

ITERATIONEN

und einige Anwendungen

Referat,

gehalten am 31. März 1989

im Rahmen der

Lehrerfortbildungstagung 1989

(veranstaltet von der

Didaktik-Kommission

der

Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

und dem

Pädagogischen Institut des Bundes für Niederösterreich)

Mag. Josef PECH

<u>Inhaltsübersicht:</u>	Seite
1.) Das Verfahren von NEWTON-RAPHSON	96
2.) Iteration	97
3.) Konvergenz von Iterationsverfahren	97
4.) HERONSches Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel	100
5.) Berechnung dekadischer Logarithmen	102
6.) Algebraische und nichtalgebraische reelle Zahlen	102
7.) Das arithmetische und das geometrische Mittel	104
8.) Rekursive Doppelfolge zur Berechnung von π	105
9.) Was heißt "nahe" ?	107
10.) Anwendungen iterativer Methoden	108
11.) Anwendung auf ein Integral	111
12.) Kurzer Intelligenztest	112

1.) DAS VERFAHREN VON NEWTON-RAPHSON

1. Bsp.: $x^2 - 2x + 2 = 0$ Nach der bekannten Formel ergeben sich die beiden Lösungen $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$

wendet man das Näherungsverfahren von NEWTON an, so ergibt sich:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2x_k + 2}{2x_k - 2} = \dots = \frac{x_k^2 - 2}{2x_k - 2}$$

Formel von NEWTON:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Bei Anwendung von reellen Startwerten ergeben sich divergente Folgen. Z.B.: $\langle 5; 2,87; 1,67; 0,59; 2,01; \dots; -16,03; \dots \rangle$

Das ist klar, da es keine reellen Nullstellen gibt.

Verwendet man jedoch eine komplexe

(nicht reelle) Startzahl $x_1 = 1 + i$, so

ergibt sich die Folge

$$\langle 1; \frac{3}{4} + \frac{3}{4}i; 1,075 + 0,975i; 0,998 + 0,997i; \dots \rangle$$

Diese Folge scheint gegen $1 + i$ zu konvergieren.

2. Bsp.: $x^3 - 1 = 0$ (Bestimmung der

3. Einheitswurzel)

NEWTON: $f(x) = x^3 - 1$; $f'(x) = 3x^2$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 1}{3x_k^2} = \frac{2x_k^3 + 1}{3x_k^2}$$

Für $x_1 = 1$ erhält man die Folge $\langle 1; -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i; -0,58 + 0,92i; \dots \rangle$

die nach $-0,5 + 0,86603i$ konvergiert.

Exakter Wert: $e^{\frac{2\pi i}{3}} = -0,5 + 0,8660i$

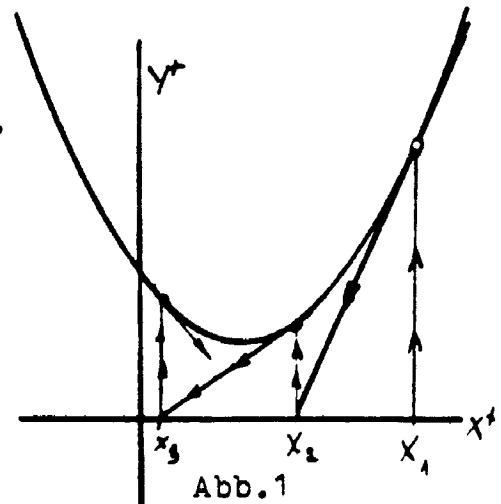


Abb. 1

2.) ITERATION

3. Esp.: $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ Methode: Auflösung der Gleichung auf irgendeine Art nach x .

Z.B.: $\textcircled{I} x = x^3 - 2x^2 + 1$ ergibt $x_{k+1} = x_k^3 - 2x_k^2 + 1$

ODER: $\textcircled{II} x = \sqrt{\frac{x^3 - x + 1}{2}}$ ergibt $x_{k+1} = \sqrt{\frac{x_k^3 - x_k + 1}{2}}$

ODER: $\textcircled{III} x = \sqrt[3]{2x^2 + x - 1}$ ergibt $x_{k+1} = \sqrt[3]{2x_k^2 + x_k - 1}$

Numerisch:

\textcircled{I}	\textcircled{II}	\textcircled{III}
$\langle 1; 0; 1; 0; 1; \dots \rangle$ div.	$\langle 1; 0,71; 0,57; 0,55; \dots \rangle$ konv. nach $0,55495813 = \alpha_1$	$\langle 1; 1,26; 1,51; 1,72; \dots \rangle$ konv. nach $\alpha_2 = 2,246979601$
$\langle 2; 1; 0; \dots \rangle$ div.		
$\langle 0,5; 0,63; 0,64; 0,67; 0,40; \dots; 0,99; 0,01; \dots \rangle$		
divergiert immer?		
Ja, Bew. später.		

3.) KONVERGENZ von ITERATIONSVERFAHREN

Frage: Wann konvergiert ein Iterationsverfahren der Form $x_{k+1} = F(x_k)$?

In einem Lösungspunkt α ist $\alpha = F(\alpha)$.

Das Iterationsverfahren definiert eine Folge x_k , mit $x_{k+1} = F(x_k)$.

Ges.: $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Sei $\alpha - x_k = \varepsilon_k$ der Fehler im k -ten Schritt.

Wir denken uns $F(x)$ in eine Taylorreihe (um $x_0 = \alpha$) entwickelt (ohne weitere Gedanken über die Möglichkeit der Entwicklung).

$$\text{Also } F(x) = \underbrace{F(\alpha)}_{\alpha} + F'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{F''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + \dots$$

speziell: $x := \alpha - \varepsilon_k = x_k$

$$F(x_k) = \alpha + F'(\alpha)(-\epsilon_k) + \dots$$

$$x_{k+1} = \alpha - F'(\alpha) \cdot \epsilon_k + \frac{F''(\alpha)}{2!} (x_k - \alpha)^2 + \dots$$

$$x_{k+1} - \alpha = -F'(\alpha) \cdot \epsilon_k + \frac{F''(\alpha)}{2!} (\epsilon_k)^2 + \dots$$

$$\alpha - x_{k+1} = \boxed{\epsilon_{k+1}} = \epsilon_k F'(\alpha) - \frac{1}{2} \epsilon_k^2 F''(\alpha) + \dots$$

1. Fall: $F'(\alpha) \neq 0$ Für kleine ϵ_k gilt in erster Näherung: $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k F'(\alpha)$ (d.h. ϵ_{k+1} ist von derselben Größenordnung wie ϵ_k (allerdings nicht im physikalischen Sinn)).

Damit die Iteration konvergent sein kann, muß $|\epsilon_{k+1}| < |\epsilon_k|$ sein.

Das ist erfüllt, wenn $|F'(\alpha)| < 1$.

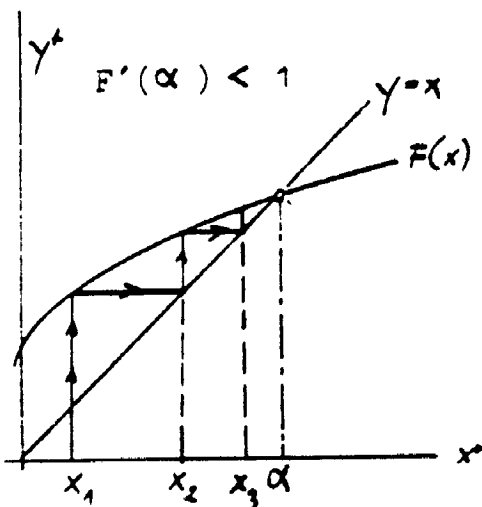


Abb. 2

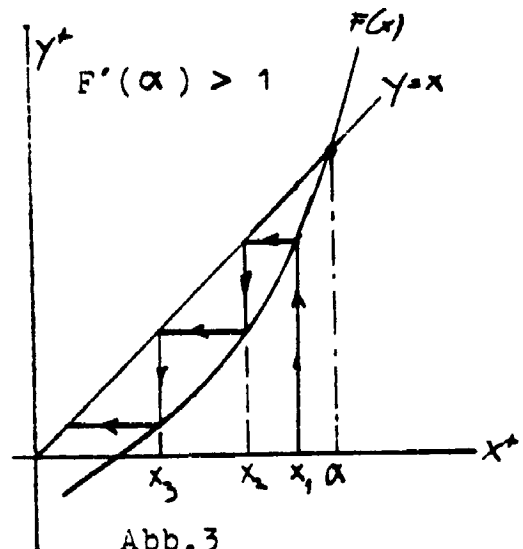


Abb. 3

2. Fall: $F'(\alpha) = 0$; $F''(\alpha) \neq 0$

$$\text{Somit } \epsilon_{k+1} = -\frac{1}{2} \epsilon_k^2 F''(\alpha) = \epsilon_k^2 \underbrace{\left(-\frac{F''(\alpha)}{2}\right)}_{\text{Zahl}},$$

also ϵ_{k+1} ist von der Größenordnung ϵ_k^2 (Iteration 2. Ordnung).

Wieder: Konvergenz, wenn $|\epsilon_{k+1}| < |\epsilon_k|$.

$$\text{Also: } \left| \frac{\epsilon_{k+1}}{\epsilon_k} \right| = |\epsilon_k \cdot \text{Zahl}| < 1$$

immer machbar, wenn ϵ_k klein genug gewählt wird.

Somit gilt: Ein Iterationsverfahren 2. Ordnung konvergiert, wenn der Startwert x_1 nahe genug bei α liegt.

Wir wenden die vorige Überlegung auf NEWTON-RAPHSON an:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$F(x_k)$

Ist das NEWTON-Verfahren ein Verfahren 1. oder 2. Ordnung?

$$F' = 1 - \frac{f'^2 - f''f}{f'^2} = \frac{f'^2 - f'^2 + f''f}{f'^2} = \frac{ff''}{f'^2}$$

Also: $F'(\alpha) = 0$, da $f(\alpha) = 0$. Somit ist das NEWTON-Verfahren ein Verfahren 2. Ordnung.

Unbeantwortet bleibt die Frage, was "nahe genug" bedeutet.

Nachtrag : warum divergiert das Verfahren I vom 3. Bsp.?

$$x = \underbrace{x^3 - 2x^2 + 1}_{F(x)} \quad \begin{aligned} F'(x) &= 3x^2 - 4x \\ F'(\alpha_1) &= -1,29 \\ F'(\alpha_2) &= 6,15 \\ F'(\alpha_3) &= 5,12 \end{aligned}$$

Also divergiert das Verfahren für jede der drei Nullstellen.

4. Bsp.: $x^5 - x - 0,2 = 0$

1. Iteration: $x_{k+1} = \sqrt[5]{x_k + 0,2}$ ergibt die Folge
 $\langle 1; 1,037; 1,043; 1,044; \dots \rangle$ konvergiert nach $\alpha_1 = 1,0447617$

2. Iteration: $x_{k+1} = x_k^5 - 0,2$ ergibt die Folge
 $\langle 0; -0,2; -0,2003; \dots \rangle$ konvergiert nach $\alpha_2 = -0,20032259$

3. Iteration: ("SUCHPROGRAMM")

Methode: Gehe mit Schrittweite Δx solange nach rechts, bis $\text{sgn}(f(x))$ wechselt. Dann wird Δx ersetzt durch $-\frac{\Delta x}{2}$.

Dann gehe mit neuem Δx solange nach links (höchstens zwei Schritte), bis $\text{sgn}(f(x))$ wechselt usw. Die Schrittlängen durchlaufen fast eine geometrische Folge. Das Verfahren konvergiert rasch.

wichtig: Sinnvolle
Schrittlängen und
sinnvoller Start-
punkt

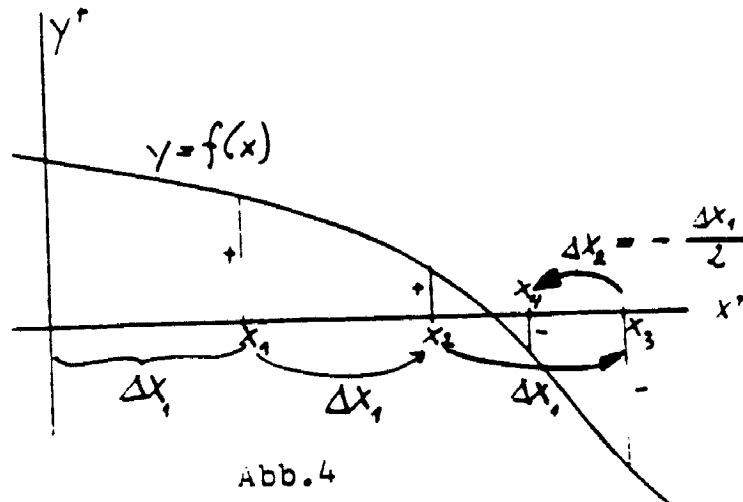


Abb.4

Anwendung des Suchprogramms auf unser Beispiel (mit $x_1 = -0,9$ und $x = 0,1$) liefert $\alpha_3 = -0,942086866$.

Somit: $x^5 - x - 0,2 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(Ax^2 + Bx + C)$

Die Polynomdivision liefert: $A=1$

$$B = -0,097647755$$

$$C = 1,014359448.$$

Daraus ergeben sich die beiden letzten Lösungen

$$\alpha_{4,5} = 0,046823878 \pm i \cdot 1,005970018.$$

4.) HERONSches Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel

$$3 = a_1$$

5.Bsp.: Berechnung von $\alpha = \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} = \text{GM}(3;4)$ $4 = b_1$

Das geometrische Mittel (GM) von 3 und 4 kann ich nicht berechnen, dafür aber das arithmetische Mittel (AM) $\frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$.

Bekanntlich gilt $\text{AM} \geq \text{GM}$. Also ist $\frac{7}{2}$ zu groß. Man berechnet

nun eine dazupassende linke Schranke, sodaß das geometrische Mittel von $\frac{7}{2} = b_2$ und a_2 wieder $\sqrt{12}$ ergibt $\Rightarrow a_2 \cdot b_2 = 12$

Also $a_2 = 12 : b_2 = 12 : \frac{7}{2} = \frac{24}{7}$. Es ergibt sich eine Intervallschachtelung für $\sqrt{12}$: $\left\langle \left[3; 4 \right]; \left[\frac{24}{7}; \frac{7}{2} \right]; \left[\frac{336}{97}; \frac{97}{23} \right]; \dots \right\rangle$

Noch einmal: Kurze Beschreibung des HERONSchen Verfahrens zur Berechnung von $\alpha = \sqrt{a_1 \cdot b_1} = \sqrt{c}$ $a_i, b_i \in \mathbb{Q}^+$

$$\left\langle [a_1; b_1]; [a_2; b_2]; \dots [a_k; b_k]; [a_{k+1}; b_{k+1}]; \dots \right\rangle$$

mit $b_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$

$$a_{k+1} = c : b_{k+1} = \frac{a_k \cdot b_k}{b_{k+1}} = \frac{2a_k b_k}{a_k + b_k}$$

1. Beh.: $a_{k+1} > a_k$

Vor.: $a_k < b_k$

Bew.: $\frac{2a_k b_k}{a_k + b_k} > a_k$

$$2b_k > a_k + b_k$$

$$b_k > a_k$$

(das ist die Voraussetzung)

ebenso: $b_{k+1} < b_k$ (Beweis leicht)

2. Beh.: Die Intervalllängen gehen nach 0

$$b_k - a_k = |I_k| = \text{Intervalllänge von } I_k$$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } |I_{k+1}| &= b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + b_k) - \frac{2a_k b_k}{a_k + b_k} = \frac{(a_k + b_k)^2 - 4a_k b_k}{2(a_k + b_k)} = \\ &= \frac{(a_k - b_k)^2}{2(a_k + b_k)} = \frac{(b_k - a_k)^2}{a_k + b_k} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wir betrachten den Quotienten von zwei aufeinanderfolgenden Intervalllängen (dahinter steht die Hoffnung, es könnte sich um eine GF handeln, ODER es könnte eine Majorante sichtbar werden).

$$\frac{|I_{k+1}|}{|I_k|} = \frac{\frac{(b_k - a_k)^2}{a_k + b_k} \cdot \frac{1}{2}}{b_k - a_k} = \frac{b_k - a_k}{a_k + b_k} \cdot \frac{1}{2}$$

Zahl < 1

Beh.: $\frac{b_k - a_k}{a_k + b_k} < 1$

$$b_k - a_k < a_k + b_k$$

$$-a_k < a_k \quad \text{O.k.}$$

Somit ist $\frac{|I_{k+1}|}{|I_k|} < \frac{1}{2}$. Also ist $\left\langle |I_1|, \frac{1}{2^{k+1}} \right\rangle$ eine Majorante.

Somit liegt eine rationalwertige Intervallschachtelung vor.

etwa

$$\begin{array}{l}
 x_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots \\
 x_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots \\
 x_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots \\
 \dots \dots \dots
 \end{array}
 \quad a_{ik} \in \{0; 1; \dots; 9\}$$

so lassen sich sofort Zahlen aus dem Intervall angeben, die in der Folge $\langle x_k \rangle$ nicht vorkommen: z.B. die Zahl $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ mit $b_1 \neq a_{11}$; $b_2 \neq a_{22}$; ... wid.
Also hat R eine größere Mächtigkeit als Q .

2. Klasseneinteilung von R : Sei $x \in R$

Def.: Eine Zahl x heißt algebraisch, wenn sie Nullstelle eines Polynoms $p(x)$ ist.

$$p(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0 \quad \text{mit } A_i \in Z$$

Satz: Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar. (!)

Bew.: Zum Beweis des Satzes benützen wir die Definition der HÖHE h eines Polynoms: $h = n + |A_n| + |A_{n-1}| + \dots + |A_0|$

Klar ist: Zu jeder Höhe gibt es nur endlich viele Polynome.

Z.B.: zur Höhe $h=4$ gibt es folgende Polynomgleichungen

$$\begin{array}{l}
 \pm x^3 = 0 \\
 \pm 2x^2 = 0 \quad \pm x^2 - x = 0 \quad \pm x^2 + 1 = 0 \\
 \pm 3x = 0 \quad \pm 2x + 1 = 0 \quad \pm x + 2 = 0
 \end{array}$$

weitere: Jedes Polynom n -ten Grades hat höchstens n verschiedene Nullstellen.

Man denke sich also zu jeder Höhe $h=2;3;4;\dots$ jeweils alle Polynome (die endlich vielen zu einer speziellen Höhe in beliebiger Reihenfolge), sowie zu jedem Polynom alle Nullstellen (wieder in beliebiger Reihenfolge) angeschrieben. Das ergibt eine Folge aller algebraischer Zahlen.

Bemerkenswerterweise vergrößert die Betrachtung aller Lösungen aller Polynomgleichungen $p(x)=0$ die Mächtigkeit der Menge aller Lösungen der Gleichung $A_1 x + A_0 = 0$ nicht!

($A_1, A_0 \in Z$) (Es handelt sich jedoch nicht um dieselbe Menge.)

Polynome (mit ganzzahligen Koeffizienten) vom Grad n haben höchstens n (reelle) Nullstellen.

Nicht-algebraische Zahlen heißen transzendent.

7.) Das arithmetische und das geometrische Mittel (AM;GM)

7.Bsp.: Gegeben sind zwei Punkte $A_1(2/1); A_2(7/5)$ und eine Folge $\langle a_k \rangle$ mit $\vec{CA}_{k+2} = \frac{1}{2}(\vec{CA}_k + \vec{CA}_{k+1})$..Halbierungspkt von $\overline{A_1A_2}$

Ges.: Grenzwert der Folge

Wir betrachten die Projektionen auf die x-Achse. Das ergibt die Folge $\langle a_k \rangle = \langle 2; 7; \frac{9}{2}; \dots \rangle$ mit $a_{k+2} = \frac{1}{2}(a_k + a_{k+1})$. Zur expliziten Darstellung benützen wir einen zweistufigen Ansatz:

$$\textcircled{1} \quad a_n = q^n$$

$$q^{n+2} = \frac{1}{2}(q^n + q^{n+1})$$

$$2q^2 = 1 + q$$

$$2q^2 - q - 1 = 0$$

Diese Gleichung hat die beiden Lösungen $q_1 = 1, q_2 = -\frac{1}{2}$.

$$\textcircled{2} \quad a_n = Aq_1^n + Bq_2^n$$

$$\left. \begin{array}{l} n=1: \quad 2 = A - \frac{1}{2}B \\ n=2: \quad 7 = A + \frac{1}{4}B \end{array} \right\} \text{ führt auf } A = \frac{16}{3} \quad \text{und} \quad B = \frac{20}{3}$$

Somit erhält man die explizite Darstellung

$\langle a_k \rangle = \left\langle \frac{16}{3} + \frac{20}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\rangle$, deren Limes sich sofort als $\frac{16}{3}$ erkennen läßt. Das ergibt somit den Limes der gegebenen Folge $\left(\frac{16}{3} / \frac{11}{3}\right)$.

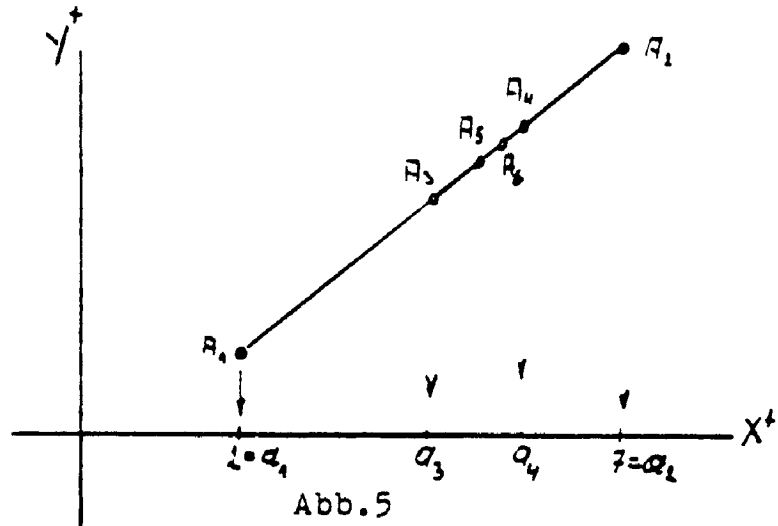


Abb.5

8.Bsp.: Gegeben ist die Folge $a_1=1; a_2=10$ und

$$a_{k+2} = \sqrt{a_k a_{k+1}}$$

Ges.: Limes

$$\langle a_k \rangle = \langle 1; 10; \sqrt{1 \cdot 10}; \sqrt{10 \sqrt{10}}; \dots \rangle$$

Wir betrachten die Folge der Exponenten von

$$\langle a_k \rangle = \langle 10^0; 10^1; 10^{\frac{1}{2}}; 10^{\frac{3}{4}}; \dots \rangle \quad \text{nämlich} \quad \langle e_n \rangle = \langle 0; 1; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \dots \rangle$$

mit dem Bildungsgesetz $e_1=0; e_2=1$ und $e_{n+2} = \frac{1}{2}(e_n + e_{n+1})$.
wieder führt der zweistufige Ansatz mit

- ① $e_n = q^n$ auf $q_1=1; q_2 = -\frac{1}{2}$
② $e_n = Aq_1^n + Bq_2^n$ auf $A = \frac{2}{3}$ und $B = \frac{4}{3}$.

Somit ergibt sich die Exponentenfolge $\langle e_n \rangle = \left\langle \frac{2}{3} \cdot 1^n + \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\rangle$,
deren Limes $\frac{2}{3}$ beträgt.

Damit ergibt sich der Limes der gegebenen Folge $\langle a_n \rangle$

mit $10^{\frac{2}{3}} = 4,6415..$

8.) Rekursive Doppelfolge zur Berechnung von π

Einem Kreis wird ein reguläres n -Eck derart eingeschrieben, daß der Umfang des n -Ecks gleich 1 ist. (z.B. ein Quadrat mit Seitenlänge $a_1 = \frac{1}{4}$)

Nächster Schritt: Man konstruiert ausgehend vom n -Eck ein reguläres $2n$ -Eck, das wieder Umfang 1 hat. (Das erfordert natürlich einen anderen Umkreisradius.) usw.

Wir erhalten eine Folge von regulären 2^n -Ecken (alle mit Umfang 1), deren Umfänge sich dem jeweiligen Kreisumfang immer mehr nähern. Im Grenzfall: $U = 2r\pi = 1$

$$r = \frac{1}{2\pi}$$

Interessant ist also die Folge der Radien der Umkreise der n -Ecke.

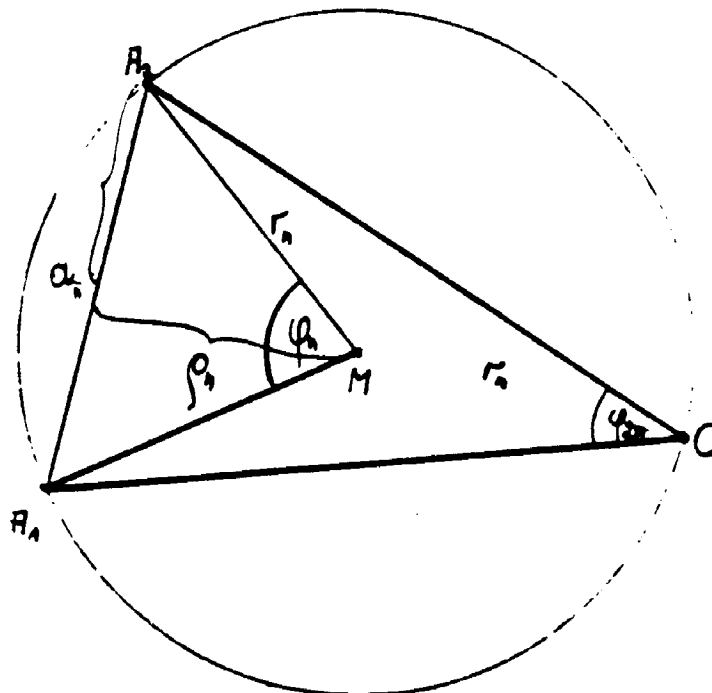


Abb.6

Sei a_n die Seitenlänge des regulären n -Ecks, sodaß $n \cdot a_n = 1$ ist.

φ_n sei der zugehörige Zentriwinkel. Damit ergibt sich nach dem Peripheriewinkelsatz $\varphi_{2n} = \frac{1}{2} \varphi_n$. Das Dreieck $A_1 A_2 C$ wird im Verhältnis 2:1 ver-

kleinert. (Das läßt den Umfang des $2n$ -Ecks wieder 1 werden.) Aus Abb. 7 sieht man

$$\rho_{2n} = \frac{\rho_n + r_n}{2}$$

Im Dreieck $A_1 A_2 M$ gilt:

$$\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + \rho_n^2 = r_n^2.$$

Im Dreieck $A_1 A_2 C$ gilt:

$$\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + (\rho_n + r_n)^2 = (2r_{2n})^2$$

$$r_n^2 - \rho_n^2 + \rho_n^2 + 2\rho_n r_n + r_n^2 = 4r_{2n}^2$$

$$2r_n(r_n + \rho_n) = 4r_{2n}^2$$

$$r_n \left[\frac{r_n + \rho_n}{2} \right] = r_{2n}^2$$

also:

$$r_n \cdot \rho_{2n} = r_{2n}^2$$

$$\text{oder: } r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot \rho_{2n}}$$

Somit erhalten wir zwei gekoppelte rekursive Folgen

$$\rho_{2n} = \frac{\rho_n + r_n}{2} \quad ; \quad r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot \rho_{2n}}$$

Startet man mit dem Quadrat ($a_1 = \frac{1}{4}$), so ist $\rho_1 = \frac{1}{8}$ und $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} = 0,1768$. Wir erhalten die beiden Folgen

$$\left\langle r_{2n} \right\rangle = \left\langle 0,1768; 0,1633; 0,1602; 0,1594; 0,1592; \dots \right\rangle$$

$$\left\langle \rho_{2n} \right\rangle = \left\langle 0,125; 0,1509; 0,1571; 0,1586; 0,1590; \dots \right\rangle$$

Beide Folgen konvergieren nach $0,159155$ (ein Näherungswert für $\frac{1}{2\sqrt{2}}$).

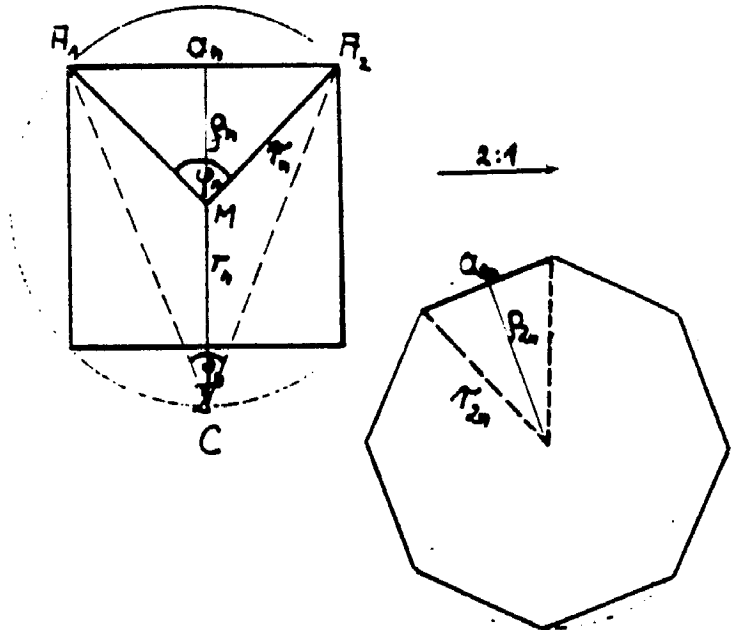


Abb. 7

9.) was heißt "nahe"?

9.Bsp.: $x^3 - 3x^2 - 6x + 6 = 0$ Eine Nullstelle liegt sicher im Intervall $[0; 1]$, da $f(0) = 6$ und $f(1) = -2$ ist.

Eine mögliche Rekursion z.B. ist $x_{k+1} = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 6) = \bar{r}(x)$.

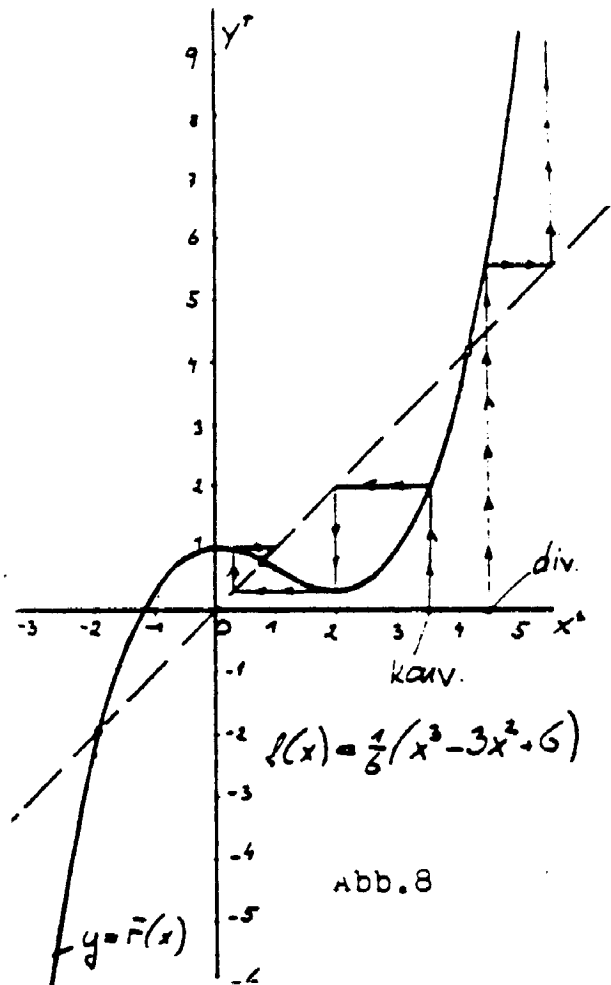
Mit verschiedenen Startzahlen ergeben sich die Folgen

- $\langle \underline{5}; 9,3; 93,0; 129527, \dots \rangle$ div.
- $\langle \underline{3}; 1; 0,67; 0,83; 0,75; \dots \rangle$ kon.
- $\langle \underline{4}; 3,67; 2,49; 0,48; 0,90; \dots \rangle$ kon.
- $\langle \underline{-2}; -2,33; -3,84; -15,80; \dots \rangle$ div.
- $\langle \underline{-1}; 0,33; 0,95; 0,69; 0,62; \dots \rangle$ kon.

Die Iteration ist eine Iteration 1. Ordnung und konvergiert

nur für Startwerte nahe dem Grenzwert α . Aus Abb.8 ist ersichtlich, daß für Startwerte zwischen den beiden äußeren Schnittpunkten mit der 1. Mediane die Iteration konvergiert und außerhalb divergiert (In der Abb. ist je ein konvergenter und ein divergenter Weg eingezeichnet.)

Der Limes der konvergenten Iterationen ist 0,77653792.



10.) Anwendungen Iterativer Methoden

10.Bsp.: Gesucht sind 4 Zahlen a, b, c, d , die folgenden Bedingungen genügen:

- I $a^2=b$
 II $a+b+c+d=1$
 III $4ab+c=d$
 IV $ab=cd$

wir gewinnen daraus eine Iteration der Form $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$

Die verbesserten Werte erhalten wir aus

- ① $b_{n+1}=a_n^2$
 ② $a_n+b_n+c_n+d_n=S$
 ③ $a_{n+1}=\frac{a_n}{S}$ ④ $b_{n+1}=\frac{b_n}{S}$ ⑤ $c_{n+1}=\frac{c_n}{S}$ ⑥ $d_{n+1}=\frac{d_n}{S}$
 ⑦ $d_{n+1}=4a_n b_n+c_n$
 ⑧ $a_{n+1}=\frac{c_n d_n}{b_n}$

Bemerkung: In den acht Punkten sind die "="-Zeichen im Sinne einer Zuweisung zu verstehen, etwa "wird belegt mit".

Nach jeweils einem Durchgang erhält man verbesserte Werte. (ausgehend von 4 Startzahlen z.B. $a=b=c=d=1$).

a_n	b_n	c_n	d_n
1	1	1	1
0,50	0,25	0,25	0,50
0,39	0,17	0,17	0,39
0,38	0,14	0,15	0,35
0,37	0,14	0,15	0,36
....
0,370	0,137	0,145	0,348

Das sind die Lösungszahlen (auf 3 Rkst.).

11.3sp.: Gesucht sind drei Zahlen x, y, z , die folgenden Bedingungen genügen:

$$\text{I} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$$

$$\text{II} \quad z = 2xy - 0,2$$

$$\text{III} \quad 3xz + y = 0,5$$

wieder geben wir eine Iteration für $(x_n \ y_n \ z_n)$ an.

Die Ungleichung I wird mittels der Schlupfvariablen t in die Gleichung I' $x^2 + y^2 + z^2 + |t| = 2$ übergeführt.

Verbesserte Werte erhalten wir aus

$$\textcircled{1} \quad S = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 + |t_n|$$

$$\textcircled{2} \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2\sqrt{S}} \quad \textcircled{3} \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{2\sqrt{S}} \quad \textcircled{4} \quad z_{n+1} = \frac{z_n}{2\sqrt{S}} \quad \textcircled{5} \quad t_{n+1} = \frac{t_n}{2\sqrt{S}}$$

$$\textcircled{6} \quad z_{n+1} = 2x_n y_n - 0,2$$

$$\textcircled{7} \quad y_{n+1} = 0,5 - 3x_n z_n$$

wieder sind die "="-Zeichen als Zuweisung -etwa "wird belegt mit"- zu verstehen.

Wir erhalten mit den Startwerten $x=y=z=1$ folgende Tabelle:

x_n	y_n	z_n
1	1	1
0,35	0,44	0,05
0,29	0,48	0,02
0,27	0,46	0,03
0,26	0,47	0,03
....
0,2488	0,4735	0,0355

Das ist ein mögliches Lösungstripel.

Es gibt noch andere Lösungstripel: $(0,2236 \ 0,4878 \ 0,0182)$; $(0,3536 \ 0,4069 \ 0,0877)$; ..

12. Bsp.: Wieder sind 4 Zahlen a, b, c, d gesucht mit den Eigenschaften

I $ac - bd = 0$

II $a^2c = b^2d$

III $a + b + c + d = 1$

1. iterative Auflösung: ① $a_{n+1} = \frac{b_n d_n}{c_n}$; ② $d_{n+1} = \frac{a_n^2 c_n}{b_n^2}$

③ $a_n + b_n + c_n + d_n = S$; ④ $a_{n+1} = \frac{a_n}{S}$; ⑤ $b_{n+1} = \frac{b_n}{S}$;

⑥ $c_{n+1} = \frac{c_n}{S}$; ⑦ $d_{n+1} = \frac{d_n}{S}$;

a	b	c	d
1	1	1	1
0,25	0,25	0,25	0,25
stabil			

a	b	c	d
1	-2	3	-4
0,29	-0,22	0,33	0,59
-0,51	-0,29	0,43	1,37
-0,26	-0,08	0,22	1,22
.....
0	0	0	1
stabil			

2. iterative Auflösung: ① $c_{n+1} = \frac{b_n d_n}{a_n}$; ② $a_n + b_n + c_n + d_n = S$;

③ $a_{n+1} = \frac{a_n}{S}$; usw. ⑦ $a_{n+1} = \sqrt{\frac{b_n^2 d_n}{c_n}}$;

a	b	c	d
1	1	1	1
0,25	0,25	0,25	0,25
stabil			

a	b	c	d
1	2	3	4
0,09	0,13	0,53	0,27
0,13	0,15	0,43	0,31
0,15	0,16	0,38	0,32
.....
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

11.) Anwendung auf ein Integral

13. Bsp.: $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \cdot \sin x \, dx =$

$u = \sin^{2n} x \qquad v = -\cos x$
 $du = 2n \cdot \sin^{2n-1} x \cdot \cos x; \, dv = \sin x \, dx$

partiell: $\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$= -\sin^{2n} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot 2n \cdot \sin^{2n-1} x \cdot \cos x \, dx =$

$= -\cos x \cdot \sin^{2n} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^{2n-1} x \, dx =$

$= -\cos x \cdot \sin^{2n} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{2n-1} x \, dx =$

$= 0 + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx - 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx$

somit $(1+2n) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2n}{1+2n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \, dx$

nochmalige Anwendung der partiellen Integration führt auf:

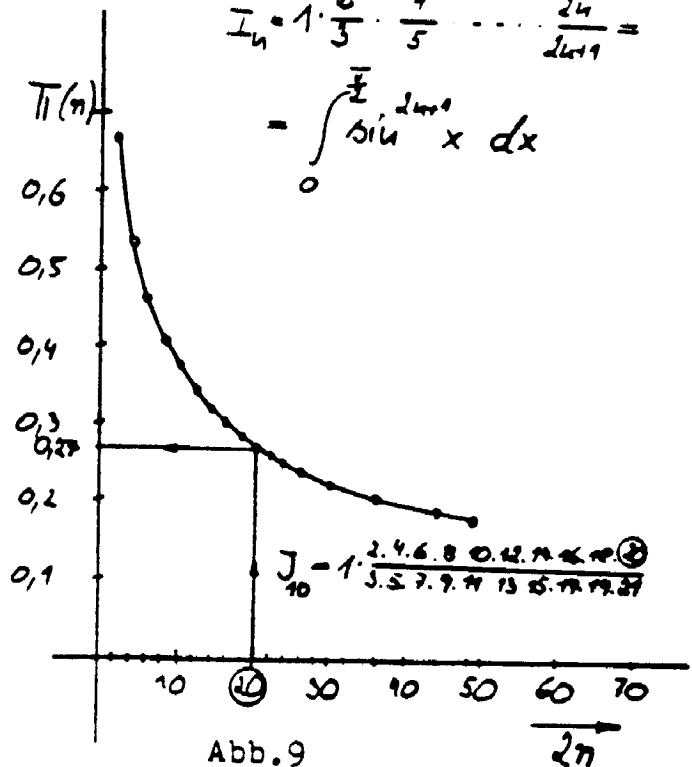
$I_n = \frac{2n}{1+2n} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-3} x \, dx = \text{usw.} = \frac{2n}{1+2n} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \dots \frac{2}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n}{2n+1} = \overline{\Pi}(n)$

Das ergibt die Tabelle:

n	$\overline{\Pi}(n)$
1	0,6667
2	0,5333
3	0,4571
4	0,4063
...	...
50	0,1244
500	0,0396
5000	0,012532
10000	0,008862

$I_n = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n}{2n+1} =$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx$



Bem.: Die Tabelle gibt Anlaß zur Vermutung, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sin^{2n+1} x \, dx = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} \cdots = 0$$

Begründung: Der Grenzgraph des Integranden (für $n \rightarrow \infty$) ist konstant 0 mit Ausnahme an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ ($f(\frac{\pi}{2}) = 1$) und somit der Wert des Integrals gleich 0.

Beachte: Die Trägerkurve des Graphen der Funktion $f: n \rightarrow \overline{\mathbb{I}}(n)$ wurde nicht in Gleichungsform angegeben.

12.) Kurzer Intelligenztest

Gib das nächste Glied der Folge durch Ankreuzen an:

Musterbeispiel: $\langle 2; 4; 6; \dots \rangle$

4	8	10	-7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Beispiel: $\langle 1; 2; 3; \dots \rangle$

7	5	4	-2
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

In allen drei Fällen sei $a_1 = 1; a_2 = 2$.

c) $\overline{-2}$ ergibt sich aus der rekursiven Folge $a^{n+2} = 5a^{n+1} - 13a^n$

b) $\overline{5}$ ergibt sich aus der rekursiven Folge $a^{n+2} = a^{n+1} + 1$

a) $\overline{7}$ ergibt sich aus der rekursiven Folge $a^{n+2} = 5a^n - a^{n+1}$

Lösung: Bemerkenswerterweise sind mehrere Lösungen richtig: