

Fraktale Dimensionen — über das Titelbild des Oberstufenlehrbuches Reichel-Müller-Laub

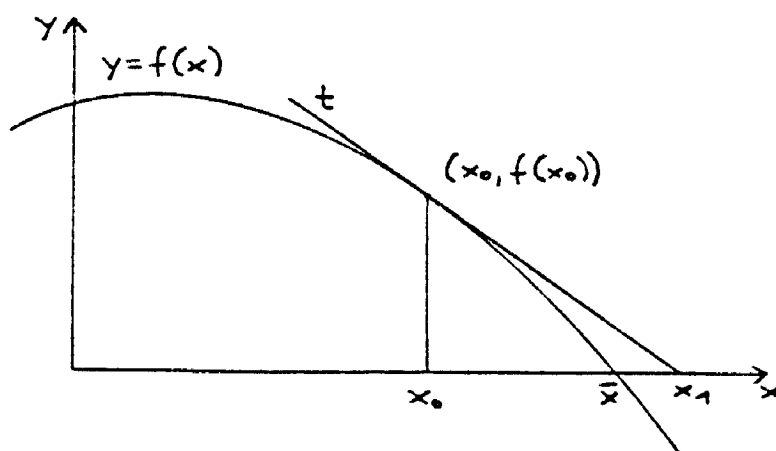
STEFAN GÖTZ UND HANS-CHRISTIAN REICHEL (UNIV. WIEN)

Das Titelbild des Lehrbuchs [RML] zeigt den sog. Menger-Schwamm (bzw. dessen Konstruktionsprozeß): ein Paradebeispiel eines *Fraktales*. Im folgenden wollen wir uns dem damit zusammenhängenden und sehr modernen Gebiet der Mathematik widmen, das neuerdings auch in zahlreichen populär-wissenschaftlichen Publikationen behandelt wird und Anwendungen in mannigfachen Gebieten besitzt (sh. z.B. [CF] u.v.a.). Die Grundideen haben Relevanz für den Unterricht und in diesem Sinne wollen wir auch im folgenden referieren:

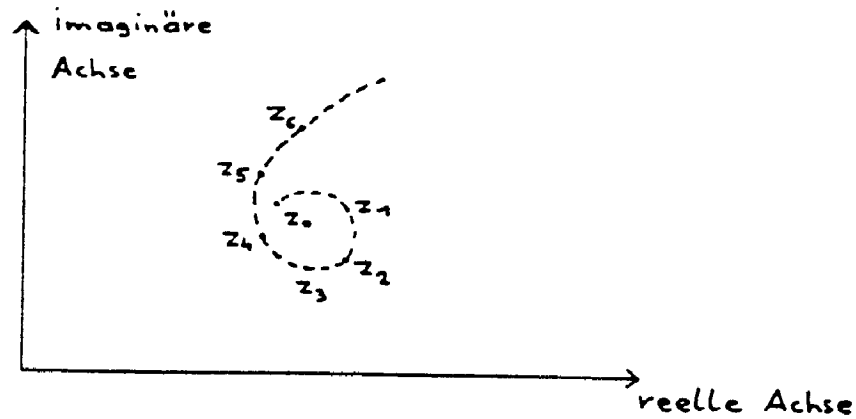
§1 Das Newton'sche Näherungsverfahren

Eine der Grundaufgaben der Mathematik ist die Lösung von Gleichungen $f(x) = 0$, wobei f eine reelle Funktion ist. Da in den seltensten Fällen Lösungsformeln für die exakte Berechnung der Nullstellen von f zur Verfügung stehen, wurden sog. *Näherungsverfahren* entwickelt. Das bekannteste von diesen ist das *Newton'sche*. Sein Prinzip ist die Berechnung einer Nullstelle \bar{x} von f als Grenzwert einer rekursiv gebildeten Folge $\{x_n\}$. Vorausgesetzt wird — grob gesagt — die Differenzierbarkeit von f .

Man beginnt nun mit einem *Startwert* x_0 „in der Nähe“ einer Nullstelle \bar{x} . Nun berechnet man $f(x_0)$ und zieht im Punkt $(x_0, f(x_0))$ die Tangente t an den Graphen der Funktion. Der Schnittpunkt von t mit der x -Achse wird mit x_1 bezeichnet. Er ist der erste Näherungswert für die Nullstelle \bar{x} . Unter günstigen Voraussetzungen — und solche wollen wir nun annehmen — ist x_1 ein besserer Näherungswert für \bar{x} als x_0 es war.



Figur 1



Figur 2

Das Verfahren wird für x_1 genauso wie für x_0 fortgesetzt. Man erhält eine Folge $\langle x_n \rangle$, die — unter gewissen Bedingungen, die wir im Augenblick nicht präzisieren wollen — gegen \bar{x} konvergiert (sh. z.B. [HE], [RE]). Wir sehen:

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \implies x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (\text{wenn } f'(x_0) \neq 0).$$

Allgemein gilt bekanntlich:

$$x_0 ; \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (*).$$

Lassen wir den ursprünglichen Gedanken der Nullstellenbestimmung für einen Augenblick zugunsten einer anderen Sichtweise fallen, und betrachten wir (*) einfach als rekursive Definition einer Folge $\langle x_n \rangle$. „Modern“ gesprochen liegt ein sog. *dynamisches System* vor, welches in \mathbb{R} abläuft:

$$x_0 ; \quad x_{n+1} = N(x_n) \quad (**).$$

Nun hatte bereits 1879 A. Cayley¹ die Idee, dieses Verfahren in der *Gauß'schen Zahlenebene* \mathbb{C} zu studieren und speziell für komplexe Polynome

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \quad (a_i, z \in \mathbb{C})$$

anzuwenden. Ein solches hat in \mathbb{C} — wie wir wissen — mindestens eine Nullstelle $\bar{x} \in \mathbb{C}$ (Fundamentalsatz der Algebra) und als einfache Folgerung daraus sogar n ($a_n \neq 0!$) derartige Nullstellen, wenn man jede mit ihrer Vielfachheit zählt.

Bilde also rein formal²

$$z_0 ; \quad z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)}$$

und erhalte eine Folge

$$\langle z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \rangle$$

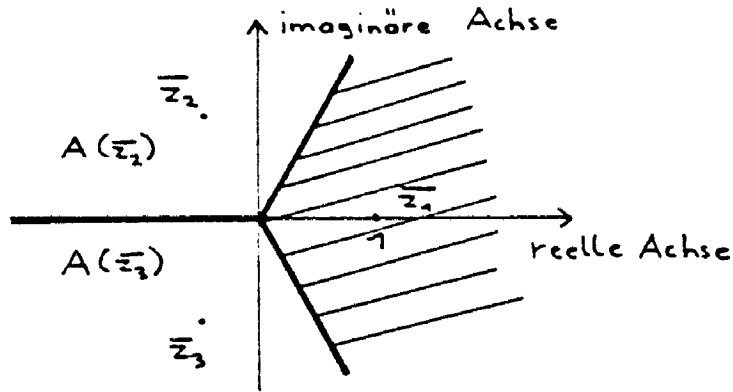
in \mathbb{C} , ein „dynamisches System“:

$$z_0 ; \quad z_{n+1} = N(z_n).$$

Fig. 2 zeigt einen möglichen Verlauf der Folge $\langle z_n \rangle$.

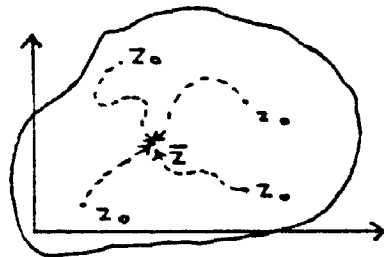
¹Cayley, Arthur (1821-1895): englischer Mathematiker

²Ableitung nach $z!$

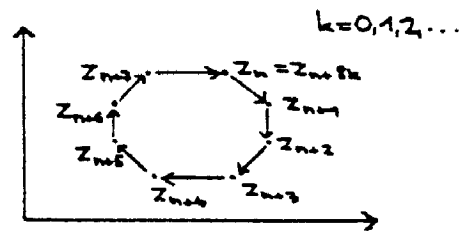


Figur 5

Die Folge $\{z_n\}$ heißt die „Bahn“ des Punktes z_0 (= Startpunkt). Wir vermuten — analog zum Reellen —, daß die Folge $\{z_n\}$ gegen eine Nullstelle \bar{z} von p strebt. Dies stimmt i.a. auch, wobei offenbar aber $\{z_n\}$ in Abhängigkeit von z_0 jeweils gegen eine andere der Nullstellen strebt. Es scheint naheliegend zu sein, daß jede Nullstelle \bar{z} ihren „Einzugsbereich“, d.h. ihren „Anziehungsbereich“ hat, ihr „Bassin“, wie man sagt. D.h. die Gauß'sche Zahlenebene scheint in Bereiche zu zerfallen, innerhalb derer die Bahnen aller Punkte (als Startpunkte z_0 gesehen) zur selben Nullstelle \bar{z} führen (Fig. 3).



Figur 3



Figur 4

Andererseits könnte eine Bahn $\{z_n\}$ aber z.B. auch periodisch werden (Fig. 4) oder andere interessante Eigenschaften haben.

Betrachten wir ein einfaches *Beispiel*: $p(z) = z^3 - 1$.

Die Nullstellen dieses Polynoms sind:

$$\bar{z}_1 = 1 \quad \bar{z}_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \bar{z}_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Das Newtonverfahren liefert für einen bestimmten Startwert z_0 die Näherungswerte

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2} = \frac{2z_n^3 + 1}{3z_n^2} := N(z_n).$$

Wie könnten die Bassins der Nullstellen \bar{z}_1 , \bar{z}_2 und \bar{z}_3 aussehen? Unter dem Bassin von \bar{z}_j versteht man wie gesagt die Menge

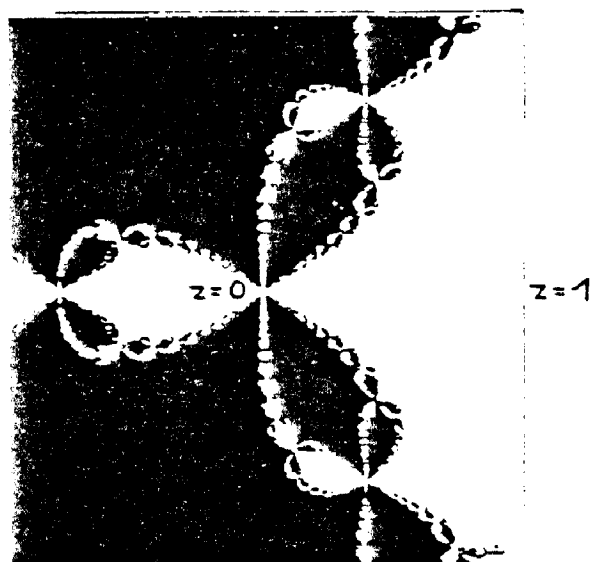
$$A(\bar{z}_j) = \{z \mid N^k(z) \rightarrow \bar{z}_j \text{ für } k \rightarrow \infty\} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Dabei ist $N^k(z) = N(N(\dots N(z)\dots))$ (N k -mal angewandt).

Die naheliegende Vermutung über die Gestalt von $A(\bar{z}_j)$ wäre wohl wie Fig. 5 zeigt.

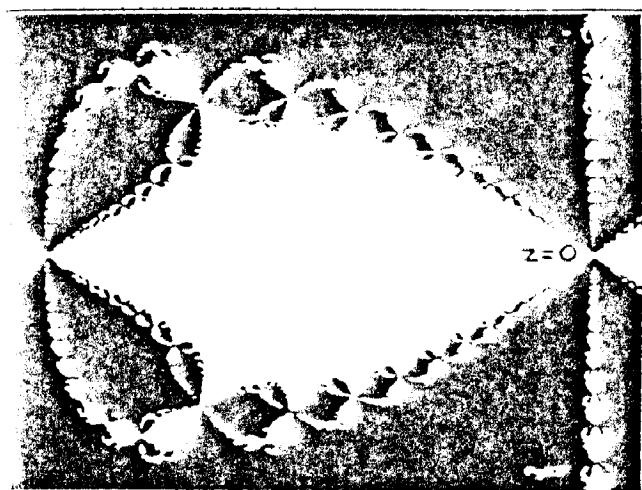
Die Gesamtheit der „Grenzlinien“, die wir als „Julia³-Menge“ des Systems N bezeichnen wollen, wäre dabei die fett eingezeichnete Kurve.

Aber: *Diese Vermutung ist falsch!* In Wirklichkeit sieht das Bassin der Nullstelle $\bar{z}_1 = 1$ (also $A(\bar{z}_1)$) so aus (weiße Fläche):



Figur 6

Fig. 7A und 7B zeigen Teile von $A(\bar{z}_1)$ vergrößert („herausgezoomt“):



Figur 7A



Figur 7B

Diese — vom Computer erzeugten — Bilder zeigen bemerkenswerte Aspekte (neben der generell etwas überraschenden und ohne Computer kaum zu konstruierenden Gestalt).

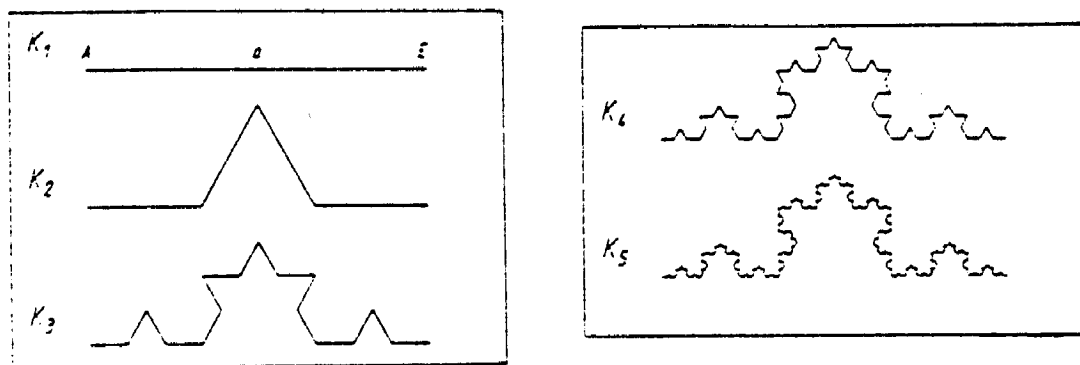
³Julia, Gaston (1893–1978): französischer Mathematiker

Lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf den Rand von $A(\bar{\varepsilon}_1)$: Zum einen scheint dieser nicht nur eine äußerst komplizierte Linie zu sein, sondern mehr noch: Es fällt schwer, überhaupt von einer „Linie“ oder „Kurve“ zu sprechen. Tatsächlich ist der Rand ein sog. „*Fraktal*“, d.h. ein Gebilde mit einer *nicht-ganzzahligen* Dimension. Einer (glatten) Kurve wird man wohl die Dimension 1 zuordnen, einem ganzen Flächenstück die Dimension 2. Der Rand „unseres“ Bassins $A(\bar{\varepsilon}_1)$ ist aber derart „in sich verzweigt“, daß man nicht mehr von einem eindimensionalen Gebilde sprechen möchte, andererseits kann man natürlich nicht von einem zweidimensionalen „Gebilde“ sprechen. Nun wurde aber ein Dimensionsbegriff entwickelt, der es erlaubt, auch nicht-ganzzahlige Dimensionswerte zur „Größenunterscheidung“ gewisser Punktmenge heranzuziehen. Eben diesem Thema wollen wir uns im folgenden widmen.

Um nun diesen Dimensionsbegriff in den Griff zu bekommen, beziehen wir uns auf eine zweite merkwürdige Eigenschaft des Randes: Fig. 7A und Fig. 7B zeigen — wie bereits gesagt — Ausschnittvergrößerungen von Fig. 6. Auch bei weiteren Vergrößerungen kehrt das Bild unseres Bassins (in der englischsprachigen Literatur „krabbenförmig“ genannt) immer wieder. Wir sprechen vom Prinzip der *Selbstähnlichkeit*. Dieses Phänomen wird uns zu einem allgemeineren Dimensionsbegriff führen, der in gewisser Weise mit der sog. *Hausdorff⁴-Dimension* zusammenhängt, einer alten Begriffsbildung der Maßtheorie.

§2 Ein Dimensionsbegriff für selbstähnliche Figuren

Sehen wir uns als erstes Beispiel die sog. *von Koch'sche Kurve* an. Sie entsteht als Grenzwert des im folgenden durch mehrere Figuren beschriebenen Konstruktionsverfahrens:



Figur 8A-E

Sie ist übrigens der Graph einer zwar stetigen, aber nirgends differenzierbaren Funktion. (Diese Sichtweise geht auf *B. Bolzano⁵* zurück.)

Wir erkennen: Wenn wir das linke „Drittel“ AB der dritten Zeile vom linken Endpunkt aus mit dem Faktor $p = 3$ strecken, ergibt sich das Bild der zweiten Zeile. Analoges gilt

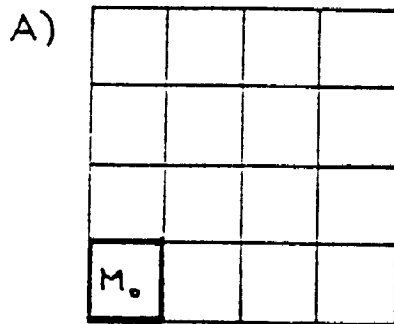
⁴Hausdorff, Felix (1868-1942): deutscher Mathematiker

⁵Bolzano, Bernhard (1781-1848): Prager Mathematiker

sichtlich für die zweite Zeile und offenbar für jede Zeile. Dieses Phänomen wollen wir als Selbstähnlichkeit bezeichnen. Selbstähnlichkeit bedeutet sozusagen Invarianz gegenüber zentrischen Streckungen.

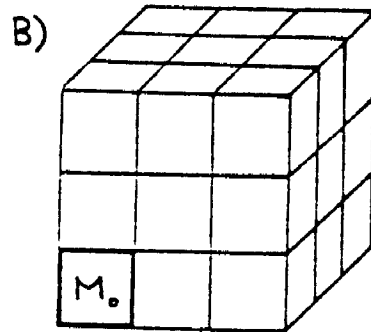
Um diesen Sachverhalt zu *quantifizieren*, sehen wir uns das obige Beispiel genauer an: Die dritte Zeile besteht aus $N = 4$ paarweise kongruenter Teile der Art \frown . Vergrößert (streckt) man einen derartigen Teil mit dem Faktor $p = 3$, erhält man die Figur der zweiten Zeile. Analog besteht offenbar die vierte Zeile aus $N = 4$ Teilen, deren jeder — mit dem Faktor $p = 3$ gestreckt — die Figur der dritten Zeile ergibt. U.s.w.

Die von Koch'sche Kurve ist also — als Grenzwert des Erzeugungsprozesses — ein selbstähnliches Gebilde, das sich durch die Zahlen (Parameter) $N = 4$ und $p = 3$ kennzeichnen läßt. Die folgenden vier Beispiele (aus [ZE]) zeigen weitere selbstähnliche Figuren. N ist dabei immer die Anzahl der jeweils paarweise kongruenten Teile; p der Streckungsfaktor, der einen solchen jeweils in „das Ganze“ überführt.



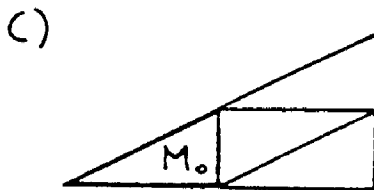
$$N = 16$$

$$p = 4$$



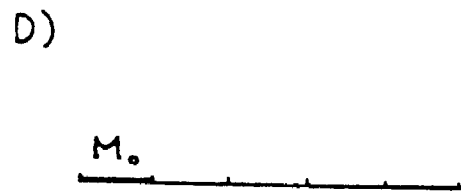
$$N = 27$$

$$p = 3$$



$$N = 4$$

$$p = 2$$



$$N = 5$$

$$p = 5$$

Figur 9A-D

Aus diesen Figuren läßt sich nun ein *Zusammenhang* zwischen N , p und der (euklidischen) Dimension d des „Gebildes“ ablesen. Offenbar gilt nämlich

$$N = p^d \quad \text{bzw.} \quad d = \frac{\log N}{\log p}$$

Konkret heißt das bei Fig. 9A $16 = 4^2$ und $d = 2$, bei Fig. 9B $27 = 3^3$ und $d = 3$, bei Fig. 9C $4 = 2^2$ und $d = 2$ und bei Fig. 9D $5 = 5^1$ und $d = 1$.

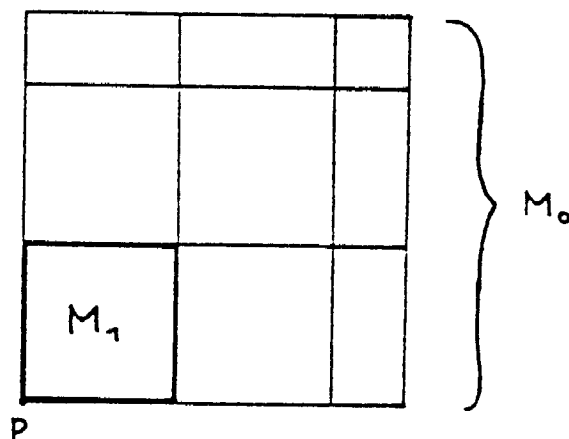
Dies motiviert nun ganz allgemein zur *Definition* der „Dimension“ eines selbstähnlichen Gebildes mit den Parametern N und p durch

$$d = \frac{\log N}{\log p} .$$

Die von Koch'sche Kurve hat in diesem Sinn die Dimension $d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618\dots$ Und dies entspricht auch irgendwie der Anschauung: Wenn wir an die von Koch'sche Kurve denken, haben wir wohl das Gefühl, daß sie wohl nicht mehr so einfach als eindimensionales Gebilde bezeichnet werden kann, andererseits aber klarerweise wohl auch nicht als zweidimensionales. Es widerspricht also im Grunde nicht der Anschauung, ihr eine Dimension zwischen 1 und 2 zuzuordnen. (Und daß d näher bei 1 als bei 2 liegt, ist ebenfalls kompatibel mit der Anschauung.)

Sehen wir uns (genau wie bei [ZE]) die „Tauglichkeit“ dieses Dimensionsbegriffes bei einigen weiteren Beispielen an. (Wir werden schon bei Beispiel 1 sehen, daß N und p auch nicht-ganzzahlig sein kann und dennoch eine sinnvolle Dimension d liefert.)

Beispiel 1:



Figur 10

M_0 entsteht offenbar durch zentrische Streckung von M_1 (aus P) mit dem Faktor $\frac{5}{2}$. Ferner besteht M_0 aus vier zu M_1 kongruenten Quadraten, aus vier Rechtecken, wo je zwei zusammen mit M_1 kongruent sind und einem kleinen Quadrat, welches zu einem Viertel von M_1 kongruent ist. Somit ist

$$N = 4 + 2 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4} .$$

Als (Selbstähnlichkeits-)Dimension von M_0 erhalten wir somit

$$d = \left(\log \frac{25}{4} \right) : \left(\log \frac{5}{2} \right) = 2 .$$

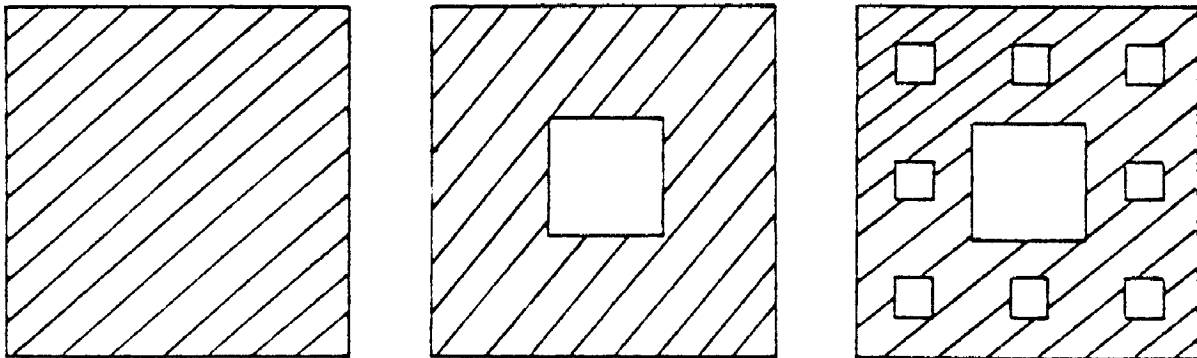
Und das stimmt mit ja auch mit dem herkömmlichen Dimensionsbegriff überein.

Man kann übrigens beweisen, daß die oben gegebene Definition im Fall eines Gebildes mit ganzzahliger euklidischer Definition stets mit dieser zusammenfällt. Gebilde mit nicht-ganzzahliger („gebrochener“) Dimension heißen „Fraktale“. Die von Koch'sche Kurve wie auch der Rand des Bassins $A(\bar{z}_1)$ (die Julia-Menge von $z^3 - 1$) sind typische Beispiele solcher Fraktale.

Schon in den Zwanziger-Jahren wurde der Begriff der „Hausdorff-Dimension“ d_H entwickelt, die ebenfalls nicht-ganzzahlige Werte annehmen kann und die vor allem in der *Zahlentheorie* zur Charakterisierung der „Größe“ gewisser Zahlenmengen verwendet wird. Auch für die „dimensionsmäßige“ Charakterisierung von allgemeinen Fraktalen findet sie Anwendung. Für unsere „selbstähnlichen Gebilde“ stimmt d_H mit d überein. (Der Name „Fraktal“ weist ja auch darauf hin, daß die Hausdorff-Dimension nicht ganzzahlig ist.)

Wer z.B. das *Cantor'sche*⁶ *Diskontinuum* D kennt, überlegt sich leicht, daß es selbstähnlich mit $N = 2$ und $p = 3$ ist. (Es empfiehlt sich, dabei an die rekursive Konstruktion von D zu denken, bei der $[0, 1]$ in drei Teile geteilt wird, das mittlere Intervall fortgeworfen wird u.s.f. Die im Grenzwert verbleibende Punktmenge ist D .) Daraus folgt $d = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309\dots$ und dies ist bekanntlich auch die Hausdorff-Dimension von D .

Beispiel 2 („Sierpiński⁷-Teppich“):



Figur 11A-C

u. s. w.

Der aus Fig. 11 ersichtliche Konstruktionsprozeß ergibt — unendlich oft durchgeführt — ein offenbar „sehr diffuses“ und „verstreutes“ Gebilde, eine Art Teppich mit „unendlich vielen Löchern“, den man wohl nicht mehr als zweidimensional bezeichnen kann, andererseits wohl wieder auch nicht als eindimensional wie eine (allenfalls „verbogene“) Strecke. Tatsächlich ist das Gebilde selbstähnlich. Der Streckungsfaktor p ist offenbar 3. Von Schritt zu Schritt wird das Kerngebilde in je $N = 8$ paarweise kongruente Teile zerlegt: Fig. 11B besteht aus 8 Figuren der Art von Fig. 11A; Fig. 11C besteht aus 8 Figuren der Art von Fig. 11B; u.s.f.

Daher gilt: $d = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.8927\dots$

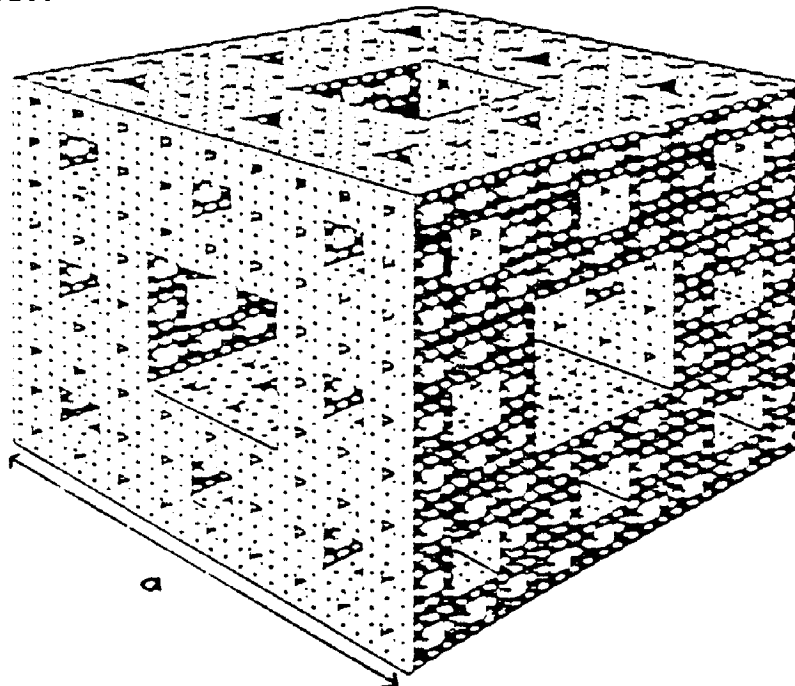
⁶Cantor, Georg (1845–1918): deutscher Mathematiker

⁷Sierpiński, Waclaw (1882–1969): polnischer Mathematiker

Die in Fig. 11 dargestellten Figuren eignen sich nebenbei bemerkt hervorragend zur Demonstration am Overhead-Projektor.

Beispiel 3 („Menger⁸-Schwamm“: das Titelbild von [RML]!):

Aus einem Würfel wird das „mittlere Kreuz“ entfernt. Desgleichen geschieht für jeden der verbleibenden zwanzig (Teil-)Würfel u.s.w. Die „als Grenzwert“ verbleibende Punktmenge M heißt „Menger-Schwamm“ (sie ist nicht leer, da z.B. die Eckpunkte des Ausgangswürfels jedenfalls zu M gehören), im Grenzfall entsteht eine Art „Schwamm“ mit unendlich vielen „Löchern“ (Fig. 12), ein offenbar selbstähnliches Gebilde mit dem Streckungsfaktor $p = 3$ (zentrische Streckung jeweils vom linken unteren vorderen Eckpunkt) und $N = 20$. Daher ist die Dimension dieses zwischen der Zwei- und Dreidimensionalität angesiedelten Gebildes $d = \frac{\log 20}{\log 3} = 2.7268\dots$



Figur 12

An dieser Stelle sei kurz ein völlig anderer Zweck unseres nicht-ganzzahligen Dimensionsbegriffes erwähnt, der eben die Notwendigkeit desselben deutlich macht. Berechnen wir das Volumen unseres „Schwammes“: Nach Konstruktion folgt:

$$V = a^3 - 7 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 - 20 \cdot 7 \cdot \left(\frac{a}{9}\right)^3 - 20^2 \cdot 7 \cdot \left(\frac{a}{27}\right)^3 - \dots$$

Denn: Es werden *erstens* 7 Würfeln der Kantenlänge $\frac{a}{3}$ weggenommen, *zweitens* von den verbleibenden 20 jeweils wieder sieben mit der Kantenlänge $\frac{a}{9}$, *drittens* von den verbleibenden $20^2 = 400$ Würfeln mit der Kantenlänge $\frac{a}{9}$ jeweils 7 mit der Kantenlänge $\frac{a}{27}$ u.s.f.

⁸Menger, Karl (1902–1985): österreichischer Mathematiker

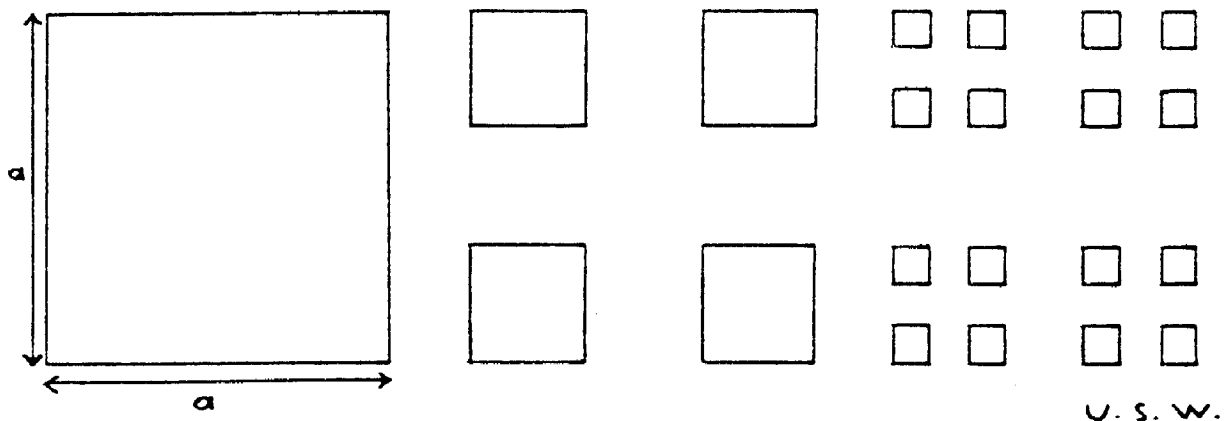
Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 V &= a^3 \cdot \left[1 - 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 20 \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 - 20^2 \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^3 - \dots \right] = \\
 &= a^3 \cdot \left[1 - 7 \cdot \frac{1}{27} - 20 \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 - 20^2 \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^3 - \dots \right] = \\
 &= a^3 \cdot \left\{ 1 - \frac{7}{27} \cdot \left[1 + 20 \cdot \frac{1}{27} + 20^2 \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 + \dots \right] \right\} = \\
 &= a^3 \cdot \left[1 - \frac{7}{27} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{20}{27}\right)} \right] = a^3 \cdot (1 - 1) = 0 .
 \end{aligned}$$

D.h. der Menger-Schwamm besitzt das *Volumen Null*. Der Volumensbegriff unterscheidet aber schlecht zwischen verschiedenen Punktmengen, so hat ja auch eine Figur aus endlich vielen Punkten oder eine ein- oder zweidimensionale Menge das Volumen Null, der Menger-Schwamm besteht aber aus „viel komplizierter liegenden“ Punkten. Unser Dimensionsbegriff differenziert hingegen zwischen „Nullmengen“ und erlaubt eine feinere Größenunterscheidung.

Beispiel 4 (Der „Cantor-Staub“):

Dieses Fraktal stellt ein „zweidimensionales“ Analogon zum eben besprochenen Menger-Schwamm dar (Fig. 13).



Figur 13A-C

Durch jeweiliges Entfernen des „mittleren Kreuzes“ bleiben also jeweils $N = 4$ Gebilde, die durch Streckung mit dem Faktor $p = 3$ auf das Grundgebilde der jeweils vorangehenden Konstruktionsstufe gestreckt werden können. Die Dimension des nach unendlich vielen solchen Konstruktionsstufen verbleibenden Gebildes M ist dann $d = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618\dots$

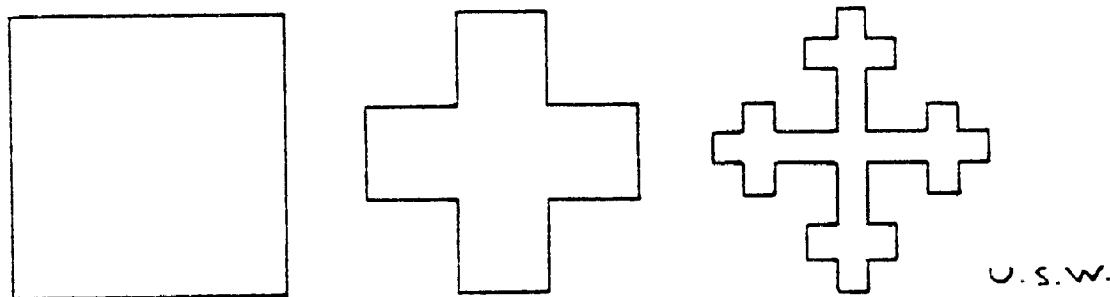
Wiederum können wir uns für den (Flächen-)Inhalt des Grenzgebildes interessieren:

$$\begin{aligned}
 A &= a^2 - 5 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 4 \cdot 5 \cdot \left(\frac{a}{9}\right)^2 - 4^2 \cdot 5 \cdot \left(\frac{a}{27}\right)^2 - \dots = \\
 &= a^2 - 5 \cdot a^2 \cdot \left[\frac{1}{9} + 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \dots \right] = \\
 &= a^2 - 5 \cdot a^2 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left[1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots \right] = \\
 &= a^2 - \frac{5}{9} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = 0.
 \end{aligned}$$

Der Leser ist selbst angehalten, sich von der Übereinstimmung von Konstruktionsprinzip und Rechnung zu überzeugen.

Es sei noch vermerkt, daß hier (wiedereinmal) eine sehr schöne Anwendung der *Summenformel der geometrischen Reihe* vorliegt.

Ein letztes *Beispiel* soll zur Anregung zur Findung weiterer selbstähnlicher Figuren dienen:



Figur 14A-C

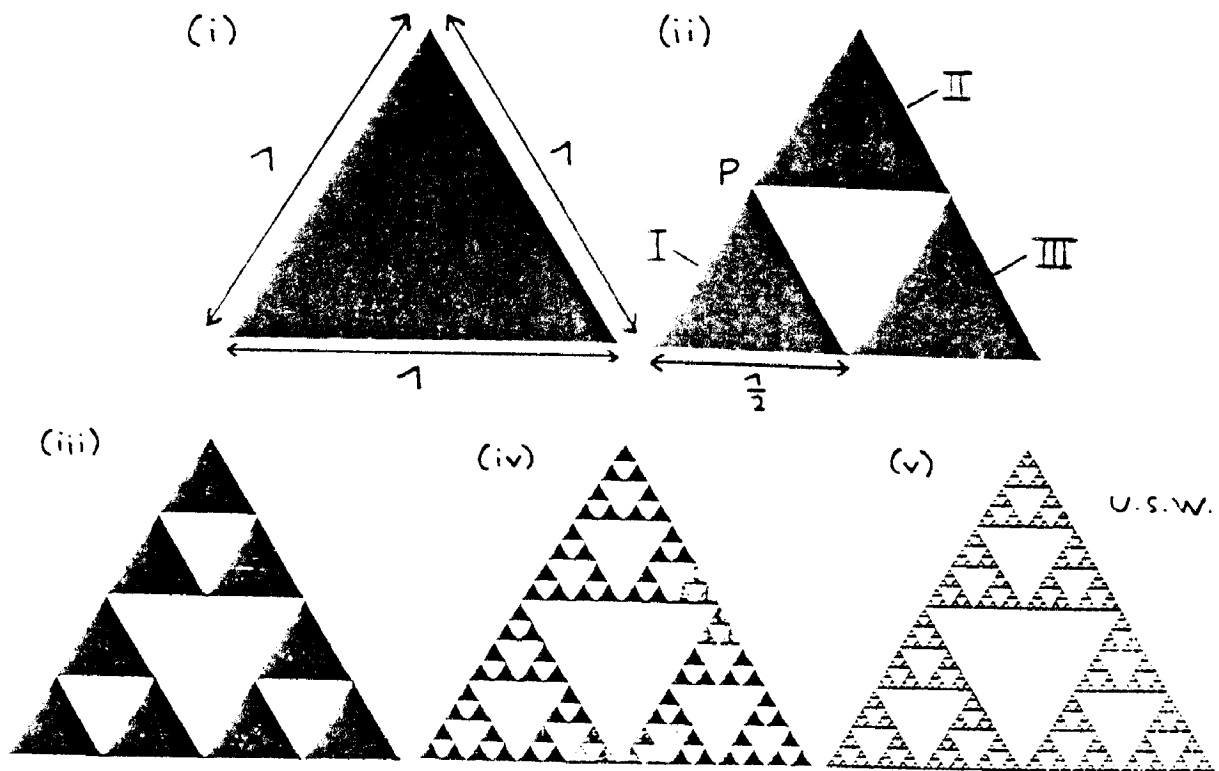
Das als Grenzwert entstehende Fraktal hat die Dimension $d = \frac{\log 5}{\log 3} = 1.4649 \dots$

§3 Exaktifizierung des Obigen und Nicht-Lineare Konstruktionsprinzipien von Fraktalen

Bei allen in §2 beschriebenen Beispielen selbstähnlicher Gebilde ist ein *affin-linearer* Prozeß die Grundlage, die Verknüpfung einer Streckung und Translation. Sehen wir uns nun das sog. *Sierpiński-Dreieck* M (Fig. 15) an:

Der Konstruktionsprozeß läßt sich hier offenbar durch drei *affin-lineare* Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der folgenden Art beschreiben (der Ursprung des Koordinatensystems ist stets die linke untere Ecke):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$



Figur 15A-E

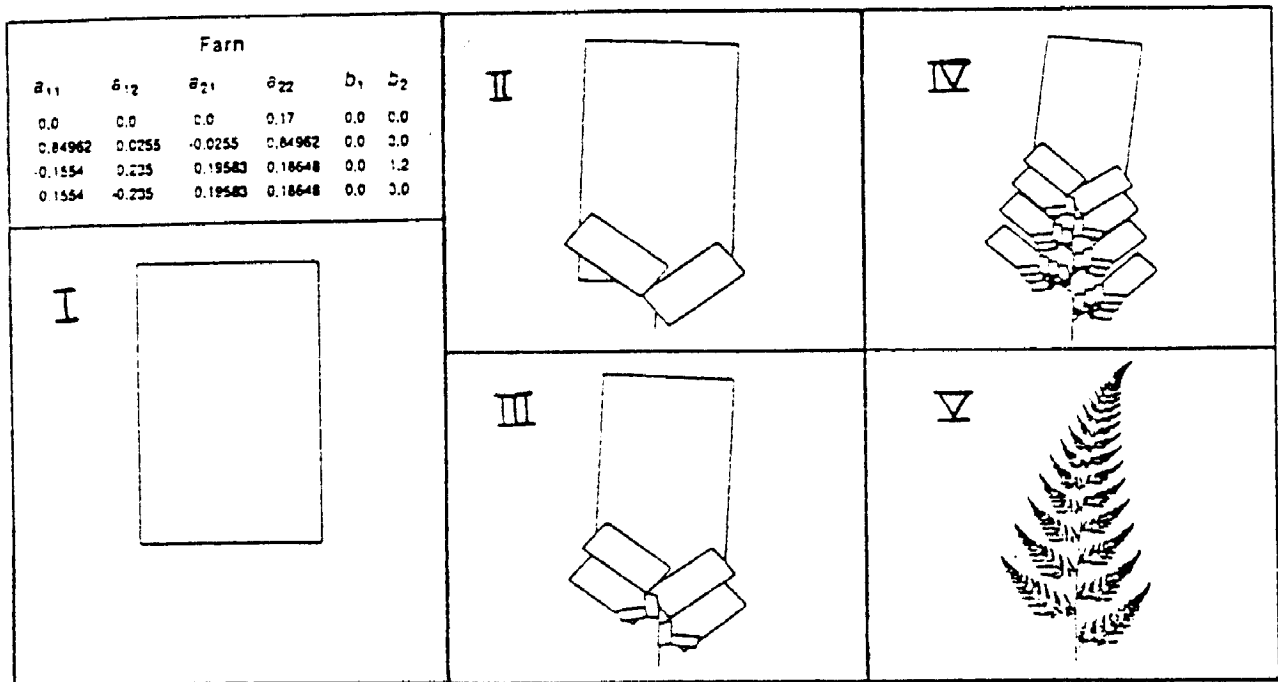
Überprüfen wir dies an dem Übergang von (i) zu (ii): Das Dreieck I entsteht aus dem großen Dreieck, wenn man $b_1 = b_2 = 0$ setzt, f_1 ist also einfach die Abbildung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Weiters bekommen wir das Dreieck II, wenn I um $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$ translatiert wird, denn die Koordinaten von P sind $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Somit gilt für f_2 : $b_1 = \frac{1}{4}$, $b_2 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}$. Schließlich entsteht III aus I durch Translation um $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Und genau dasselbe Tripel affin-linearer Transformationen führt von (ii) nach (iii) u.s.w.

In §2 haben wir Selbstähnlichkeit durch N und p beschrieben, beim Sierpiński-Dreieck ist also $p = 2$ und $N = 3$. Die Dimension von M (mit Streckungsfaktor $p = \frac{1}{2}$ bzw. 2) ist also $d = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.5849\dots$ Das entspricht der Beschreibung von M durch $N = 3$ affin-lineare Transformationen f_i .

Als weitere Beispiele einer derartigen Beschreibung wollen wir zwei Figurenreihen angeben, die es uns ermöglichen, die Entstehung von Blatt-Formen als Produkte des sog. „linearen Dialekts“ zu verstehen (Fig. 16 u. 17).

Die zugehörigen vier Transformationen f_i sind von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$



Figur 16A-E

also

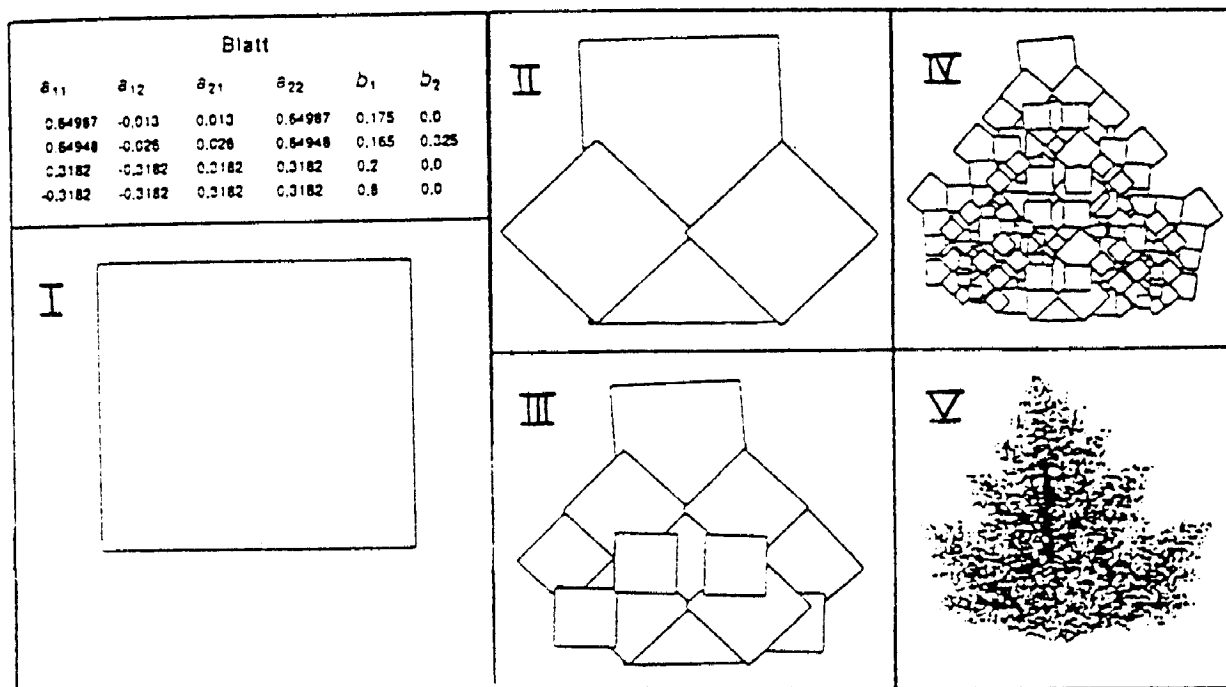
$$\vec{x} \mapsto A\vec{x} + \vec{b},$$

wobei die genauen Parameterwerte jeweils angegeben sind. Jeweils ist dabei I das Ausgangsbild, II die erste, III die zweite, IV die vierte Iteration und V das Limesbild.

Man kann nun diesen Konstruktionsprozeß auch mit nichtlinearen (z.B. quadratischen) Funktionen f_i ($1 \leq i \leq n$) durchführen. Dann „verzerrt“ und „verdreh“ sich die Ausgangsfigur, der schrittweise Verkleinerungs- und Vervielfachungs- Kopierprozeß erzeugt schließlich wieder ein Fraktal. Fig. 18 zeigt ein Beispiel eines sog. „quadratischen Dialekts“, wobei nun nichtlineare Erzeugungsfunktionen zugrunde liegen.

Die Darstellung besteht aus Ausgangsbild (I), fünf Iterierten (II-VI) und dem Limesbild (VII). Die jeweilige Verdopplung des Schriftzuges „SPEKTRUM“ rührt daher, daß $N = 2$ Transformationen f_1 und f_2 verwendet wurden. Die nichtlineare Wirkung der Transformationen ist an den Verzerrungen im Schriftzug zu beobachten. Das Limesbild ist ein Fraktal wie viele Julia-Mengen (sh. §1) nichtlinearer dynamischer Systeme N .

Um diese letzte Bemerkung zu verstehen, kehren wir nocheinmal zu unserem Ausgangspunkt zurück. In §1 haben wir das Newtonverfahren als ein solches zur Auffindung von Nullstellen einer Funktion f interpretiert; was würde herauskommen, wenn man \vec{z} (d.h.



Figur 17A-E

eine exakte Nullstelle von f) selbst in das Newtonverfahren einsetzte? Antwort: wiederum \bar{z} , denn:

$$N(\bar{z}) = \bar{z} - \frac{f(\bar{z})}{f'(\bar{z})} = \bar{z} \quad (f(\bar{z}) \text{ ist ja gleich Null!}) .$$

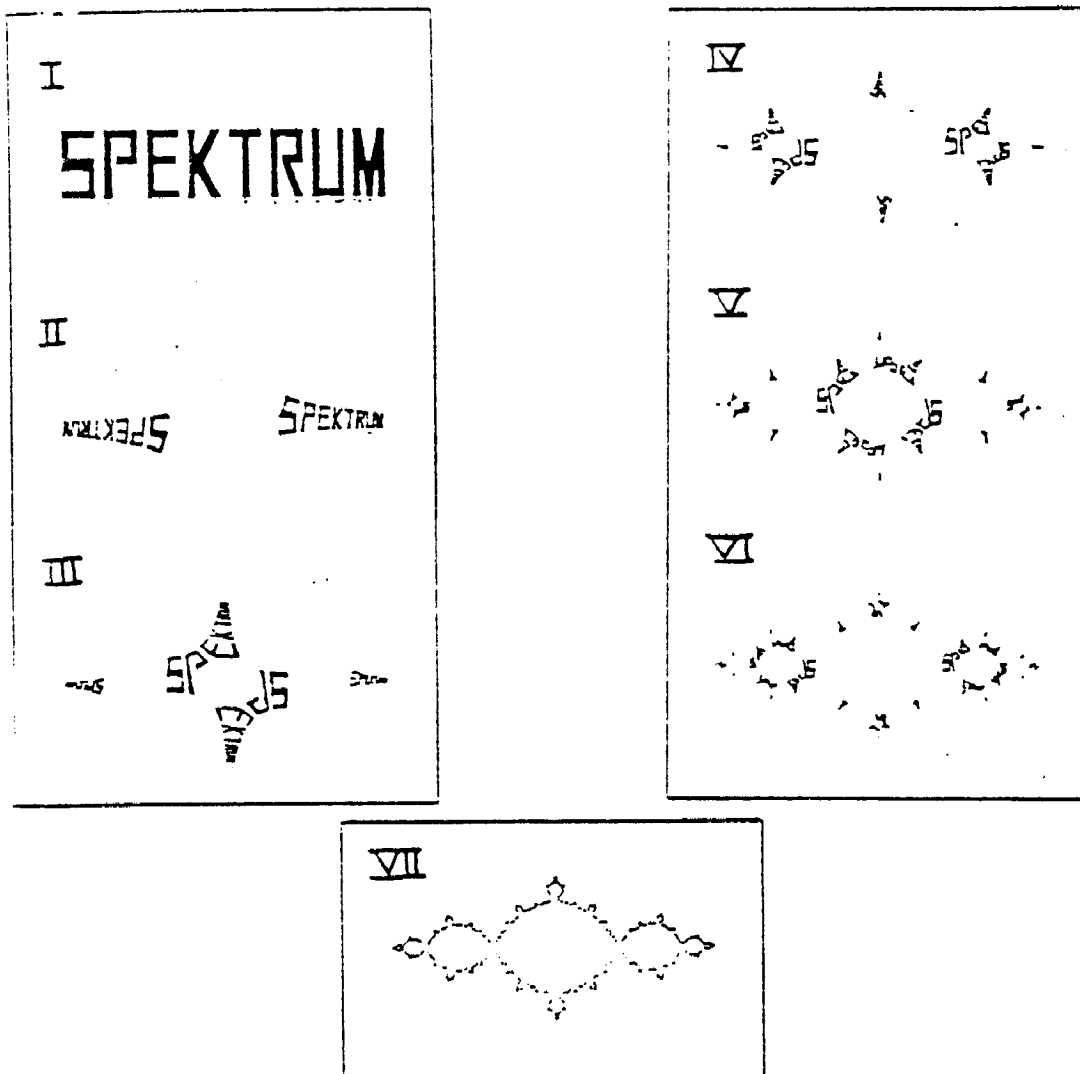
D.h.: Fassen wir das Newtonverfahren als dynamisches System $N(z_n) = z_{n+1}$ auf, so ist also \bar{z} ein *Fixpunkt* desselben. Wieder interessieren wir uns für die Startwerte z_0 , die zu den (möglicherweise verschiedenen) Fixpunkten von N führen.

Nun ist N i.a. ein relativ kompliziertes dynamisches System (je nach Art der eingesetzten Funktion f). Betrachten wir stattdessen ein einfacheres:

$$x_{n+1} = x_n^2 + c \quad (x_n \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C} \text{ konstant}) .$$

Sei vorerst $c = 0$. Es gibt für die entstehende Folge $\langle x_n \rangle$ grundsätzlich drei Möglichkeiten:

- 1.) Gilt $|x_0| < 1$ (und nur dann), dann wird $\langle x_n \rangle$ gegen Null konvergieren.
- 2.) Für den Fall $|x_0| > 1$ strebt $\langle x_n \rangle$ gegen Unendlich und vice versa.
- 3.) Wenn $|x_0| = 1$ ist, dann (und nur dann) ist $|x_n| = 1$ für alle n . Die entstehende Folge $\langle x_n \rangle$ liegt ganz auf dem Einheitskreis.



Figur 18A-G

Wir sehen: Die Bassins der beiden anziehenden Fixpunkte $z = 0$ und $z = \infty$ (Riemann'sche Zahlenkugel) werden eben durch den *Einheitskreis* getrennt, der in diesem Fall die Julia-Menge darstellt.

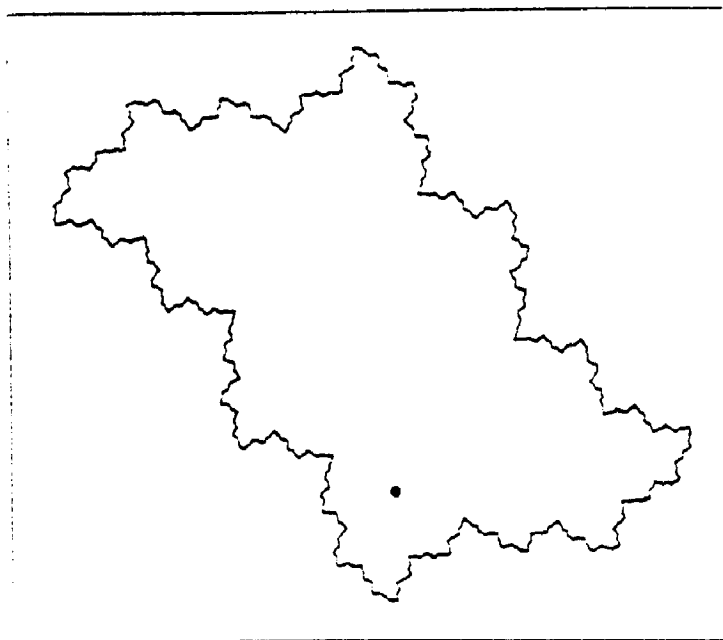
Komplizierter und aufregender wird es für c -Werte ungleich Null. Für $c = -0.12375 + 0.56508i$ ergibt sich folgende Julia-Menge (Fig. 19). (Die Selbstähnlichkeit ist auch hier vorhanden.)

Mit $c = -0.12 + 0.74i$ erhalten wir Fig. 20.

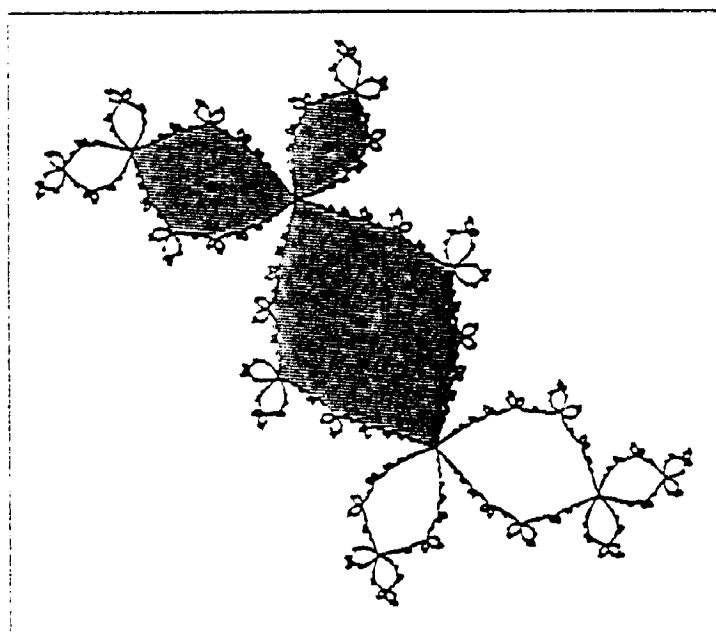
Nun ist unsere Julia-Menge nicht mehr ein einzelner, mehr oder weniger deformierter Kreis, sondern sie besteht aus unendlich vielen solchen, die aber zusammenhängen. Auch für diesen c -Wert ist also unsere Julia-Menge zusammenhängend. Das Innere dieser Julia-Menge enthält nicht mehr *einen* stabilen Fixpunkt („Attraktor“), sondern einen *Dreier-Zyklus*, dargestellt durch die fettgedruckten Punkte.

Wir erkennen bereits: *Abhängig* von den c -Werten haben die Julia-Mengen *verschiedene* Gestalt.

Im folgenden unterscheiden wir nur zwischen zusammenhängenden und nichtzusammen-



Figur 19



Figur 20

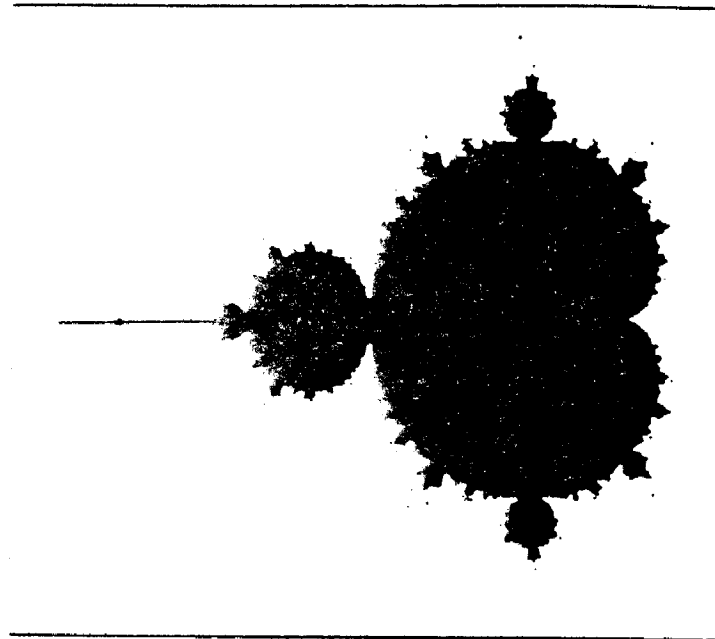
hängenden Julia-Mengen. Rechnet man der Reihe nach (in kleinen Schritten) viele c -Werte durch und färbt genau diejenigen c -Werte in der komplexen Ebene schwarz ein, wo die Julia-Menge von $x \mapsto x^2 + c$ zusammenhängend ist, erhält man das berühmte „Apfelmännchen“, die sog. „Mandelbrotmenge“ M (Fig. 21).

Diese Menge (bzw. der Rand) ist quasi zum Symbol der gesamten Forschungsrichtung geworden. Bei schrittweisen Vergrößerungen des Randes tritt erstaunlicherweise immer wieder die gleiche Gestalt auf, die sich sozusagen „ins unendlich Kleine“ hinein fortsetzt. Der Rand ist ein Paradebeispiel der Selbstähnlichkeit und eines *Fraktales*.

Die Mandelbrotmenge M ist gleichsam ein *Wegweiser* (Führer) durch die auch optisch

- 2.25

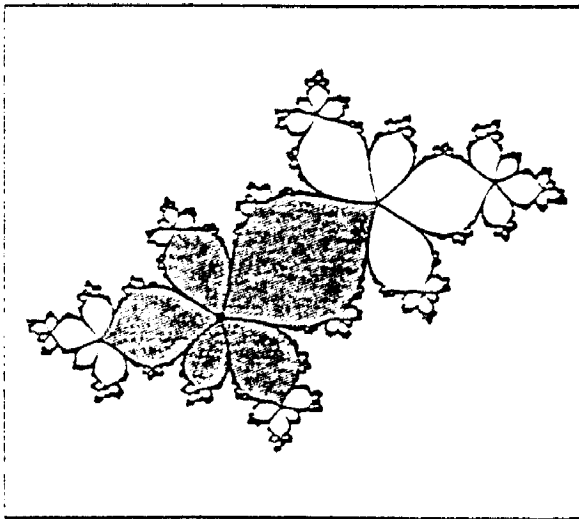
0.75



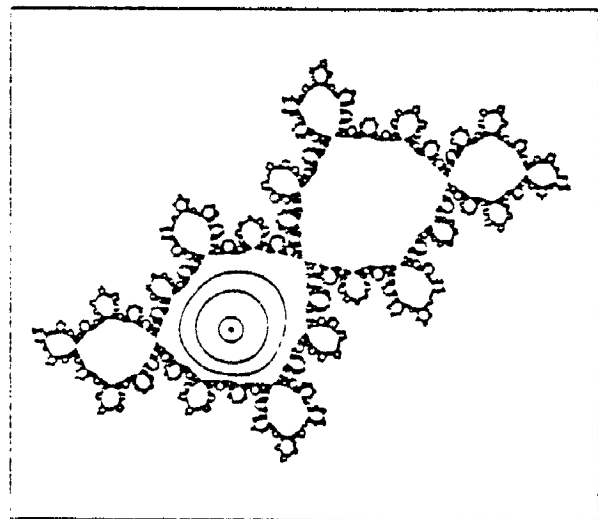
- 1.5

Figur 21

wunderschöne Welt der Julia-Mengen (sh. z.B. [PR]). Die in Fig. 19 dargestellte Julia-Menge stammt aus einem c -Wert im Inneren des Hauptkörpers von M . Zu den c -Werten im Inneren einer der Knospen gehören Julia-Mengen vom Typ der Fig. 20. Am Entstehungspunkt einer Knospe beobachten wir den sog. „parabolischen“ Fall, auf den wir hier natürlich nicht näher eingehen können (Fig. 22).



Figur 22



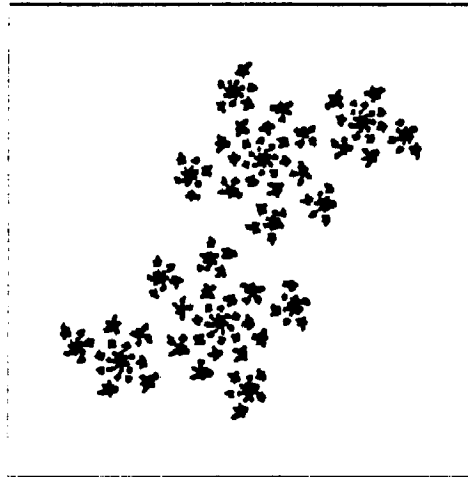
Figur 23

Schlußendlich (und das ist ein Ergebnis einer grundlegenden Arbeit von *D. Sullivan*, 1983) gehört zu den Fällen, wo c an irgendeinem anderen Randpunkt von M liegt, die sog. „Siegel⁹-Scheibe (Fig. 23).

⁹Siegel, Carl Ludwig (1896–1981): deutscher Mathematiker

Die Klassifikation von Julia-Mengen (die wohl typischsten Vertreter von Fraktalen) mit Hilfe der Mandelbrotmenge ist ein schönes und schwieriges Gebiet, das wir mit unseren Bemerkungen und Bildern natürlich nur ein wenig „ankratzen“ konnten. Uns geht es aber natürlich nicht um Systematik, wir wollen nur ein wenig davon erzählen, womit sich viele Mathematiker heute beschäftigen. Hierzu noch ein letztes Wort.

Abgesehen von einigen Spezialfällen (z.B. c -Werte auf der „Hauptantenne“) bleibt noch die Möglichkeit, daß der c -Wert außerhalb von M liegt. Zu solchen Werten gehören Julia-Mengen wie Fig. 24 („*Fatou*¹⁰-Staub“).



Figur 24

In diesem kurzen Überblick über das Verhalten der Rekursionsgleichung (des dynamischen Systems) $x_0; x_{n+1} = x_n^2 + c$ sei noch erwähnt, daß nach einem Satz von *Adrien Douady* (Paris) und *John Hamal Hubbard* (USA) die Mandelbrotmenge selbst zusammenhängend ist.

§4 Ausblick und Resümee

Wie bereits erwähnt, haben auch die Grenzbilder des quadratischen Dialekts gebrochene Dimensionen. Diese — nämlich ihre Hausdorff-Dimension d_H — ist nun nicht mehr so einfach berechenbar. Schon die bloße Definition der Hausdorff-Dimension d_H bedarf komplizierter maßtheoretischer Methoden. Andererseits ist das Konzept der Hausdorff-Dimension viel allgemeiner als die oben behandelte Dimension für selbstähnliche Figuren. Ihre Berechnung für in der Praxis auftretende Fraktale ist äußerst schwierig und in vielen konkreten Fällen noch unbekannt.

Der oben behandelte Spezialfall gibt aber einen ausgezeichneten Einblick in die „Welt“ gebrochener, besser: nicht-ganzzahliger, Dimensionen. Und das war schließlich unser Ziel.

¹⁰Fatou, Pierre (1878–1929): französischer Mathematiker

Schließen möchten wir mit einem Zitat von *B. Mandelbrot*, der über die Faszination von Fraktalen für Mathematiker einerseits, Naturwissenschaftler andererseits schreibt: „Die Naturwissenschaftler werden (sicherlich) überrascht und erfreut sein, daß sie zukünftig solche Formen qualitativ streng untersuchen können, die sie bisher faltig, gewunden, körnig, picklig, pockennarbig, polypenförmig, schlängelnd, seltsam, tangartig, verzweigt, wirr, wuschelig genannt haben.

Die Mathematiker werden (hoffentlich) überrascht und erfreut sein, daß Mengen, die bisher als Ausnahmerecheinungen galten, in gewissem Sinne die Regel sind, daß sich scheinbar pathologische Konstruktionen auf natürliche Weise aus sehr konkreten Problemen ergeben und daß das Studium der Natur alte Probleme lösen hilft und so viele neue aufwirft.“

Literatur

- [CF] Chaos und Fraktale. Eine Zusammenfassung verschiedener Artikel aus „Spektrum der Wissenschaft: Verständliche Forschung“. Spektrum-der-Wissenschaft-Verlagsgesellschaft, Heidelberg 1989.
- [HE] Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis, Teil 1. B. G. Teubner, Stuttgart 1988.
- [PR] Peitgen, H.-O. u. Richter, P.H.: The Beauty of Fractals. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo 1986.
- [PSH] Peitgen, H.-O., Saupe, D. u. v. Haeseler, F.: Cayleys' Problem and Julia Sets. In: The Mathematical Intelligencer 6/2 (1984), p. 11–20.
- [RE] Reichel, H.-C.: Angewandte Mathematik für Lehramtskandidaten. Vorlesungsskriptum der Universität Wien, 1989.
- [RML] Reichel, H.-C., Müller, R., Laub, J. u. Hanisch, G. (ab Band 6): Lehrbuch der Mathematik 5. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1989.
- [ZE] Zeitler, H.: Cantor-Staub, Sierpiński-Teppich, Menger-Schwamm — eine verrückte Welt. In: MNU 42/5 (1989), S. 268–275.

Anschrift der Autoren

Mag. Stefan Götz und Prof. Dr. Hans-Christian Reichel
Institut für Mathematik der Universität Wien
Strudlhofg. 4
A-1090 Wien