R E I H E N E N T W I C K L U N G E N

F. Schweiger und H. Stegbuchner
(Salzburg)

1. Lineare Approximation

Eine Möglichkeit, Differentialrechnung zu interpretieren, ist die Idee der linearen Approximation. Üblicherweise definiert man die (erste Ableitung) durch

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

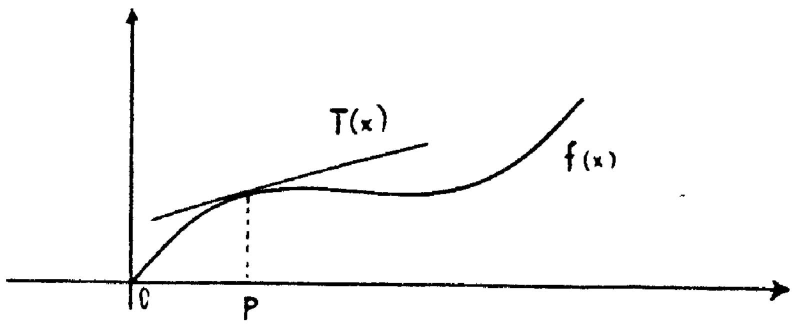
Dies bedeutet, daß für alle Punkte x, die genügend nahe bei p liegen, gilt

$$f'(p) \sim \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$$

oder

$$f(x) \sim f(p) + f'(p)\,(x-p).$$

Geometrisch ausgedrückt: Die Funktion f wird in der Nähe von p näherungsweise durch die Tangente T,



$T(x) = f(p) + f'(p)\,(x-p)$, beschrieben.

Schreibt man

$$f(x) - f(p) \sim f'(p)\,(x-p),$$

so kann diese lineare Approximation auch so interpretiert werden:

Das Intervall $I = [p,x]$ (oder $[x,p]$) wird näherungsweise auf das Intervall $f(I)$ und die Länge des Bildintervalls $f(I)$ ist ungefähr $|f'(p)|$ mal der Länge des Intervalls I. Man deutet $f'(p)$ als Verzerrungsfaktor. Eine andere Deutung ist folgende: Ist x ein Näherungswert von p, so ist $f(x)$ ein Näherungswert von $f(p)$ und der absolute Fehler $|f(x) - f(p)|$ ist ungefähr $|f'(p)|$ mal dem absoluten Fehler $|x-p|$. Diese Interpretation wird in der Fehlerrechnung genützt.

Aufgaben hiezu:

(1.1) Es wird die Kantenlänge eines Würfels gemessen und das Volumen daraus berechnet. Statt des genauen Wertes p = 2,00 mißt man 2,01. Wie groß ist der ungefähre Fehler für das Volumen?

Lösung:

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^2$$
$$f(x) - f(p) \sim 3p^2 (x-p)$$
$$x^3 - p^3 \sim 3p^2 (x-p)$$
$$x^3 - 8{,}00 \sim 12{,}00 \cdot 0{,}01 = 0{,}12$$

(1.2) Berechne einen Näherungswert für $\sqrt{26}$!

Lösung:

$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Da $\sqrt{25} = 5$, nimmt man p = 25 und erhält:

$$\sqrt{26} - 5 \sim \frac{1}{10} (26-25)$$

$$\sqrt{26} \sim 5{,}1$$

2. Exkurs: Wiedergewinnung der Differentiationsregeln.

Rechnet man mit linearen Approximationen, so kann man folgende Vereinbarung treffen: Wendet man eine Grundrechnungsart an und entstehen dabei Glieder höherer Ordnung (als lineare), so werden diese nicht berücksichtigt! Diese Vereinbarung ist völlig analog zur Vereinbarung etwa über eine feste Zahl von Nachkommastellen.

(2.1) Diese Vereinbarung kann zur besseren Einsicht in die Differentiationsregeln dienen:

$$f(x) \sim f(p) + f'(p)\,(x-p)$$

$$g(x) \sim g(p) + g'(p)\,(x-p)$$

Dann ist etwa

$$f(x) + g(x) \sim f(p) + g(p) + (f'(p) + g'(p))\,(x-p)$$

$$f(x)g(x) \sim f(p)\cdot g(p) + (f(p)g'(p) + f'(p)g(p))\,(x-p)$$

Also ist

$$(f+g)'\,(p) = f'(p) + g'(p)$$

$$(fg)'(p) = f(p)g'(p) + f'(p)g(p)$$

(2.2) Da $(1-x)\,(1+x) = 1-x^2 \sim 1$ für kleines x, gilt

$$\frac{1}{1+x} \sim 1 - x$$

Dann ist

$$\frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{f(p)+f'(p)(x-p)} = \frac{1}{f(p)} \cdot \frac{1}{1+\frac{f'(p)}{f(p)}\,(x-p)}$$

$$\sim \frac{1}{f(p)}\,\left(1 - \frac{f'(p)}{f(p)}\,(x-p)\right) = \frac{1}{f(p)} - \frac{f'(p)}{f^2(p)}\,(x-p)$$

Dies illustriert

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(p) = -\frac{f'(p)}{f^2(p)}$$

(2.3) Sei weiters $\sqrt{1+x} \sim 1 + a_1 x$ mit der (noch unbekannt gedachten) Ableitung a_1. Dann ist

$$1 + x \sim 1 + 2a_1 x$$

Also ist $\quad a_1 = \frac{1}{2}$.

Ebenso: $\quad \sqrt[3]{1+x} \sim 1 + a_1 x$ ergibt $1 + x \sim 1 + 3a_1 x$,

also $\quad a_1 = \frac{1}{3}$.

Weitere Aufgaben hiezu:

(2.4) Begründe die Kettenregel mittels linearer Approximation!

Lösung: $f(x) \sim f(p) + f'(p)\,(x-p)$

$$g(y) \sim g(f(p)) + g'(f(p))\,(y-f(p))$$

Dann ist

$$\begin{aligned} g(f(x)) &\sim g(f(p)) + g'(f(p))\,(f(x) - f(p)) \\ &\sim g(f(p)) + g'(f(p))\,f'(p)\,(x-p) \end{aligned}$$

Also ist

$$(f \circ g)'(p) = g'(f(p))\,f'(p).$$

(2.5) Berechne die Ableitung von $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ im Punkt $p = 0$.

Lösung: $\quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim 1 + a_1 x$

Quadrieren: $\quad \frac{1}{1+x} \sim 1 + 2a_1 x$

Mulitiplikation mit $1 + x$;

$$1 \sim 1 + (2a_1+1)x$$

Daher ist $\quad 2a_1 + 1 = 0, \quad$ d.h. $a_1 = -\frac{1}{2}$.

(2.6) Berechne die Ableitung von $x \to \frac{1-x}{1+x}$ im Punkt $p = 2$.

Lösung: $\frac{1-x}{1+x} = \frac{-1-(x-2)}{3+x-2} \sim -\frac{1}{3} + a_1(x-2)$

$$-3 - 3\,(x-2) \sim -3 - (x-2) + 9a_1(x-2)$$

$$a_1 = -\frac{2}{9}$$

(2.7) Berechne die Ableitung von $x \mapsto x^3 - x$ im Punkt $x = 1$.

Lösung: $x^3 - x = (1+(x-1))^3 - (1-(x-1))$

$$\sim 1 + 3(x-1) - 1 - (x-1) =$$

$$= 2\,(x-1)$$

<u>Bemerkung:</u> In den Aufgaben (2.6) und (2.7) wird bewußt die für die <u>Taylorentwicklung</u> eines Polynoms wichtige Umformung $x = x - p + p$ verwendet und keine Regel der Differentialrechnung!

3. Approximation durch quadratische Polynome

Die Darstellung

$$f(x) \sim f(p) + a_1(x-p)$$

legt es nahe, eine genauere Approximation in der Form

$$f(x) \sim f(p) + a_1(x-p) + a_2(x-p)^2$$

zu versuchen. In vielen Fällen kann man diese Darstellung ohne Differentialrechnung gewinnen, wenn man folgende neue Vereinbarung trifft:
Wendet man eine Grundrechnungsart an und entstehen dabei Glieder höherer Ordnung als quadratische, so werden diese nicht berücksichtigt, d.h. weggelassen.

(3.1) Wir beginnen mit $\sqrt{1+x} \sim 1 + a_1 x + a_2 x^2$

Quadrieren! $1 + x \sim 1 + 2a_1 x + 2a_2 x^2 + a_1^2 x^2$

Also ist $\quad 1 = 2a_1$

$$0 = 2a_2 + a_1^2$$

Dies ergibt $\quad a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{8}$.

Natürlich ist es zweckmäßiger, Aufgabe (2.3) zu verwenden und

$$\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2} + a_2 x^2$$

anzusetzen!
Wir wenden dies nochmals auf $\sqrt{26}$ (Aufgabe (1.3)) an:

$$\sqrt{26} = 5\sqrt{1+\frac{1}{25}} \sim 5\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{25} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{25^2}\right) = 5{,}099$$

Der TI-30 liefert $\sqrt{26} = 5{,}0990195$.

(3.2) $$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \sim 1 - \frac{x}{2} + a_2x^2$$

Quadrieren!

$$\frac{1}{1+x} \sim 1 + \frac{x^2}{4} - x + 2a_2x^2$$

$$1 \sim 1 + \frac{x^2}{4} - x + 2a_2x^2 + x - x^2$$

$$= 1 + (-\frac{3}{4} + 2a_2)\ x^2$$

Daher ist $a_2 = -\frac{3}{8}$.

Sei nun allgemeiner $f(x) \sim f(p) + a_1(x-p) + a_2(x-p)^2$.
Wir brauchen eine Vereinbarung, die es ermöglicht, a_1 und a_2 zu bestimmen. Unsere Vereinbarung ist: Die quadratische Approximation soll für die Ableitungsfunktion eine lineare Approximation liefern! Aus

$$f(x) \sim f(p) + a_1(x-p) + a_2(x-p)^2$$

folge

$$f'(x) \sim a_1 + 2a_2\ (x-p)$$

Daher ist einerseits erneut $a_1 = f'(p)$ und weiters

$$a_2 = \frac{f''(p)}{2}\ .$$

Aufgaben:
(3.3)
Man gebe eine quadratische Approximation für $f(x) = x^3 - 2x + 1$ im Punkt $p = -1$ an.

Lösung: Erster Weg durch Differentialrechnung!

$$f(x) = x^3 - 2x + 1, \qquad f(-1) = 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \qquad f'(-1) = 1$$

$$f''(x) = 6x, \qquad f''(-1) = -6$$

Daher $f(x) \sim 2 + (x+1) - 3(x+1)^2$

Zweiter Weg durch Entwicklung von x!

$$x^3 - 2x + 1 = ((x+1)-1)^3 - 2\,((x+1)-1)+1$$

$$= (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1 - 2(x+1) + 3$$

$$\sim 2 + (x+1) - 3(x+1)^2$$

(3.4) Man gebe eine quadratische Approximation für $f(x) = \ln x$ im Punkt $p = 1$ an.

Lösung: $f(x) = \ln x,\qquad f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x},\qquad f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2},\qquad f''(1) = -1$

Also

$$\ln x \sim (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

Man nehme $x = 1{,}01$ und erhält

$$\ln 1{,}01 \sim 0{,}01 - \frac{0{,}01^2}{2} = 0{,}00995$$

Der TI - 30 liefert

$$\ln 1{,}01 = 0{,}00995033$$

Hinsweis: Benutzt man Integralrechnung so auch folgende Lösung möglich:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} \sim 1 - (x-1)$$

$$\ln z = \int_1^z \frac{dx}{x} \sim \int_1^z (1-(x-1)\,dx = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2}$$

4. Approximation durch Polynome höherer Ordnung

Hier geht es um eine Approximation der Form

$$f(x) \sim f(p) + a_1(x-p) + a_2(x-p) + \ldots + a_n(x-p)^n$$

Die Strategie des unbestimmten Ansatzes erweist sich mit wachsendem n als zusehends unbrauchbarer, sodaß die folgende Vereinbarung zweckmäßig erscheint:

Die Approximation n-ter Ordnung soll für die erste Ableitung eine Approximation (n-1)-ter Ordnung liefern (und daher für die zweite Ableitung einer Approximation (n-2)-ter Ordnung usw.).

Daher ist es fast trivial (sit venia verbo!), daß

$$a_1 = f'(p)$$

$$a_2 = \frac{f''(p)}{2}$$

$$a_3 = \frac{f'''(p)}{3!}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(p)}{n!}$$

gilt!

Wir beginnen gleich mit Aufgaben!

(4.1) Man gebe die ersten 5 Approximationen von $f(x) = \sin x$ im Punkt $p = 0$ an.

Lösung: $f(x) = \sin x$, $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$, $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$, $\qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$, $\qquad f'''(0) = -1$

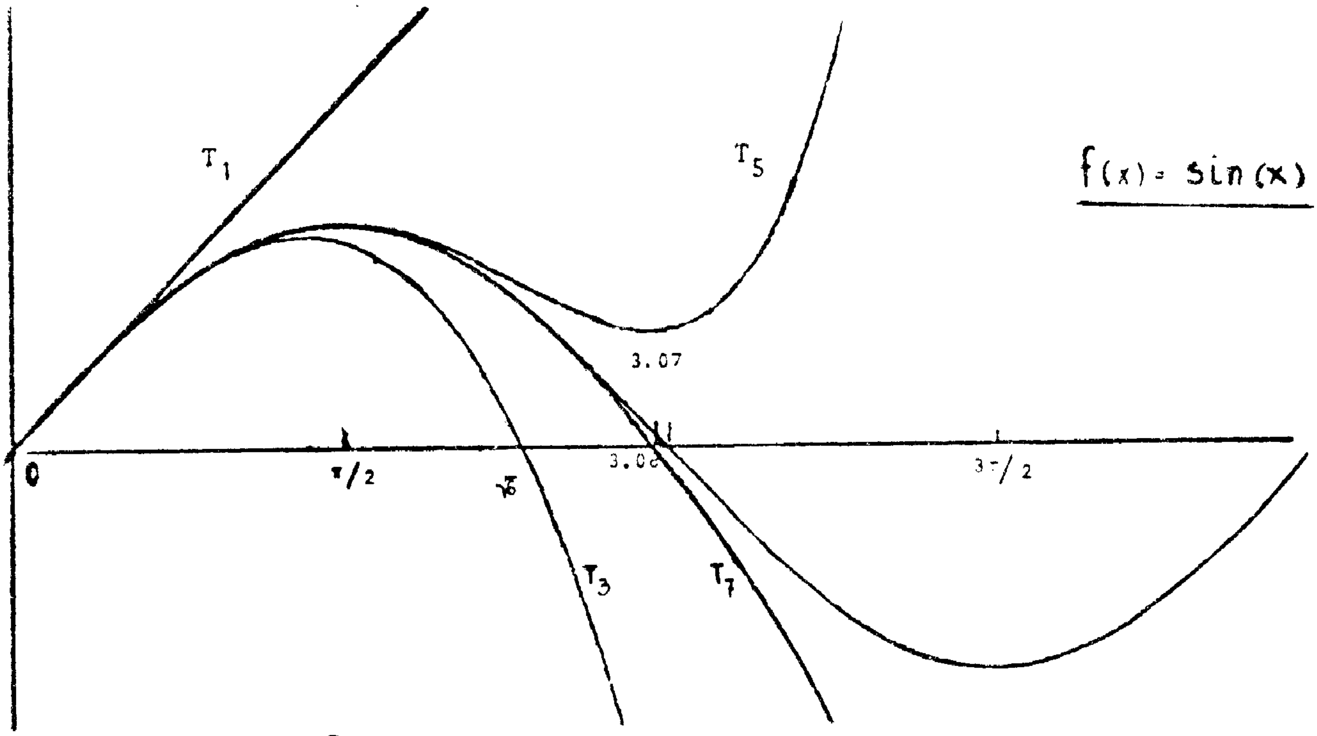
$f^{(4)}(x) = \sin x$, $\qquad f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \cos x$, $\qquad f^{(5)}(0) = 1$

Also $T_1(x) = T_2(x) = x$

$T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$

$T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ usf.



$T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ hat die positive Nullstelle $\sqrt{6} = 2,4494897$ und das Maximum bei $\sqrt{2} = 1,4142136$. $T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ hat keine positive Nullstelle, allerdings ein lokales Minimum bei 3,076378 (eine "verfehlte Nullstelle" sozusagen und schon in der Nähe von π) und ein lokales Maximum bei 1,5924504. Erwähnt sei, daß die qualitativ so wichtige Eigenschaft der Periodizität der Sinusfunktion durch diese Approximation kaum in Sicht kommt!

(4.2) Ohne Differentialrechnung kann man die Näherungspolynome von $\frac{1}{1-x}$ im Punkte p = 0 studieren. Denn

$$\frac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

ergibt sich durch Ausmultiplizieren (Summenformel für die geometrische Reihe!).

5. Hinweise auf Exaktifizierungen

Wir haben als Strategie vorgeschlagen: Die Approximation n-ter Ordnung soll für die erste Ableitung eine Approximation (n-1)ter Ordnung liefern.

Es gilt nun tatsächlich:

Satz: Es sei f im Punkt p n-mal differenzierbar. Dann ist

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - a_1(x-p) - \dots - a_n(x-p)^n}{(x-p)^n} = 0$$

genau dann der Fall, wenn

$$a_i = \frac{f^{(i)}(p)}{i!}, \quad 1 \leq i \leq n$$

gilt.

Beweisidee: Man verwendet Induktion!

für n = 1 ist

$$\lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} - a_1\right) = 0$$

genau für $a_1 = f'(p)$ der Fall.

Sei f n-mal differenzierbar, so ist f'(n-1)-mal differenzierbar. Es ist daher

$$\lim_{x \to p} \frac{f'(x) - f'(p) - b_1(x-p) - \dots - b_{n-1}(x-p)^{n-1}}{(x-p)^{n-1}} = 0$$

für $\quad b_i = \frac{f^{(i+1)}(p)}{i!}, \qquad 1 \leq i \leq n - 1,$

der Fall.

Wir setzen $G(x) = f(x) - f(p) - a_1(x-p) - \dots - a_n(x-p)^n$.

Dann ist es plausibel (und mittels des verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung leicht beweisbar), daß

$$\lim_{x \to p} \frac{G(x)}{(x-p)^n} = \frac{1}{n} \lim_{x \to p} \frac{G'(x)}{(x-p)^{n-1}}$$

gilt, woraus die Behauptung folgt.

Wir haben am Anfang erwähnt, daß lineare Approximation bedeutet:

$$f(x) - f(p) \sim f'(p)\,(x-p)$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung lehrt

$$f(x) - f(p) = f'(\xi)\,(x-p),$$

wo ξ ein Punkt zwischen x und p ist.

Allgemeiner gilt:

Satz: Die Funktion f sei n-mal differenzierbar.
Dann ist

$$f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(p)}{i!}\,(x-p)^i = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x-p)^n$$

Zum Beweis: Eine Beweisidee verwendet wiederum den verallgemeinerten Mittelwertsatz. Sei

$$F(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(z)}{i!}\,(x-z)^i$$

$$H(z) = (z-x)^n - (x-p)^n$$

Dann ist (wir denken uns nun x und p fest):

$$F(x) = f(x)$$

$$F(p) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(p)}{i!}\,(x-p)^i$$

$$F'(z) = -\frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}\,(x-z)^{n-1}$$

$$H(x) = -(x-p)^n$$

$$H(p) = 0$$

$$H'(z) = n\ (z-x)^{n-1}$$

Daher ist

$$\frac{F(x) - F(p)}{H(x) - H(p)} = \frac{F'(\xi)}{H'(\xi)} = -\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Eine andere Beweisidee verwendet partielle Integration (eine wichtige Strategie der Integralrechnung!):

$$\int_p^x \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}\ (x-z)^{n-1} dz = -\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}\ (x-p)^{n-1} + \int_p^x \frac{f^{(n-2)}(z)}{(n-2)!}\ (x-z)^{n-2} dz$$

Auf der rechten Seite gelangt man induktiv absteigend letztlich zu

$$\int_p^x f'(z)dz = -f(p) + f(x)$$

Links verwendet man den verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int_p^x \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}\ (x-z)^{n-1} dz = f^{(n)}(\xi) \int_p^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\ dz =$$

$$= f^{(n)}(\xi)\ \frac{(x-p)^n}{n!}$$

Nachtrag: Wir formulieren der Vollständigkeit halber eine Version des verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung und des verallgemeinerten Mittelwertes der Integralrechnung.

(1) Sind f und g: $[a,b] \to \mathbb{R}$ (überall) stetige und im offenen Intervall $]a,b[$ (überall) differenzierbare Funktionen und ist $g'(x) \neq 0$ in $]a,b[$, so gibt es ein $\xi \in\ ]a,b[$, sodaß gilt:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

(2) Sind f und g : $[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und ist $f(x) \neq 0$ auf $]a,b[$, so gibt es ein $\xi \in]a,b[$ mit

$$\int_a^b f(z)\, g(z)dz = g(\xi) \int_a^b f(z)dz$$

6. Unendliche Reihen

In vielen Fällen ist naheliegend, daß man von

$$f(x) \sim \sum_{r=0}^{n} \frac{f^{(r)}(p)}{r!} (x-p)^r$$

zu

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f^{(r)}(p)}{r!} (x-p)^r$$

übergehen kann. Schon die Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty} x^r$$

lehrt, daß dies nicht uneingeschränkt der Fall sein muß. In diesem Fall ist Konvergenz und Gleichheit nur für $|x| < 1$ richtig.

Die Potenzreihen für sin x, cos x und e^x sind bekanntlich für alle Werte von x konvergent und stellen die gegebene Funktion dar.

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-1/x^2} & x \neq 0 \end{cases}$$

ist ein Kuriosum in der anderen Richtung: Es ist $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n, also ist die nach unserem Verfahren gebildete Potenzreihe sicher konvergent (zum Grenzwert 0), stellt aber nur für $x = 0$ die gegebene Funktion dar.

Konvergenzuntersuchungen stehen aber nicht im Vordergrund dieser Überlegung und gehören wohl eher nicht in den Unterricht!