Algebra - Auflösen von Gleichungen

Franz Halter-Koch (Graz)

1.

Im Algebraunterricht der AHS werden im wesentlichen 3 Themenkreise behandelt:

- "Buchstabenrechnen" ("Operieren mit Termen");
- "Zahlbereiche" (von $\mathbb{N}$ über $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}_+$ zu $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$);
- "Auflösen von Gleichungen".

Im folgenden werden einige Aspekte der Gleichungsauflösung im Schulunterricht diskutiert. Dabei werden bewußt alle Fragen des Operierens mit Termen ausgeklammert und Zahlbereichserweiterungen nur insofern behandelt, als sie unmittelbar mit dem Auflösen von Gleichungen zusammenhängen. Es wird auch nicht versucht, zusammenhängende Unterrichtssequenzen darzustellen; viele der angesprochenen Aspekte können (und müssen!) auf verschiedenen Niveaus thematisiert werden.

2.

Durch den Einzug der Mengenlehre in der Schulmathematik ist auch das Lösen einfachster Gleichungen mengentheoretisch formalisiert worden und stellt sich häufig so dar: Gegeben sind eine Grundmenge und eine Aussonderungsvorschrift (Gleichung oder Ungleichung) mit einer eigenen Definitionsmenge; gesucht sind jene gemeinsamen Elemente von Grundmenge und Definitionsmenge, welche der Aussonderungsvorschrift genügen: Sie bilden die Lösungsmenge. Wie schwierig die Einordnung einer etwas komplexeren Aufgabe in dieses Schema ist, mag das Beispiel der Gleichung

$$2ax - \frac{a-1}{x} = 0$$

zeigen. Zwar ist es keine allzu große Kunst (die in der 6. Klasse der AHS beherrscht werden sollte!), diese Gleichung nach a bzw. nach x aufzulösen und Art und Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit des Parameter x bzw. a zu diskutieren; man kann auch die durch die Gleichung definierte reelle Kurve zeichnen und diskutieren (Tangenten, Asymptoten usw.). Dagegen macht die Einordnung der Gleichung in obiges Grund-, Definitions- und Lösungsmengenschema erhebliche Schwierigkeiten; sie fördert die Lösung nicht, sondern hemmt sie. Im folgenden Abschnitt werde ich an drei einfachen Sachaufgaben zu linearen Gleichungen in einer Unbekannten zeigen, zu welchen Schwierigkeiten die Festlegung einer (mathematisch unvernünftigen) Grundmenge vor Beginn der Rechnung führen kann.

3.

Die drei folgenden Beispiele sind zugegebenermaßen weder besonders originell noch besonders interessant; aber es sind typische Schulbuchbeispiele, wie sie landauf, landab mit mehr oder weniger Verständnis in Hunderten von Schulklassen gerechnet werden.

1. In einer Schulklasse sind doppelt so viele Knaben wie Mädchen; diese Schulklasse besetzt in einem Autobus gemeinsam mit ihrem Klassenvorstand a $(\in \mathbb{N})$ Plätze. Wie viele Mädchen waren in der Klasse?

2. Marktverkauf roter und schwarzer Ribisel: In einem Bottich sind doppelt so viele rote wie schwarze Ribisel, das Eigengewicht des Bottichs beträgt 1 kg, das Gesamtgewicht beträgt a kg $(a \in \frac{1}{10}\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, da sicher nicht genauer als bis auf dag gewogen wird). Wieviel schwarze Ribisel sind in dem Bottich?

3. Ein Abtransport von Zuckerrüben erfolgt mit einem größeren und einem kleineren LKW; bei Einsatz nur eines der beiden LKWs müßte der größere a-mal, der kleinere b-mal $(a,b \in \mathbb{N}, \ a < b)$ fahren; nun fahren (aus Gründen der Organisation des Be- und

Entladens) beide gleich oft; wie oft?

Die ersten beiden Beispiele sind durch die Gleichung $3x + 1 = a$ zu lösen, welche genau im Falle $a \equiv 1 \mod 3$ eine Lösung in $\mathbb{N}$, aber stets eine Lösung in $\mathbb{Q}$ besitzt, welche man mit dem üblichen Algorithmus berechnen kann; hinterher kann man dann nachschauen, was diese Lösung für die gestellte Aufgabe bedeutet. Würde man sich im ersten Beispiel von vornherein auf $\mathbb{N}$ als Grundmenge zurückziehen, so benötige man ein Verfahren zur Auflösung von Gleichungen in $\mathbb{N}$ (in diesem Beispiel natürlich trivial, aber im allgemeinen - siehe diophantische Probleme - äußerst schwierig) und würde darüber hinaus auf Information verzichten, welche eine nicht in $\mathbb{N}$ liegende Lösung der Gleichung für das Problem liefert ("Aufgabenstellung falsch", "Da hat sich einer verzählt, wahrscheinlich waren es $[\frac{a}{3}]$ " usw.).

Das zweite Beispiel führt auf dieselbe Gleichung, die Lösung ist eine rationale Zahl, aber der Informationsgehalt der rationalen Zahl für das konkrete Problem ist zu hoch, da man im allgemeinen nur an der der rationalen Zahl am nächsten liegenden Zahl aus $\frac{1}{10} \cdot \mathbb{N}$ interessiert sein wird.

In der dritten Aufgabe ist wieder eine Lösung in $\mathbb{N}$ gesucht, aber nur bei sehr speziellen Parametern hat die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$, welche das Problem beschreibt, eine Lösung in $\mathbb{N}$; nun erheischt die Aufgabe aber in jedem Fall eine Antwort und man muß zusehen, wie man aus der Lösung $x \in \mathbb{Q}$ in vernünftiger Weise eine ganzzahlige Antwort ableitet (etwa $[x] + 1$, falls $x - [x] \geq \varepsilon$, und $[x]$ sonst, wobei ε eine gewisse Toleranzgröße ist, über die noch diskutiert werden müßte).

Diese drei Beispiele zeigen, daß eine rationale Zahl als Lösung einer Gleichung in verschiedenen Realsituationen verschieden zu interpretieren ist und Verschiedenes besagen kann. Der Grund, sich für die mathematische Behandlung von linearen Gleichungen bei Sachaufgaben auf $\mathbb{Q}$ als Grundmenge für die Rechnung zurückzuziehen, ist folgender:

$\mathbb{Q}$ ist ein Körper; in $\mathbb{Q}$ ist jede Gleichung der Form $ax + b = c$ mit $a,b,c \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, eindeutig lösbar; das Operieren mit Termen wird über Körpern geübt.

4.

Für Gleichungen höheren Grades ist $\mathbb{Q}$ als Grundmenge nicht mehr geeignet; bekanntlich hat bereits $x^2 = 2$ keine Lösung in $\mathbb{Q}$, und viele Beispiele aus Wirtschaft und Technik führen auf algebraische Gleichungen, für die das Problem eine Lösung verlangt, die aber keine Lösung in $\mathbb{Q}$ haben. Was tut ein Taschenrechner, wenn er $\sqrt{2}$ ausrechnet? Er bestimmt eine rationale Zahl z derart, daß z^2 und 2 sich um weniger als die Rechengenauigkeit des Rechners unterscheiden, d. h. $|z^2 - 2| < \varepsilon$, wobei ε eine dem Rechner eigene Strukturkonstante ist. Für die praktische Berechnung besteht nach der Existenz einer reellen Zahl, welche eine Gleichung löst, kein Bedürfnis; diese ist ein theoretisches Konstrukt, welches es erlaubt, in einfacher Weise über die (nun existierende) Lösung zu reden und weitere Manipulationen an ihr vorzunehmen. Diese reelle Zahl kann man natürlich wieder nicht "ausrechnen", sondern nur beliebig genau durch rationale Zahlen annähern (etwa durch eine Dezimalbruchentwicklung). An dieser Stelle hat ein wesentlicher Standpunktwechsel stattgefunden: Während man zunächst anstelle einer (in $\mathbb{Q}$ unlösbaren) Gleichung $f(x) = 0$ eine nähernde Ungleichung $|f(x)| < \varepsilon$ in $\mathbb{Q}$ gelöst hat, geht man nach dem Standpunktwechsel von der Existenz eines ξ mit $f(\xi) = 0$ aus und approximiert dieses ξ durch rationale Zahlen, etwa zu $|x - \xi| < \delta$.

Die Bedeutung der reellen Zahlen für die Gleichungsauflösung liegt in der folgenden Existenzaussage, welche nicht der Algebra, sondern der Reellen Analysis angehört:

Zwischenwertsatz für stetige Funktionen [ZWS]: Eine stete Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a < b)$ mit $f(a)f(b) \leq 0$ hat mindestens eine Nullstelle $x \in [a,b]$.

5.

[ZWS] erlaubt (insbesondere bei Zuhilfenahme eines programmierbaren Taschenrechners) schon sehr schnell die Berechnung guter Näherungslösungen für Gleichungen höheren Grades. So sieht man etwa bei der Gleichung

$$x^3 - 6x + 2 = 0$$

an einer einfachen Skizze, daß je eine reelle Nullstelle in den Bereichen $2 < x_1 < 3$, $0 < x_2 < 1$ und $-3 < x_3 < -2$ liegt, und mit Hilfe des Halbierungsverfahrens kann man diese Nullstellen in n Schritten mit einer Genauigkeit von 2^{-n} approximieren. Schneller geht es natürlich mit dem Newton-Verfahren (bei welchem man aber aufpassen muß: Es ist ein lokales Verfahren mit Anziehungs- und Abstoßungsbereichen).

Die oben angeführte Gleichung 3. Grades gestattet eine "geschlossene" Lösung mit Hilfe der sogenannten Formeln von Cardano: Man setzt $u = \sqrt[3]{-1+\sqrt{-7}}$, $\rho = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ und findet $\{x_1, x_2, x_3\} = \{2\,\mathrm{Re}(u), 2\,\mathrm{Re}(\rho u), 2\,\mathrm{Re}(\rho^2 u)\}$. Diese Lösungsformel verwendet komplexe Zahlen $(\sqrt{-7}, \sqrt{-3})$ und muß als der historische Anlaß für die Einführung der komplexen Zahlen angesehen werden. Man beachte, daß es sich hier um ein im Reellen gestelltes Problem mit 3 reellen Lösungen handelt, welche aber zu ihrer Darstellung mittels Wurzelzeichen komplexer Zahlen bedürfen. Mit Hilfe galoistheoretischer Methoden kann man sogar nachweisen, daß eine Darstellung der Lösungen mit rein reellen Wurzelausdrücken nicht möglich ist.

Für die praktische Berechnung bzw. Approximation der Lösungen obiger Gleichung hat man durch die Formeln von Cardano nichts gewonnen; durch sie wurde das Problem nur auf das der Berechnung der Kubikwurzel aus einer komplexen Zahl zurückgeführt, und letzteres ist sicher nicht einfacher! Diese Überlegung gilt mutatis mutandis für alle Formeln zur Auflösung von Gleichungen, insbesondere auch für die im Unterricht so beliebte Lösungsformel für quadratische Gleichungen: Hier wird üblicherweise eine nur in einem Sonderfall funktionierende Sondermethode mit besonderer Hartnäckigkeit trainiert!

6.

Die Bedeutung der komplexen Zahlen für die Auflösung algebraischer Gleichungen liegt in dem bekannten Fundamentalsatz der Algebra, dessen Beweis üblicherweise mit analytischen Methoden geführt wird (das ist nur natürlich, denn $\mathbb{C}$ besitzt neben der algebraischen eine topologische Struktur, und erst beide gemeinsam machen die Bedeutung von $\mathbb{C}$ aus).

Fundamentalsatz der Algebra. Über $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o = a_n \cdot (x-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n) \qquad (a_n \neq 0).$$

Aus dieser Formulierung des Fundamentalsatzes kann man leicht den Wurzelsatz von Vieta herleiten; durch sie wird auch die Definition der Vielfachheit einer Nullstelle nahegelegt sowie der Satz, daß ein Polynom genauso viele Nullstellen besitzt wie sein Grad angibt, wenn man nur jede Nullstelle "mit ihrer Vielfachheit zählt" (besser: sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ die paarweise verschiedenen Nullstellen eines Polynoms n-ten Grades mit Vielfachheit

$V(\alpha_1), \ldots, V(\alpha_r)$, so folgt $n = \sum_{i=1}^{r} V(\alpha_i)$).

Auch wenn man nur an den reellen Nullstellen eines Polynoms interessiert ist, liefert erst die Einführung der komplexen Zahlen das richtige Instrumentarium zum Verständnis des Zusammenhangs zwischen Grad, Koeffizienten und Nullstellen eines Polynoms. Der Fundamentalsatz der Algebra zeigt, daß $\mathbb{C}$ die mathematisch richtige Grundmenge für die Behandlung algebraischer Gleichungen höheren Grades ist.

7.

Die in den Cardano'schen Formeln auftretenden Kubikwurzeln aus komplexen Zahlen sind mit besonerer Vorsicht zu behandeln. Für $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ hat die Gleichung $x^n = a$ in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen und das Symbol $\sqrt[n]{a}$ steht in der Regel für irgendeine dieser n Lösungen. Im Falle $a \in \mathbb{R}_+$ kann man bekanntlich Eindeutigkeit durch die Normierung $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}_+$ erreichen, und in diesem Bereich gelten dann alle üblichen Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln; verwendet man aber das Zeichen $\sqrt[n]{a}$ auch für $a \notin \mathbb{R}_+$ und versteht man darunter eine in irgendeiner Weise normierte Lösung von $x^n = a$, so muß man auf die Verwendung der gewohnten Rechenregeln verzichten, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen:

$$\sqrt{6} = \sqrt{(-2)\cdot(-3)} = \sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3} = i\sqrt{2}\cdot i\sqrt{3} = -\sqrt{6}\ ;$$

$$-3 = \sqrt[3]{-27} = (-27)^{1/3} = (-27)^{2/6} = \sqrt[6]{729} = 3\ .$$

Aus diesem Grunde erläßt man gern die Vorschrift: "Nur aus positiven Zahlen darf man Wurzeln ziehen."

Die Bestimmung aller Lösungen der Gleichung $x^n = a$ in $\mathbb{C}$ ist ein schönes Beispiel für die Formeln von Moivre, welche in wunderbarer Weise den Zusammenhang zwischen Trigonometrie und komplexen Zahlen aufzeigen und neben dem Fundamentalsatz der Algebra den Hauptgrund dafür bilden, daß die komplexen Zahlen im Unterricht nicht fehlen sollten: Setzt man $a = r\cdot(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ $(r > 0,\ 0 \le \Theta < 2\pi$ oder $-\pi < \Theta \le \pi$ - es ist gleichgültig, wie man normiert), so sind die n Lösungen der Gleichung $x^n = a$ gegeben durch $x_k = \sqrt[n]{r}\cdot(\cos\frac{\Theta+2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\Theta+2k\pi}{n})$ $(k = 0,\ldots,n-1)$.

Die Mehrdeutigkeit des Wurzelzeichens ist insbesondere bei der Behandlung von Wurzelgleichungen zu berücksichtigen. Ein typisches Beispiel, etwa die Gleichung

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = 2\cdot\sqrt{3x-1}\ ,$$

muß entweder so behandelt werden, daß man von vornherein fordert, daß alle unter dem Wurzelzeichen auftretenden Zahlen positiv sein sollen; oder aber man muß der Unabhängigkeit der Normierung der Wurzeln Rechnung tragen und die Gleichung in der Form

$\alpha^2 = x-1$, $\beta^2 = 2x-1$, $\gamma^2 = 3x-1$, $\alpha+\beta = 2\gamma$
schreiben. Nur: Wozu behandelt man überhaupt Wurzelgleichungen? (Für Exponentialgleichungen ist das schon wieder etwas anderes: Diese spielen in der Rentenrechnung und bei Tilgungsplänen eine Rolle.)

8.

Die bisherigen Überlegungen bezogen sich auf Gleichungen mit nur endlich vielen Lösungen in der maximalen mathematisch vernünftigen Grundmenge (etwa $\mathbb{C}$); in solchen Fällen ist es unnötig, von Lösungsmengen zu sprechen - es verkompliziert nur die Sprache und trägt nicht zur Klärung der Situation bei.

Im Falle von Gleichungen in mehreren Unbekannten - insbesondere im Zusammenhang mit geometrischen Deutungen - ist der Begriff der Lösungsmenge sinnvoll. So ist etwa die Lösungsmenge einer Linearen Gleichung über $\mathbb{R}$

$$ax + by = c$$

in 2 Unbekannten x, y eine Punktmenge des $\mathbb{R}^2$, und zwar entweder ganz $\mathbb{R}^2$, eine Gerade des $\mathbb{R}^2$ oder leer, je nachdem $(a,b,c) = (0,0,0)$, $(a,b) \neq (0,0)$ oder $(a,b) = (0,0)$, $c \neq 0$. Damit ist es dann einfach, die geometrische Struktur der Lösungsmenge von 2 linearen Gleichungen in 2 Unbekannten zu beschreiben: Sie ist von der Form $L = L_1 \cap L_2$, wobei L_1 und L_2 je entweder ganz $\mathbb{R}^2$, eine Gerade oder leer sind, d. h.: $L = \mathbb{R}^2$, eine Gerade, ein Punkt oder leer.

Erheblich komplizierter wird die Situation, wenn man an Stelle zweier linearer Gleichungen zwei algebraische Gleichungen höheren Grades betrachtet; die Lösungsmenge ist wieder als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ geometrisch interpretierbar und zwar im einfachsten Fall als Schnittgebilde aus einem Kegelschnitt und einer Geraden oder aus 2 Kegelschnitten. Die intuitive Grundidee, wonach ein Gleichungssystem

$f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$,

f, g Polynome der Grade $d, e \geq 1$

$d \cdot e$ Lösungen hat, erweist sich als richtig, falls man

- sich auf irreduzible Polynome beschränkt, die voneinander "unabhängig" sind
- die Ebene projektiv und komplex erweitert, also die Gebilde im $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ untersucht
- den Begriff der Vielfachheit der Lösungen geeignet definiert

(Satz von Bezout).