert läßt sich sehr einfach anpassen und erscheint als Rechenvereinfachung unumgänglich.

3. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Einführung der bedingten Wahrscheinlichkeit mit Chancenverhältnissen

'Herleitung'. Für $W(I) \neq 0$ definiert man die bedingte Wahrscheinlichkeit von E durch

$$W(E|I) = \frac{W(E \wedge I)}{W(I)}$$

Eine einschränkende Information I macht eventuell eine Neubewertung der Wahrscheinlichkeit von E erforderlich. Es gibt verschiedene Wege, die bedingte Wahrscheinlichkeit im Unterricht einzuführen, abgestimmt auf die jeweilige Deutung von Wahrscheinlichkeit, die man vorzieht. Mit 'Wahrscheinlichkeit als Anteil' spricht man von anteiliger Chance von E in I. Hier sollen bedingte Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Chancenverhältnissen 'hergeleitet' werden. Wettet man auf E, so bestimmt das Chancenverhältnis

$$W(E) : W(\bar{E})$$

die Quoten. Tritt eine neue Information I als sichere Basis zum Kenntnisstand hinzu, so ist es zwar noch immer eine Wette auf E, jedoch ist es sinnvoll die Quoten aus dem *neuen* Chancenverhältnis

$$W(E \wedge I) : W(\bar{E} \wedge I)$$

zu berechnen, I ist ja außer Streit gestellt. Vom Chancenverhältnis erhält man nun die neue Wahrscheinlichkeit von E:

$$W(E|I) = \frac{W(E \wedge I)}{W(E \wedge I) + W(\bar{E} \wedge I)} = \frac{W(E \wedge I)}{W(I)}$$

Die Multiplikationsregel ist lediglich eine Umschreibung der letzten Formel. In diesem Zusammenhang ist bedingte Wahrscheinlichkeit ein Satz, nicht eine Definition. Das hängt damit zusammen, daß man in der übergeordneten Theorie von Wahrscheinlichkeit andere Axiome über rationales Verhalten festsetzt und daher alle Kolmogoroff-Axiome beweisbare Sätze werden. Die Theorie ist jedoch im wesentlichen mit der üblichen Theorie identisch; nur die Beurteilende Statistik ist verschieden.

Unabhängigkeit. Sind neue und alte Chancen gleich, so ist die Information I für die Bewertung von E irrelevant; die Gewinnquoten ändern sich daher auch nicht. Unabhängigkeit ist ein schwieriger Begriff; die üblichen Motivationen gleiten oft ins Mystische ab: Fehlende kausale Zusammenhänge sind ein Argument für das Anwenden der stochastischen Unabhängigkeit. Wenngleich das manchmal gut paßt, die Begriffe sind gar nicht deckungsgleich.

Gesetz der Serie. Nach einer längeren Serie von z.B. 12-mal 'rot' am Roulette-Tisch diskutieren Spieler leidenschaftlich, ob nun die Wahrscheinlichkeit von 'schwarz' in der nächsten Runde größer oder kleiner geworden ist. Falls es eine Änderung der Wahrscheinlichkeit gäbe, hätte das Casino es bemerkt; es hätte weniger Gewinne gemacht. Dann hätte es aber die Gewinnquoten zufolge der neuen Chancen geändert. Das Casino hatte aber keinen Anlaß dazu. Eine Serie von 12-mal 'rot' verändert die vereinbarten Gewinnquoten (Verhältnis von Gewinn zu Einsatz) nicht; Spieler täten gut daran, sich keine Verbesserung ihres Wertes der Wette einzubilden.

Chancenverhältnisse erleichtern Umgang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Umkehrung der zeitlichen Reihenfolge. Es geht wieder um die Urne mit zwei weißen und zwei schwarzen Kugeln; aus dieser wird zweimal ohne Zurücklegen gezogen. Bei der Wette auf W_2 auf der Basis W_1 ('vorwärts') hat man das Chancenverhältnis

$$\mathrm{W}(W_1 \wedge W_2) : \mathrm{W}(W_1 \wedge S_2),$$

bei der Wette auf W_1 auf der Basis W_2 ('rückwärts') hat man das Chancenverhältnis

$$\mathrm{W}(W_1 \wedge W_2) : \mathrm{W}(S_1 \wedge W_2).$$

Die Wahrscheinlichkeit der gemischten Serie, das sind die rechten Seiten in den jeweiligen Verhältnissen, sind gleich; es kommt nicht darauf an, ob man die weiße zuerst und dann die schwarze Kugel zieht oder ob dies umgekehrt ist. Daher sind die Chancenverhältnisse in der Rückwärts- und in der Vorwärtsrichtung genau gleich. Man erhält rückblickend genau dieselbe Information aus der Farbe der gezogenen Kugel wie vorausblickend, wo man kausale Bezüge durch die neue Belegung der Urne hat.

Ursachen und Indizien. Die folgenden Überlegungen schließen an das Diagnose-Beispiel an. Die alten Chancen, vor dem Befund, sind:

$$\mathrm{W}(K) : \mathrm{W}(G) = 1:199 \approx 1:200$$

Die neuen Chancen beziehen sich auf den Befund P:

$$W(K \wedge P) : W(G \wedge P) = 0.005 \cdot 0.96 : 0.995 \cdot 0.10 \approx \frac{1}{200} \cdot \frac{96}{10} \approx \frac{1}{20}$$

Das entspricht einer Wahrscheinlichkeit von (exakt) 0.046. Die Pfade im dazugehörigen Baumdiagramm, die zu Befund P führen, sind also im Gewicht zueinander abzuwägen, damit man das neue Chancenverhältnis erhält:

Verhältnis der 1. Kanten x Verhältnis der 2. Kanten

oder

alte Chancen x Trennkraft

Im Beispiel hat man

$$\frac{1}{200} \times \frac{96}{10}$$

Die alten Chancen geben die Einschätzung, wie sehr man in Erwägung zieht, daß die Person krank ist, ohne daß man den Befund berücksichtigt. Die Trennkraft ist eine wichtige Kenngröße der Untersuchungsmethode; sie gibt an, wieviel häufiger der Befund P bei Kranken als bei Gesunden auftritt; im Beispiel ist die Trennkraft rund 10:1. Erst die Kombination von alten Chancen und Trennkraft ergibt eine Neubewertung der Chancen für die Zustände K und G. Fragen, die dabei auftauchen, sind etwa: Warum sind die alten Chancen für K so niedrig bemessen? Kann man ein Verfahren verwenden, das eine bessere Trennkraft hat? Wie ist die Trennkraft bei negativem Befund?

Diese Fragen im Zusammenhang mit Chancencenverhältnissen bestimmen eine Strukturierung des Problems hin zu einer Art Denken in Informationen. Es ist nicht mehr wichtig zu unterscheiden, ob man von Zuständen zu möglichen Befunden oder umgekehrt schließt. Daher löst sich das Problem mit der kausalen Deutung der bedingten Wahrscheinlichkeiten auf. Es geht nur mehr darum, ob man eine gegebene Information als Indiz verwenden kann, ob sie also die bedingte Wahrscheinlichkeit verändert oder nicht: Ist ein positiver Befund z.B. eine geeignete Information, um die Wahrscheinlichkeit für 'krank' nach oben zu verändern und wie gut ist diese Information? Da nun auch die Ausgangswahrscheinlichkeit für K und G offen einer Bewertung unterliegt, verliert die neue Wahrscheinlichkeit für 'krank' auch einen weiteren 'deterministischen' Aspekt: $W(K)$ ist nicht eindeutig, nicht unveränderbare Eigenschaft des Patienten, sondern lediglich das Ergebnis einer wohlüberlegten Bewertung aller Vorweg-Information über diese Person. Das gleiche gilt auch für die bedingte Wahrscheinlichkeit $W(K|P)$.

Fehler beim Testen. Über die verschiedenen Fehler, die weit über den α- und β-Fehler hinausgehen, wurde schon berichtet. Die Einkleidung im Diagnosebeispiel sowie die Verwendung von Chancenverhältnissen und dem Begriff Trennkraft macht deutlich, daß bei einem Testproblem verschiedene Qualitäten von Information vorliegen. Der Kenntnisstand über Zustände (Hypothesen) vorweg führt zu Ausgangschancen; dieser Kenntnisstand wird im gewöhnlichen Testverfahren nicht einbezogen. Nur indirekt einbezogen wird die Trennkraft des Befundes. Indirekt deswegen, weil bei Einhaltung eines bestimmten α-Fehlers und Optimierung des β-Fehlers der übliche Test die Trennkraft von Befunden bestmöglich ausnutzt. Die tatsächliche Trennkraft wird allerdings nicht interpretiert. Man beschränkt sich auf α- und β-Fehler. Wichtige Eigenschaften von Testverfahren sind nur mit bedingten Wahrscheinlichkeiten zu erfassen. Chancenverhältnisse und der Diagnose-Kontext können helfen, elementare Mißverständnisse zu vermeiden.

Chancenverhältnis und Bayes-Formel

Die Formel. Die Herleitung der bedingten Wahrscheinlichkeit führt auch schon zur Bayes-Formel, wenn man im neuen Chancenverhältnis die Wahrscheinlichkeit für die Und-Aussagen nach der Multiplikationsformel auflöst. Eine neue Information I verändert die Chancen zu

$$W(E \wedge I) : W(\overline{E} \wedge I) \;\equiv\; W(E) \cdot W(I|E) : W(\overline{E}) \cdot W(I|\overline{E})$$

Das wiederum ist gleichwertig zu

Das ist lediglich eine Umskalierung des Chancenverhältnisses. Man kann die Beziehung wie folgt lesen:

$$\frac{W(E)}{W(\bar{E})} \cdot \frac{W(I|E)}{W(I|\bar{E})} \quad : \quad 1$$

neues Chancenverhältnis = altes Chancenverhältnis x Trennkraft

Je größer das alte Chancenverhältnis, je größer die Trennkraft, desto größer das neue Chancenverhältnis. Die Bayes-Formel mit Wahrscheinlichkeiten anstelle von Chancen ist kompliziert in Gestalt, sie ist schwerer herzuleiten und sie stellt eine komplizierte Beziehung zwischen alter Wahrscheinlichkeit $W(E)$ und neuer, bedingter Wahrscheinlichkeit $W(E|I)$ dar. Die Trennkraft selbst, eine wichtige Größe zur Beurteilung, taucht nicht explizit auf. Das macht die Bayes-Formel und Probleme, die damit bearbeitet werden, so schwierig. Die Darstellung mit Chancenverhältnissen fördert auch die angesprochene Art des Denkens in Informationen.

Diagnosebeispiel. Die Eingangsdaten seien wie folgt abgeändert. Alte Wahrscheinlichkeit, krank zu sein, sei gleich 0.1%; ein Bluttest erkennt Kranke mit Sicherheit 0.99, er stuft durchschnittlich 5% der Gesunden fälschlich als positiv ein. Das neue Chancenverhältnis bei positivem Befund ist daher

$$\frac{1}{999} \cdot \frac{0.99}{0.05} \approx \frac{1}{1000} \cdot \frac{20}{1} = \frac{1}{50}$$

Das Chancenverhältnis ergibt eine Wahrscheinlichkeit von lediglich 2%. Das ist nicht Ergebnis einer schlecht angelegten Diagnoseprozedur. Das positive Resultat erhöht die Chancen für K immerhin um den Faktor 20. Die kleine neue Wahrscheinlichkeit für K wird hauptsächlich durch die kleine alte Wahrscheinlichkeit von K mit $W(K) = 0.001$ verursacht. Es ist zu überlegen, ob dieser Wert überhaupt dem Problem angepaßt ist. Wären die alten Chancen um den Faktor 20 höher, so wären es auch die neuen Chancen, die resultierenden 2:5 würden dann eine Wahrscheinlichkeit für K von ca. 30% ergeben. Man beachte, daß die Trennkraft des Diagnoseverfahrens hierbei nicht geändert wurde. Ein inverses Baumdiagramm (Borovcnik, 1986) ist sehr hilfreich; die Bayes-Formel mit Chancen ist daraus leicht abzulesen. Die Pfade von den verschiedenen Zuständen zum Befund werden mit den entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten beschriftet. Für das Beispiel hat man:

alte Chancen	Zustände	Trennkraft bei P		neue Chancen
1	K	0.99		
			P	$\frac{1}{999} \cdot \frac{99}{5} \approx \frac{1}{50}$
999	G	0.05		

Bertrands Schubladen-Paradoxon. Ein abschließendes Beispiel soll zeigen, wie schnell man mit Chancenverhältnissen zur Lösung kommt, und, worin bei Bayes-Problemen der Witz liegt. Es gibt drei Kästchen mit je zwei Laden; in einem Kästchen befindet sich in den Laden je eine Goldmünze, in einem befindet sich je eine Silbermünze, im dritten ist je eine Gold- bzw. eine Silbermünze in den Laden. Zuerst wird ein Kästchen, dann eine Lade zufällig ausgewählt. Die Lade wird geöffnet, es befindet sich eine Goldmünze darin. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich in der anderen Lade auch eine Goldmünze befindet? Die Antwort findet man leicht aus dem üblichen Baumdiagramm, das jedoch nicht hilft einzusehen, warum die Lösung von der intuitiv erwarteten abweicht; viele Menschen geben die Antwort 1/2, da alle gleich wahrscheinlich sind und nun nur mehr zwei der drei Kästchen in Frage kommen, weil das Kästchen mit den zwei Silbermünzen ausgeschieden ist.

1	G/G	1	
1	G/S	1/2	'G'
1	S/S	0	

Aus dem inversen Baum sieht man, daß sich die neuen Wahrscheinlichkeiten wie 1 : (1/2) : 0 verhalten, das ergibt eine neue Wahrscheinlichkeit für das Kästchen mit den zwei Goldmünzen von 2/3. Das Diagramm macht deutlich, daß der Befund '*G*' unter dem *G/G*-Kästchen zweimal so wahrscheinlich ist wie das 'gemischte' Kästchen, '*G*' ist folgerichtig ein deutliches Indiz für das *G/G*-Kästchen.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten sind mit Fehlvorstellungen verbunden, die aus der Überlagerung von stochastischem Denken mit logischem und kausalen Denken stammen. Die übliche Formalisierung und der Kalkül erschweren das Verständnis unnötig. Durch die Darstellung mit Chancenverhältnissen kann man Abhilfe schaffen. Die mathematischen Zusammenhänge werden einfacher und erlauben auch eine Strukturierung der Probleme und das Denken darüber. Ein tieferes Verständnis für bedingte Wahrscheinlichkeiten ist für die Beurteilende Statistik unerläßlich, soll sie nicht rein schematisch erlernt werden.

Literatur

Borovcnik, M.: Anwendungen der Bayesschen Formel. In: *Didaktik der Mathematik* **14** (1986), 183-203.

Borovcnik, M.: Revising probabilities according to new information: A fundamental stochastic intuition. In: Davidson, R. und J. Swift: *Proc. Sec. Intern. Conf. on Teaching Statistics*, The University of Victoria, Canada, 1987, 298-302.

Buth, M.: Die Behinderung des gesunden Menschenverstandes durch Stochastik, dargestellt am Beispiel des Testens von Hypothesen. In: *Stochastik in der Schule* **11** (1991), Heft 3.

Riemer, W.: *Neue Ideen zur Stochastik.* Bibliographisches Institut, Mannheim 1985.